

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

## Vyučování

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 53 (2008), No. 4, 341--345

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141873>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# vyučování

ZÁKLADEM ÚSPĚCHU JSOU DOBRÍ  
UČITELÉ

*Ed Barbeau, Toronto*

Ještě předtím, než byla vydána jako kniha,<sup>1)</sup> disertační práce Liping Ma kolovala v polooficiální formě a byla nadšeně přijímána a komentována matematickou komunitou. Mezi jinými též několika významnými americkými matematiky, kteří se aktivně zajímají o školní výuku a kteří byli znepokojeni potlačením technických dovedností, jež přinesla školská reforma. Práce Liping Ma potvrdila jejich názor, že ke zlepšení současného stavu lze dospět změnami kurikula jen tehdy, budou-li na ně učitelé připraveni.

Před třiceti lety byla autorka studentkou střední školy v Šanghaji. V době nechalné známé čínské kulturní revoluce byla poslána na venkov, aby se „učila od venkovanů“. Několik měsíců po jejím příjezdu ji hlavní představitel obce požádal o vedení výuky na tamní základní škole. A tak začala její kariéra. Stala se

---

<sup>1)</sup> Liping Ma: *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Mahwah, NJ, 1999, xxv + 166 pages, ISBN 0-8058-2909-1.

---

Recenze E. Barbeau: *Good Teachers Are the Core*, Canadian Mathematical Society Notes 32 (2000), no. 2, March, 7–10. Přeložila Eliška Pecinová.

ředitelkou školy, později inspektorkou základních škol v okrese a nakonec získala magisterský titul na East China Normal University. V roce 1989 zahájila studia na Michigan State University, kde se účastnila průzkumu na téma, do jaké míry rozumějí učitelé prvního stupně elementární matematice.

Liping Ma byla překvapena, jak očividné systematické nedostatky ve znalostech matematiky mají američtí učitelé v porovnání s jejich čínskými kolegy; a to měli američtí učitelé vyšší úroveň formálního vzdělání. Studium tohoto jevu se stalo tématem její doktorské disertační práce na Stanford University pod vedením Lee S. Shulmana. Její studie se týkala vzorku 23 učitelů „lepšíh než průměr“, kteří se účastnili dalšího vzdělávání (profesního rozvoje) či aspirantských programů v USA, a vzorku 72 učitelů pěti čínských základních škol různé úrovně. Američtí učitelé se sami hodnotili jako „znalí matematiky“, zatímco čínští učitelé tvořili reprezentativnější vzorek.

Učitelé se měli vyjádřit – jak po matematické, tak po pedagogické stránce – k následujícím čtyřem problémům:

(1) Jak učit odčítání dvojciferných čísel při přechodu přes desítku.

(2) Jak reagovat na následující nesprávné násobení:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ \hline 738 \\ 1845 \end{array}$$

(3) Jak určit podíl  $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$  a předložit reálný model („příběh“) tohoto výpočtu.

(4) Jak odpovědět žákovi, který tvrdí toto: protože obdélník  $4 \times 4$  má obvod 16

a obsah 16 a obdélník  $4 \times 8$  má obvod 24 a obsah 32, roste obsah uzavřeného obrazce s rostoucím obvodem.

První čtyři kapitoly analyzují odpovědi učitelů na tyto čtyři problémy, poslední dvě kapitoly jsou věnovány tzv. *dokonalému porozumění elementární matematice* (Profound Understanding of Elementary Mathematics): jde o vymezení tohoto pojmu a o to, jak lze diagnostikovat, zda učitel elementární matematice dokonale rozumí, a jak k takovému dokonalému porozumění dospět. Monografie končí krátkým závěrečným shrnutím a bohatým seznamem literatury.

Jaká byla zjištění, která natolik vzrušila naše matematické kolegy? Celkem vzato, čínští učitelé nazírali na jednotlivá témata jako na součásti *souhrnu znalostí* (knowledge package), který musí být zákům strategicky předáván, aby byli schopni porozumět základním principům. Zatímco američtí učitelé měli tendenci odvolávat se na mechanicky naučená pravidla pro odčítání, čínští učitelé se spíše odkazovali na rozklad čísel na jednotlivé řády a zjednodušovali příslušný algoritmus na odčítání čísel menších než 10 od čísel menších než 20. Řada amerických učitelů vysvětlovala nesprávné násobení jako procedurální chybu, zatímco většina čínských učitelů usilovala o rozpoznání chyby a podání vysvětlení, které by bylo zaměřeno na pochopení, jakou roli hrají řády. Jako příklad uvádíme komentář, jehož autorem je učitel Wong:

„Je nutné prohloubit znalosti žáků, jež se týkají pochopení pojmu *řád*. Jejich pojetí řádu bývalo zcela přímočaré. Základní jednotkou čísla byla vždy jednička na pozici jednotek. Číslo 492 žáci chápali jako 492 jednotek, číslo 738 jako 738 jednotek. Nyní však řád základní jedničky není

vždy jednotka. Mění se podle kontextu. Vezměme si příklad, kdy je řád čísla 4 deset. Když násobíme číslo 123 číslem 4, chápeme číslo 4 jako 4 desítky. Tyto desítky se stanou řádem součinu 492. Již to není 492 jednotek, jako v práci studentů, ale 492 desítek. Proto klademe číslo 2 na pozici desítek. Totéž nastane, vynásobíme-li číslo 123 číslem 6, které chápeme jako 6 stovek. [...] Abychom pomohli studentům odstranit chyby, měli bychom rozšířit jejich chápání řádu číselice, naučit je „flexibilně“ nahlížet na tento pojem.“ (str. 43)

Rozdíly mezi oběma skupinami učitelů byly ještě výraznější při hodnocení problému se zlomky. Všechny 72 čínských učitelů odpovědělo správně. Co se týče amerických učitelů, jedenáct použilo správný algoritmus, ale dva z nich nepodali úplnou odpověď; reakce zbývajících se pohybovala mezi nejistotou a nepochopením. Čínští učitelé rozvedli platnost pravidla „převrať a vynásob“. Pouze jeden z 23 amerických učitelů správně vyjádřil význam poměru, zatímco 65 čínských učitelů vytvořilo dohromady více než 80 problémů, každý na jiné téma, jako např. měření, partitivní modely dělení, nebo určení dělitele, který by po vynásobení  $\frac{1}{2}$  dal  $1\frac{3}{4}$ . Paní D. například odpověděla:

„Dělení  $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$  lze vyjádřit z různých pohledů. Můžeme si například představit, že máme  $1\frac{3}{4}$  kg cukru a chceme ho zabalit do balíčků po půl kilogramech. Kolik balíčků můžeme vytvořit? Také můžeme uvažovat, že máme dva balíky cukru, jeden s bílým a druhý s hnědým cukrem. Bílého cukru je  $1\frac{3}{4}$  kg, hnědého je  $\frac{1}{2}$  kg. Kolikrát větší je hmotnost bílého cukru než hnědého? Dále můžeme říci, že na stole máme  $1\frac{3}{4}$  kg cukru, což je polovina celkového množství cukru, které máme

doma. Kolik cukru máme doma? Všechny tři úlohy jsou o cukru a všechny popisují  $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ . Numerické modely, které tyto úlohy ilustrují, však nejsou stejné. Já bych napsala všechny tři úlohy na tabuli a pozvala své studenty, aby porovnali různé významy, které vyjadřují. Po diskusi bych je požádala, aby se pokusili vymyslet vlastní problémy představující různé modely pro dělení zlomků.“ (str. 80)

Liping Ma poznamenává, že američtí a čínští učitelé patrně vycházejí z různých významů pojmu zlomek. Zatímco američtí učitelé obecně pracují s „reálnými“ a „konkrétními“ celky a s jejich zlomky, čínští učitelé jdou dále. Při výuce operací se zlomky spíše využívají „abstraktní“ a „neviditelné“ celky, jako je velikost rozpětí silnice nebo množství času, který je zapotřebí k dokončení jistého úkolu. Podobné rozdíly se projeví v situaci obvod–obsah. Američtí učitelé se snažili zapojit studenta do hledání hypotézy. Skutečnost, že nebyli schopni dostatečně ocenit hloubku těchto problémů, však způsobila, že se tak dělo jen povrchním způsobem. Dva učitelé přijali studentovo tvrzení a pouze jeden prozkoumal tento problém dostatečně důkladně, aby získal spolehlivý závěr. Čínští učitelé začali podobně nejistě, ale poté přistoupili k dané situaci systematictěji. Jejich odpovědi se pohybovaly od jednoduchého podání protipříkladu až po analýzu, za jakých podmínek může hypotéza platit, a naznačení, kde lze nalézt protipříklady. Asi pětina čínských učitelů neprovedla dostatečně podrobnou analýzu, která by vedla k získání správných výsledků.

Pro každý ze čtyř problémů podává autorka rozbor situace, jenž zahrnuje příbuzná témata a techniky poskytující spo-

lehlivý základ pro kritickou diskusi o přístupech jednotlivých učitelů. Co se týče samotných učitelů, přichází autorka s tímto závěry.

„Celkové znalosti čínských učitelů se jeví provázané, zatímco u amerických učitelů jsou roztržštěné. Při rozhovorech s čínskými učiteli jsem si mohla povšimnout vzájemného propojení jejich diskusí o jednotlivých problémech, přestože čtyři problémy této studie zasahují do různých úrovní a oblastí elementární matematiky. Z odpovědí amerických učitelů lze však jen stěží vyčíst nějaké vazby mezi našimi čtyřmi problémy. Roztržštěnost matematických znalostí amerických učitelů odpovídá fragmentaci matematických osnov a výuky v USA, o níž bylo vědecky prokázáno, že je hlavní příčinou neuspokojivé matematické vzdělanosti ve Spojených státech. [...] Z mého pohledu jsou však tato roztržštěnost a provázanost důsledky, nikoli příčinami. Učební osnovy, výuka a znalosti učitelů vypovídají o úrovni elementární matematiky ve Spojených státech a v Číně. To, co způsobilo provázanost znalostí Číňanů, je porozumění matematickému základu, matematické podstatě věci.“ (str. 107–108)

Američtí učitelé měli na rozdíl od svých čínských kolegů vysokoškolské vzdělání, které obsahovalo některé partie vyšší matematiky. Jejich uvedení do světa abstraktních struktur však nepřispělo k vytvoření takového matematického základu. Příčina je mnohem choulostivější a hlavní síla knihy Liping Ma je ve schopnosti na ni poukázat. Lepší čínští učitelé prokázali *dokonalé porozumění elementární matematice*; kde obsah pojmu „dokonalé“ zahrnuje trojici významů *hluboké, široké a důkladné*. To má čtyři charakteristiky. První je smysl pro logickou

strukturu matematiky; učitelé disponují určitým souborem znalostí (knowledge packages), jejichž centrální jádro je propojeno s pomocnými tématy. Učitelé s *dokonalým porozuměním elementární matematice* zvažují četná hlediska, analyzují jejich výhody a nevýhody a vedou studenty k hlubšímu porozumění. Za třetí jsou si tito učitelé vědomi významu jednoduchých, ale klíčových idejí, které pak zdůrazňují a rozvíjejí. Konečně se v jejich vyučování projevuje smysl pro souvislost a chápání kurikula elementární školy jako celku. Mohou tedy využít, co již studenti nastudovali, a položit základy pro to, co bude následovat.

Kdy a jak lze dosáhnout *dokonalého porozumění elementární matematice*? Aby na tyto otázky mohla Liping Ma odpovědět, rozmlouvala se dvěma dalšími čínskými skupinami: bylo to 26 budoucích učitelů (preservice teachers) a 20 studentů devátých tříd „podprůměrné školy“ v Šanghaji. Ačkoliv byly obě skupiny stejně schopné co se týče znalostí algoritmů, jednotliví studenti se mezi sebou více lišili, ale byli méně důkladní. Budoucí učitelé chápali pojmy hlouběji. Při diskusi o třetím a čtvrtém problému byly výkony obou těchto skupin lepší než výkon amerických učitelů. Postrádaly však zralost čínských učitelů. Proto Liping Ma hovořila se třemi čínskými učiteli, aby zjistila, proč se zde projevil rozdíl. Učitelé poukazovali na důležitost vyučování různých ročníků během kariéry, na cílené studium učebních materiálů, zejména učebnic a školních osnov, spolupráci s ostatními kolegy, vlastní řešení problémů a ochotu učit se od studentů. Kvalita čínských učitelů je výsledkem účinné výchovy, která začíná důkladným vzděláním ve škole, pokračuje studiem matematiky a přípravou na její výuku a nakonec uváděním stu-

dentů do opravdových základů matematiky. Ve Spojených státech je elementární matematika patrně nedoceněna; učitelé mají menší znalosti a dovednosti, na nichž mohou stavět. K pozitivní zpětné vazbě navíc nedochází.

Jak napravit situaci v Severní Americe? Liping Ma zdůrazňuje úzkou souvislost mezi zdokonalováním učebních osnov a znalostmi učitelů, přičemž na obou těchto úkolech je třeba pracovat současně. Pro budoucí učitele navrhuje posílení vazby mezi studiem školské matematiky a získáváním dovedností, jak matematiku vyučovat. Doporučuje vysokoškolské programy bližší ke zvládnutí základního kurikula. Svou knihu uzavírá pádnými porovnáními reformního hnutí. Zdůrazňuje, že ačkoliv čímšší učitelé patrně nebudí dojem, že jsou velice moderní, přesto mohou být jejich studenti aktivně angažováni ve výzkumu a zapojováni do řešení problémů a utváření kritických názorů.

Protože se jedná o kvalitativní výzkum, jenž zahrnuje pouze omezený počet učitelů, bylo by chybné jej interpretovat jako obecný průzkum znalostí učitelů jak v Číně, tak ve Spojených státech. Nebylo to poprvé, kdy se vědci na tomto kontinentu zabývali tím, co učitelé matematiky znají a jak se cítí. Práce Liping Ma zapadá do mnohem širšího proudu amerického průzkumu, a navazuje zejména na práci Deborah Ballové. (Více k tomuto výzkumu viz review Rogera Howea v časopise *Notices of the AMS* ze září 1999.) Záměrem Liping Ma však nebylo provést národnostní porovnání nebo jen zaznamenat odlišné postřehy a představy učitelů základních škol, ale plněji tyto postřehy a představy pochopit. Pro tento cíl bylo užitečné nalézt mimoamerické kulturní prostředí vhodné pro srovnání. Jako

výsledek dostáváme práci, jež může sloužit jako kvalitní průvodce k některým tématům, která bychom měli zkoumat, abychom se vůbec mohli zabývat tím, co je třeba zlepšit v severoamerickém matematickém vzdělávání. Tzv. „matematické války“ ve Spojených státech způsobily, že se lidé rozdělili do nepřátelských táborů i přes snahy řady významných pedagogů a matematiků nalézt společnou řeč. Kniha Liping Ma k tomu cíli směřuje. Ti, kdo byli silnými zastánci poctivé rutiny, mohou být ujištěni, že ji nelze v úspěšném vyučování opomíjet; a ti, kdo vidí hlavní smysl v aktivním zapojení studentů do formulace pojmů, do zkoumání a řešení problémů, poznají, že toto je rovněž klíčové. Zdokonalení matematického vzdělání nebude dosaženo ani pouhou změnou kurikulárních dokumentů, ani útokem na učitele a školy, jejichž studenti nemají patřičnou úroveň, ale pouze působením a prací zasvěcených, přemýšlivých a pečli-

vých učitelů na jedné straně a prostředím, které podporuje neustálý profesionální růst na straně druhé.

Naši nejlepší učitelé se často osamocně plahočí bez podpory svých ředitelů a inspektorů. Studenti učitelství sice navštěvují různé inovační kurzy, a to buď v bakalářském studiu, nebo dokonce ve studiu magisterském, nejsou však školeni tak, aby tyto kurzy začlenili do svého vlastního logického pohledu. Dnes převládá tendence reagovat na krizi ve vzdělávání utrácením peněz na nové texty, testy a technologie. Kniha Liping Ma zdůrazňuje, že základem kvalitního matematického vzdělávání jsou dobří učitelé.

Každý budoucí učitel prvního stupně, každá univerzitní knihovna, každá předmětová komise i ministerstvo školství, ti všichni by měli mít výtisk této skvělé knihy, jejíž závěry jsou podloženy výzkumem a jasnými argumenty.

---

## jubilea zprávy



### 10. JUBILEJNÍ KONFERENCE VÍTĚZŮ SOUTĚŽÍ Z EXAKTNÍCH OBORŮ

Poprvé se konference vítězů konala před deseti lety ve Fyzikálním ústavu Akademie věd ČR a týkala se jen oboru fyzika. Organizátorem konference byl Z. Kluiber spolu s V.

Dvořákem a Š. Zajacem. V průběhu deseti let pak tato konference vykristalizovala v pravidelná celostátní setkávání vítězů přírodovědných soutěží a soutěží v matematice a v programování.

Jubilejní 10. konference vítězů matematických, programátorských, biologických, zdravotnických a ekologických soutěží ve školním roce 2007/2008 v ČR se uskutečnila 20. 11. 2008. Místem konání konference byla Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové. Konference se konala pod záštitou předsedy Jednoty českých matematiků a fyziků Š. Zajace. Předsedou konference byl Z. Kluiber, předseda Komise pro talenty JČMF. Místopředsedy: V. Jehlička, děkan PF UHK,