

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Michal Křížek; Lawrence Somer; Alena Šolcová  
Deset matematických vět o pražském orloji

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 54 (2009), No. 4, 281--300

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141921>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2009

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Deset matematických vět o pražském orloji

*Michal Krížek, Lawrence Somer, Alena Šolcová, Praha*

## 1. Úvod

Geometrie a teorie čísel sehrála důležitou úlohu při konstrukci pražského orloje. V tomto přehledovém článku uvedeme celkem deset vět z [10]–[14], k jejichž formulaci nás orloj inspiroval a mají k němu úzký vztah. Matematické totíž formulují své myšlenky právě ve tvaru matematických vět, které obsahují jen to, co je podstatné.

Podle výzkumů Zdeňka Horského, Stanislava Macháčka a Emanuela Procházky [7, s. 32], [8], [16], [21, s. 164] orloj vznikl v době mistra Jana Husa kolem roku 1410. Jeho matematický model navrhl Jan Ondřejův, zvaný *Šindel*, který se zabýval matematikou a astronomií na pražské univerzitě. Jeho starší kolega Křišťan z Prachatic (viz [6]) zde již kolem roku 1407 přednášel o konstrukci astrolábu. To je starověký astronomický úhломěrný přístroj k určování poloh nebeských těles a místního času. O vzhledu a konstrukci astronomického ciferníku orloje tak Šindel mohl diskutovat s Křišťanem z Prachatic.<sup>1)</sup> Unikátní stroj orloje vytvořil Mikuláš z Kadaně. V průběhu staletí byla konstrukce orloje vícekrát zdokonalována, např. pověstným Janem z Růže (mistrem Hanušem). V 16. století pečoval o orloj Jan Táborský z Klokotské Hory. Ten je také autorem kalendářního stroje a nejstaršího známého popisu orloje z roku 1570 (viz [27]).

V roce vzniku orloje (1410) vystřídal mistra Jana Husa ve funkci rektora pražské univerzity právě Jan Šindel (viz [1], [29, s. 4], [30, s. 81]). Na jeho počest jsme v [10] zavedli pojem šindelovské posloupnosti, který představíme v kap. 5. S jeho pomocí uvidíme, jaká podivuhodná matematika se skrývá v bicím stroji pražského orloje a jak tento stroj souvisí s trojúhelníkovými čísly.

---

<sup>1)</sup> Podle [2, s. 79] Křišťan z Prachatic působil v Koleji krále Václava na Ovocném trhu, kde později přebýval i Johannes Kepler.

---

Prof. RNDr. MICHAL KRÍŽEK, DrSc., Matematický ústav Akademie věd ČR, v.v.i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: [krizek@math.cas.cz](mailto:krizek@math.cas.cz)

Prof. LAWRENCE SOMER, Ph.D., Department of Mathematics, Catholic University of America, Washington, D.C. 20064, U.S.A., e-mail: [somer@cua.edu](mailto:somer@cua.edu)

Doc. RNDr. ALENA ŠOLCOVÁ, Ph.D., katedra teoretické informatiky, Fakulta informačních technologií ČVUT v Praze, e-mail: [alena.solcova@fit.cvut.cz](mailto:alena.solcova@fit.cvut.cz)

## 2. Stereografická projekce a astronomický ciferník

Pražský orloj je umístěn v dolní části Staroměstské radniční věže vysoké přibližně 59 metrů.<sup>2)</sup> Na jižní stěně věže jsou nad sebou umístěny dva velké ciferníky: horní astronomický a dolní kalendářní. Astronomický ciferník (viz obr. 1) je astroláb poháněný hodinovým strojem orloje. Znázorňuje geocentrický model vesmíru s nehybnou Zemí uprostřed, kolem níž obíhá Slunce, Měsíc a znamení zvěrokruhu nebeské sféry.<sup>3)</sup> Orloj tak vlastně představuje jeden z prvních analogových počítačů, neboť ukazuje pohyby nebeských těles. Někdy se dokonce hovoří o „high technology“ 14. či 15. století (viz [26]).

Při návrhu astronomického ciferníku byla použita stereografická projekce nebeské sféry na rovinu. V případě pražského orloje si nebeskou sféru představme jako kulovou plochu o poloměru cca 40 cm (viz obr. 2). Střed promítání  $S$  je umístěn v severním pólu<sup>4)</sup> kulové plochy a projekční rovina je k ní tečná s bodem dotyku v jižním pólu  $J$ . Střed astronomického ciferníku (viz obr. 1) tedy odpovídá jižnímu pólu nebeské sféry. Nejmenší vnitřní kružnice se středem v jižním pólu znázorňuje obratník Kozoroha na nebeské sféře, zatímco vnější soustředná kružnice obratník Raka. Mezi těmito kružnicemi je na ciferníku ještě umístěna další soustředná kružnice představující rovník nebeské sféry (viz obr. 1 a 2).

Důležitou vlastností stereografické projekce je následující tvrzení, které znal již řecký matematik a astronom Klaudios Ptolemaios (cca 100–160 n. l.).

**Věta 1 (Ptolemaiova).** *Každá kružnice na kulové ploše, jež neprochází jejím severním pólem, se při stereografické projekci opět zobrazí na kružnici.*

Důkaz lze nalézt např. v [4], [6], [12], [22]. Díky této větě mohli staří mistři snadno zkonstruovat některé důležité křivky astronomického ciferníku. Snadno nahlédneme (viz [12]), že kružnice procházející severním pólem se při stereografické projekci zobrazují na přímky. Proto jsou na obr. 1 hranice mezi jednotlivými zvířetníkovými znameními úsečky (tj. stereografické projekce částí poledníků nebeské sféry). Nosný kříž prstence ekliptiky odpovídá čtyřem nejvýznamnějším poledníkům (0, 90, 180 a 270 stupňů). Poznamenejme ještě, že větu 1 lze zobecnit i do více rozměrů.

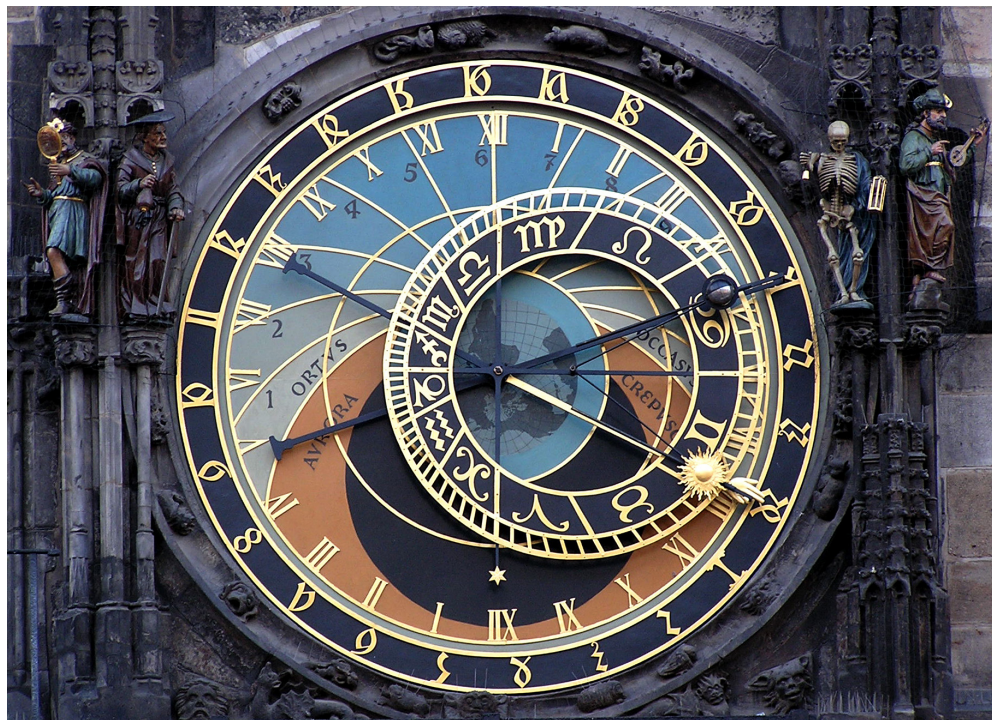
Ekliptika, tj. dráha Slunce po nebeské sféře, se v důsledku věty 1 zobrazuje na kružnici (viz obr. 2). Její střed není ve středu ciferníku, ale celá ekliptika se kolem tohoto bodu excentricky otáčí. Ekliptika je na astronomickém ciferníku orloje znázorněna zlatým prstencem. Po jeho vnitřní straně je na černém podkladu rozmístěno po 30 stupních 12 znamení zvěrokruhu, tj. zodiaku nebo též zvířetníku:

---

<sup>2)</sup> Výška věže až po dvě zlaté hvězdy na samém vrcholu je rovna stu pražských loktů, což byla tehdejší jednotka míry. Některé prameny uvádějí nesprávnou výšku věže 70 metrů. Etalon pražského lokte 59.1 cm je umístěn na Novoměstské radnici.

<sup>3)</sup> Olomoucký orloj naproti tomu znázorňuje heliocentrický model vesmíru – viz [5].

<sup>4)</sup> Většina orlojů a astrolábů, které vznikly ve 2. polovině 15. století a později, má střed promítání v jižním pólu nebeské sféry, aby bylo možno znázorňovat polohy hvězd v okolí severního pólu. Při tomto způsobu promítání ale sluneční ukazatel vykonává v létě přes den krátké oblouky, zatímco v zimě dlouhé.



Obr. 1. Astronomický ciferník pražského orloje (foto Jakub Šolc).

Beran (začíná kolem 21. 3. v době, kdy Slunce přechází nebeský rovník z jižní polokoule na severní), Býk, Blíženci, Rak, Lev, Panna, Váhy, Štír, Střelec, Kozoroh, Vodnář, Ryby.

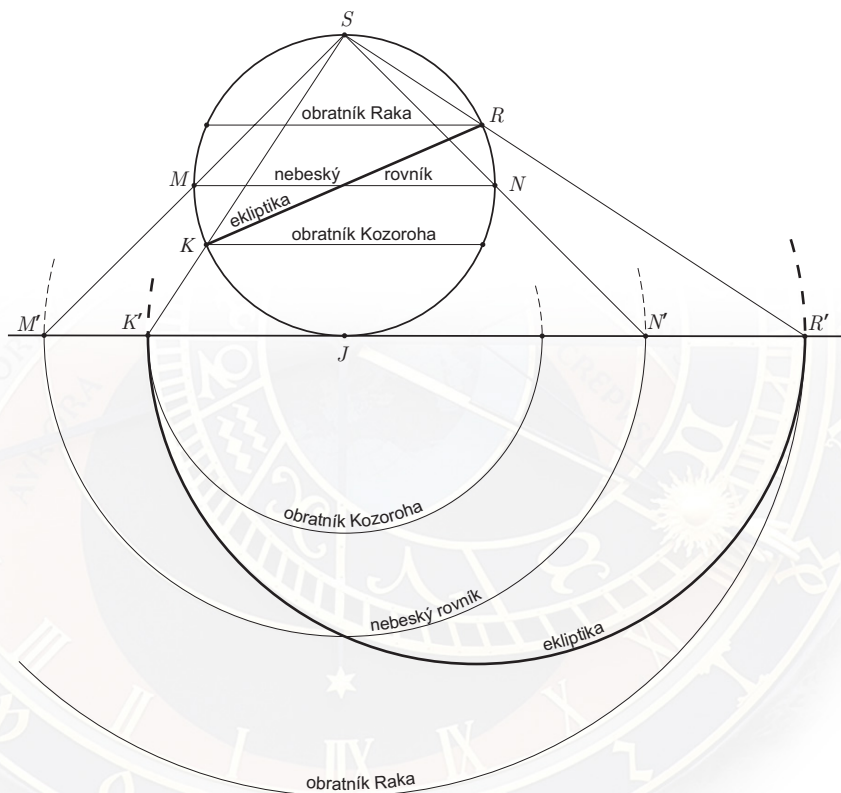
Na ekliptice lze pozorovat přibližnou polohu Slunce, Měsíce<sup>5)</sup> a jeho fáze. Sluneční i měsíční ukazatel je posuvně uchycen na příslušné rafiji hodinového stroje a je tenkou ojnicí spojen se středem ekliptiky, aby na ní stále zůstal. Astronomický ciferník orloje také umožňuje zjišťovat východy, kulminace a západy jednotlivých znamení zvěrokruhu. Ekliptika se dotýká obou obrátek ve dvou protilehlých bodech  $K$  a  $R$  (viz obr. 1 a 2). Její střed leží ve středu spojnice těchto bodů.

**Věta 2.** *Stereografická projekce je konformní zobrazení.*

Velice elegantní důkaz této věty, kterou také znal už Ptolemaios, je uveden např. v [22]. Podle věty 2 se velikost všech úhlů na nebeské sféře při stereografické projekci nezmění. Například úhel mezi ekliptikou a nebeským rovníkem, který je roven  $23.45^\circ$ , se zobrazuje na úhel stejné velikosti v projekční rovině (viz obr. 1 a 2). Stereografická projekce je přitom velice nelineární zobrazení.

V době zimního slunovratu kolem 21. prosince se sluneční ukazatel nachází na obrátce Kozoroha. Pak se od něj po spirále postupně vzdaluje, až o letním slunovratu

<sup>5)</sup> Dráha Měsíce neleží v rovině ekliptiky, ale je od ní odkloněna přibližně o úhel  $i = 5^\circ$ , což se na astronomickém ciferníku pro jednoduchost zanedbává.



Obr. 2. Stereografická projekce obratníků Raka a Kozorooha, nebeského rovníku a ekliptiky (nahore bokorys, dole půdorys). Průměr  $|JS|$  dané koule je roven poloměru  $|JN'|$  stereografické projekce rovníku.

kolem 21. června dosáhne obratníku Raka. Dalšího půl roku se zase pomalu přibližuje k obratníku Kozorooha. V době jarní a podzimní rovnodennosti je sluneční ukazatel na nebeském rovníku.

Rafije, na jejímž konci je uchycena pozlacená ruka, ukazuje *středoevropský čas* (SEČ) na stupnici s římskými číslicemi.<sup>6)</sup> Sluneční ukazatel, který je posuvně upevněn na téže rafiji, tak oběhne Zemi nakreslenou uprostřed ciferníku jednou za den. Zlacené arabské číslice na vnějším černém prstenci (tzv. čtyřiadvacetníku) slouží k označení *staročeského času*, který se počítal od západu Slunce (viz [7, s. 50], [20]). Tento prsteneček se v průběhu roku pozvolna kývavě natáčí o  $\pm 30^\circ$ . Černé arabské číslice u zlacených oblouků<sup>7)</sup> (srov. [7, s. 54], [23, s. 19]) označují *planetní* (též *přirozené, nestejně*) hodiny, pro něž je jedna hodina definována jako 1/12 doby mezi východem a západem Slunce.

<sup>6)</sup> Poznamenejme, že rozdíl mezi SEČ a původním pražským časem je jen 138 sekund, neboť Praha leží v blízkosti patnáctého poledníku.

<sup>7)</sup> Oblouky označené 1 až 11 nejsou částmi kružnic, i když jsou jim velice blízké – viz M. Křížek, P. Křížek: Kružnice na astronomickém ciferníku pražského orloje, *Matematika–fyzika–informatika 19* (2010).

Sluneční ukazatel pak určuje odpovídající *temporální čas*,<sup>8)</sup> jenž se počítá od východu Slunce. Konečně ručička s malou šesticípou hvězdičkou (viz obr. 1 dole), která je umístěna mezi znameními Berana  $\Upsilon$  a Ryb  $\text{♋}$  a pevně spojena s prstencem ekliptiky, ukazuje na stupnici s římskými číslicemi *hvězdný čas*.<sup>9)</sup> To je hodinový úhel *jarního bodu*, tj. bodu, v němž Slunce přechází nebeský rovník z jižní polokoule nebeské sféry na severní polokouli. V důsledku precese zemské osy se ale jarní bod posunuje podél ekliptiky o  $50.26''$  za rok. Proto se poloha znamení zvěrokruhu na nebeské sféře mění, zatímco poloha zvířetníkových a dalších souhvězdí je v podstatě neměnná. Jarní bod odpovídající roku 2000 se tak nachází v souhvězdí Ryb.

Střed naší Galaxie leží shodou okolností v souhvězdí Střelce, jehož znamení  $\text{♐}$  je vlevo na prstenci ekliptiky znázorněno zlatou šipkou (viz obr. 1). Z postavení prstence tedy můžeme také přibližně určit, kde se právě nachází střed Galaxie, kolem něhož obíhá Slunce rychlostí 230 km/s. Přitom je třeba opět přihlédnout k mírnému posunu jarního bodu. V dalším zvířetníkovém souhvězdí – v Panně (označené  $\text{♍}$  na obr. 1) zase leží střed místní kupy galaxií, kolem kterého obíhá i naše Galaxie rychlostí 600 km/s. To, že orloj bude umožňovat určit i polohy těchto dvou důležitých středů na nebeské sféře, tehdejší hodináři samozřejmě netušili.

Je-li sluneční ukazatel v horní modře obarvené oblasti astronomického ciferníku, znamená to, že je den. Přechází-li zlatý oblouk označený ORTVS, Slunce vychází. Podobně oblouk označený OCCASVS odpovídá západu Slunce. Oba oblouky jsou podle věty 1 části jedné kružnice (tzv. *obzorníku*), protože idealizovaný pražský horizont je na nebeské sféře hlavní kružnicí.<sup>10)</sup> Červenohnědá oblast označená AVRORA odpovídá svítání a CREPVSCVLVM stmívání (soumraku). Černě vybarvená oblast v dolní části ciferníku znázorňuje astronomickou noc, kdy se Slunce nachází alespoň  $18^\circ$  pod horizontem. Podle Ptolemaiovy věty 1 je hranice této oblasti opět kružnice.

**Poznámka 1.** Velikost poloměru zvířetníku orloje (tj. prstence ekliptiky) lze jednoduše vypočítat. Počátek souřadnic v rovině meridiánového řezu *JRS* umístíme do bodu  $J = (0, 0)$  (viz obr. 2). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $S = (0, 2)$ , tj. kulová plocha pro stereografickou projekci má poloměr 1. Podle [13, s. 135] se bod  $R = (x, z)$  na kulové ploše při stereografické projekci zobrazí na bod

$$R' = \left( \frac{2x}{2-z}, 0 \right).$$

Pro  $R = (\cos \alpha, 1 + \sin \alpha)$  a  $K = (-\cos \alpha, 1 - \sin \alpha)$ , kde  $\alpha = 23.45^\circ$ , je tedy poloměr zvířetníku (viz obr. 2)

$$\frac{1}{2}|R' - K'| = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}.$$

Podobně můžeme zjistit, že poloměr nebeského rovníku na astronomickém ciferníku je roven 2 (ve skutečnosti cca 80 cm) a že poloměr obzorníku činí  $2/\cos 40^\circ$ . Protože

<sup>8)</sup> Terminologie není jednotná.

<sup>9)</sup> Hvězdný den začíná okamžikem, kdy jarní bod prochází místním poledníkem (vrcholí).

<sup>10)</sup> V geocentrickém modelu je pražský horizont nehybný, zatímco ekliptika se se svými souhvězdími otáčí.

Praha je na 50. rovnoběžce, má příslušná kružnice pražského horizontu<sup>11)</sup> sklon  $\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ . Poloměr černého kruhu označujícího astronomickou noc je

$$r = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{1 - \sin(\alpha - \beta)} + \frac{\cos(\alpha + \beta)}{1 + \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{pro } \alpha = 40^\circ \text{ a } \beta = 18^\circ.$$

**Poznámka 2.** Při rekonstrukci astronomického ciferníku orloje kolem roku 1865 (srov. [19]) restaurátoři vedeni prof. J. G. Böhmem omylem vyrobili prstenec ekliptiky stejně velký jako nebeský rovník a ekliptika se přitom nedotýkala žádného z obratníků. Na sféře reprezentující hvězdnou oblohu má sice ekliptika i nebeský rovník stejný průměr  $|KR| = |MN|$ , viz obr. 2, ale pro stereografické průměty platí  $|K'R'| > |M'N'|$ , jak víme z poznámky 1. Až po zásahu matematika Františka Josefa Studničky a astronoma Karla Hornsteina byla k prstenci ekliptiky přinýtována větší zlatá obruč<sup>12)</sup> tak, že každé znamení zvěrokruhu je rozděleno na 6 dílků po pěti stupních, a to umožňuje přibližně stanovit i datum. I když se takto zvětšená ekliptika již začala dotýkat obou obratníků, poloha slunečního a měsíčního ukazatele dodnes zůstala na nesprávné kružnici (viz obr. 1). Přitom by stačilo prodloužit ojnice slunečního a měsíčního ukazatele jen o 7 cm. Ochránci památek to ale nedoporučují. Navíc lze lépe odečítat planetní hodiny, protože sluneční ukazatel nezakrývá ekliptiku.

Dolní ciferník orloje obsahující kopie 12 velkých a 12 malých kruhových Mánesových obrazů (tzv. lunet) představuje kalendář [15]. Otáčí se velice pomalu – jedna otočka trvá celý rok. Originál kalendářní desky je uložen v Městském muzeu v Praze. Kopii umístěnou na orloji v dnešní době zhotovil Bohumír Číla a předchází kopii, která byla zničena na konci 2. světové války, vytvořil Emanuel K. Liška (1852–1903). Pozlacená střelka v horní části ciferníku ukazuje příslušný den v roce, informuje o svátcích, ukazuje na slabiku českého cisiojánu aj. (viz [7, s.58]). Ukazuje také na znamení zvěrokruhu, ve kterém se právě Slunce nachází.

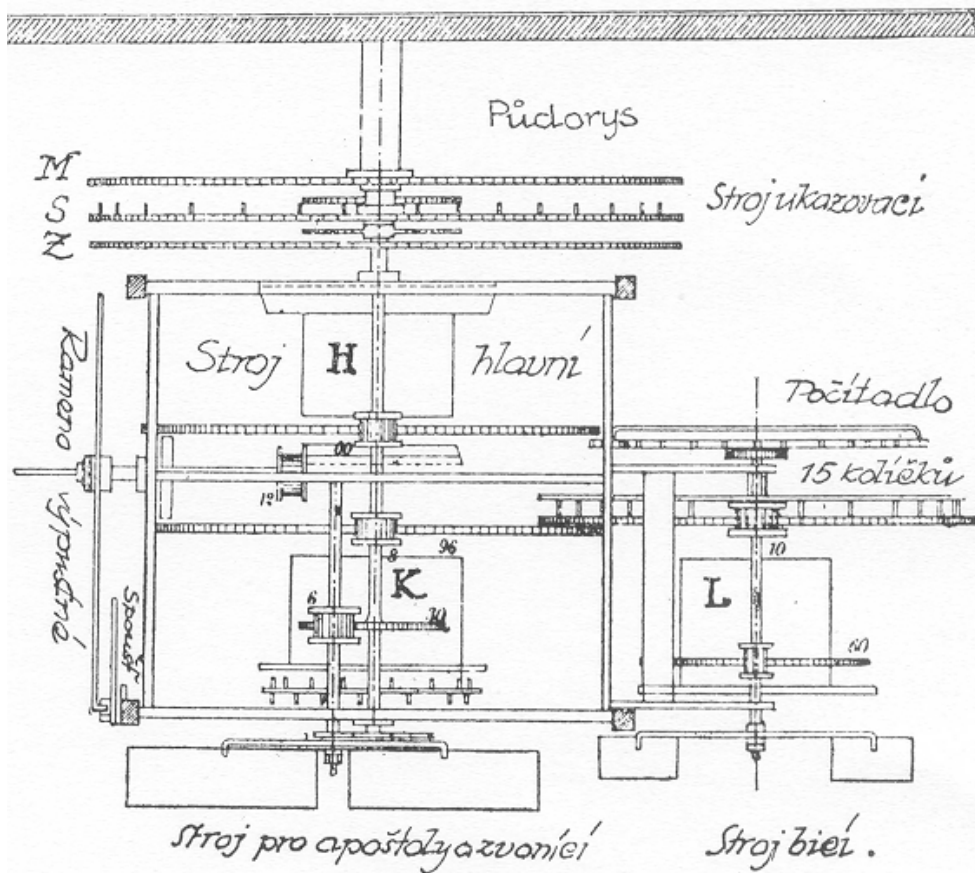
### 3. Ukazovací stroj orloje

Stroj orloje je umístěn v prvním a z větší části ve druhém patře radniční věže. Hlavní (= jící) stroj pohání a reguluje ukazovací stroj (viz obr. 3), bicí stroj, opravný (= diferenční) stroj sloužící ke zpřesnění pohybu měsíčního ukazatele, apoštolský (= zvonící) stroj a kalendářní stroj otáčející dolní kalendářní deskou v 1. patře. Podrobný popis jednotlivých částí je v [23].

Ukazovací stroj obsahuje 3 stejně velká sousedá ozubená kola o průměru 117 cm z počátku 15. století s ručně vypilovanými zuby (viz obr. 3 a 4). Země se za rok (tj. přibližně za 365 dní) otočí kolem své osy zhruba 366krát. Této skutečnosti jsou

<sup>11)</sup> V [17, s. 55] je nesprávně interpretován pražský horizont. V příslušném nákresu Praha leží na nebeské sféře (nikoli uprostřed ní) a poloměr obzorníku je roven  $\cotg(\alpha/2) \doteq 2.75$  pro  $\alpha = 40^\circ$ . To je sice shodou okolností hodnota blízká  $2/\cos 40^\circ \doteq 2.61$ , ale pro  $\alpha \neq 41.221^\circ$  se hodnoty  $\cotg(\alpha/2)$  obecně liší od správného poloměru  $2/\cos \alpha$ .

<sup>12)</sup> Tato zlatá obruč je světovou raritou, kterou žádný jiný orloj nemá.



Obr. 3. Rozmístění jednotlivých strojů orloje podle [23, s. 63]. Ozubená kola otáčející zvěrokruhem, slunečním a měsíčním ukazatelem jsou postupně označena písmeny Z, S a M. Závěrkové ozubené kolo s pomocným kolečkem bicího stroje jsou na obrázku vpravo uprostřed.

prizpůsobeny i počty zubů na prvních dvou kolech. První kolo má 365 zubů a otočí prstencem ekliptiky přibližně jednou za hvězdný den (tj. za 23 hodin 56 minut a 4 sekundy) a 366krát za rok. Druhé kolo, které má 366 zubů, otočí sluneční ukazatel jednou za střední sluneční den (tj. za 24 hodin) a 365krát za rok. Sluneční ukazatel se tedy posune vzhledem ke zvěrokruhu o jeden zub denně.

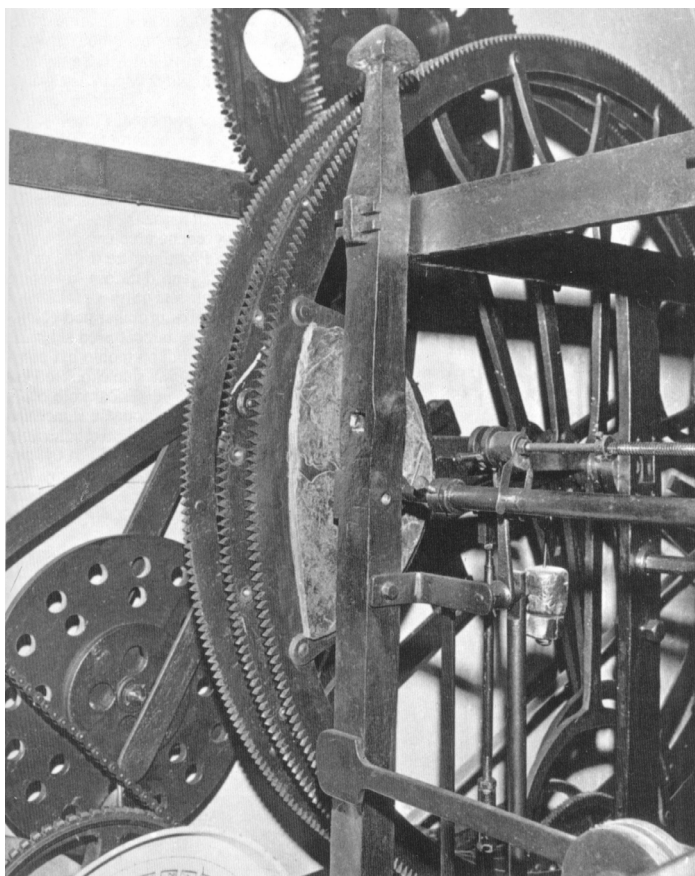
Třetí kolo má 379 zubů a rotuje v souladu se středním zdánlivým pohybem Měsíce, o čemž ještě pojednáme níže. Tvůrci orloje patrně nepostupovali tak, jak píše Z. Horstký (viz [7, s. 64]): *Při stanovování počtu zubů 379 zřejmě počtáři postupovali zkusmo.* Domníváme se, že tento počet byl spíše odvozen z dokonalé znalosti pohybu Měsíce a Slunce po nebeské sféře. Záhadou však zůstává, jak mohli tehdejší konstruktéři orloje vypilovat po obvodu velkých oběžných kol tak přesně 365, 366 a 379 zubů (s přesností na desetiny milimetru).

**Věta 3 (Gaussova).** *Nechť  $p > 2$  je prvočíslo. Pak lze pomocí kružítka a pravítka sestavit pravidelný  $p$ -úhelník právě tehdy, když  $p$  je tvaru  $p = 2^n + 1$ .*



Tato věta je speciálním případem obecnější věty dokázané např. v [9, Chapt. 16]. Podle Gaussovy věty tedy nelze eukleidovsky rozdělit kružnici na 379 stejně dlouhých dílů, protože prvočíslo 379 není tvaru  $2^n + 1$ . Pomocí kružítká a pravítka nelze sestrojít ani pravidelný mnohoúhelník s 365 ani 366 vrcholy (viz [9]).

Kdyby si tehdejší konstruktéři vypočítali vzdálenost dvou zubů a postupně ji nanášeli na obvod kola s přesností na desetinu milimetru, pak by po 379 krocích chyba mohla vzrůst na cca 3.8 cm, což by znemožňovalo tento postup použít. Jedna z možností, jak mohlo být rovnoměrně rozmístěno po obvodu měsíčního kola  $n = 379$  značek, je vzít pevný provázek (nebo drát) stejně dlouhý jako obvod kola. Natažený provázek lze přímým výpočtem vzdáleností jednotlivých zubů či pomocí podobnosti trojúhelníků rozdělit značkami na  $n$  stejně dlouhých dílků. V tomto případě se chyba neakumuluje. Pak stačilo provázek obtočit kolem kola a značky na kolo přenést (podrobnosti popisujeme v [14]). Je známo, že zuby se nejprve ručně vysekalý, a pak se postupně opilovaly na požadovanou vzdálenost.



Obr. 4. Ukazovací stroj orloje obsahuje tři ozubená souosá kola otáčející prstencem ekliptiky, slunečním a měsíčním ukazatelem. Na prvním kole, které otáčí excentricky umístěnou ekliptikou, je vlevo připevněna olověná protiváha.

Protože oběh Měsíce kolem Země není nikterak synchronizován s rotací Země kolem vlastní osy ani s dobou oběhu Země kolem Slunce, zmíněné počty zubů 365, 366 a 379 umožňují jen přibližně znázornit skutečné polohy těchto těles. Hlavní hodinový stroj od svého počátku otáčel prodlouženou hřídelí, na které byla pevně umístěna tři kolečka o 24 zubech, jež zabírala do tří velkých kol. Tím se dosáhlo toho, že se zvěrokruh, sluneční a měsíční ukazatel otáčejí kolem středu ciferníku různými úhlovými rychlostmi.

Měsíc dorazí do téže polohy se Sluncem jednou za 29.53 dne, což je tzv. *synodický měsíc* (od novu k novu). Tomu jsou přizpůsobeny počty zubů na třetím kole. Měsíční ukazatel se opozdí za slunečním o  $379 - 366 = 13$  zubů za den. To odpovídá úhlu  $(1 - \frac{366}{379}) \cdot 360^\circ = 12.348^\circ$ , což poměrně dobře vystihuje skutečnost, že se Měsíc každý den posune podél ekliptiky od Slunce směrem na východ v průměru o  $12.191^\circ = 360^\circ/29.53$ . Snadno se můžete přesvědčit, že 378 nebo 380 zubů měsíčního kola by nevystihovalo tak dobře skutečný posun Měsíce. V roce 1865 začalo být měsíční kolo poháněno tzv. diferenčním (opravovacím) strojem, který pohyb měsíčního ukazatele ještě více zpřesnil. Přesto se poloha tohoto ukazatele musí někdy mírně ručně upravit, protože poměr siderické doby oběhu Měsíce k době oběhu Země kolem Slunce nelze vyjádřit pomocí podílu dvou „malých“ přirozených čísel.

Kolo pohánějící ekliptiku má plnou osu. Sluneční kolo má dutou osu, která obklopuje osu prvního kola. Třetí měsíční kolo má rovněž dutou osu obklopující osy prvních dvou kol.

Měsíční ukazatel je dutá koule (viz obr. 1), jejíž jedna polovina je natřena černě. Uvnitř je skryt důmyslný mechanismus s ozubeným kolem a oloveným závažíčkem, který otáčí Měsícem a ukazuje tak jeho fáze (viz [23, s. 84]). Energie potřebná k jeho otáčení se získává z pohybu prstence ekliptiky.

#### 4. Bicí stroj orloje a pražská hodinová posloupnost

Genialitu tehdejších hodinářů můžeme demonstrovat na konstrukci zařízení pro přesnou stabilizaci úderů zvonu. Bicí stroj obsahuje velké oběžné kolo (tzv. závěrkové či zavěrací kolo – viz [18, s. 21], [23, s. 80]) s 24 zářezy na vnějším obvodu, jejichž vzdálenosti lineárně narůstají (viz obr. 5 a 6). To umožňuje periodické opakování 1–24 úderů zvonu během každého dne. Počet úderů zvonu odpovídá SEČ, tj. v letním čase orloj odbíjí vždy o hodinu méně. Součástí bicího stroje je i pomocné kolečko, jehož obvod je rozdělen 6 zářezy na segmenty o délkách oblouku 1, 2, 3, 4, 3, 2 (viz obr. 5 a 6). Tyto délky se periodicky opakují po každé otočce a jejich součet je

$$s = 15.$$

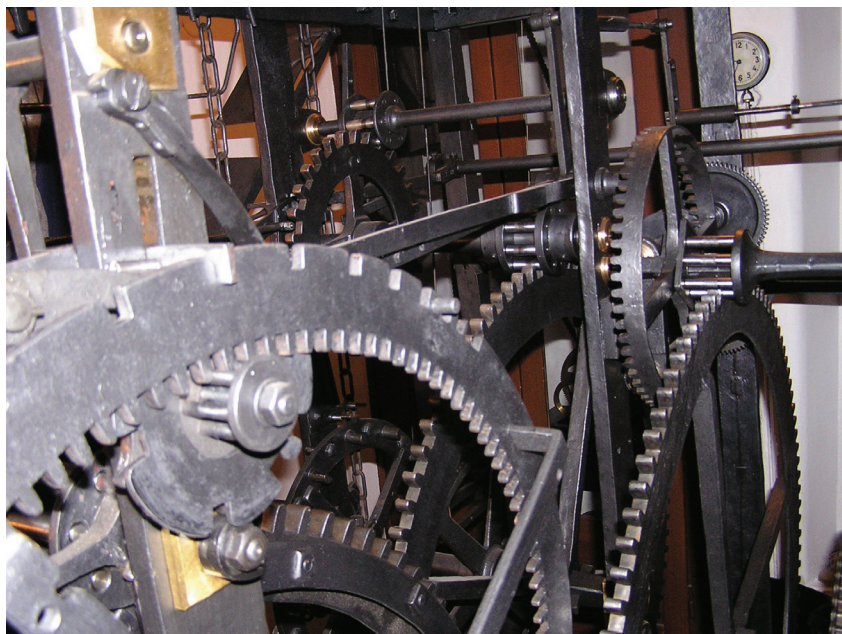
Na začátku každé hodiny se zvedne západka, obě kola se začnou otáčet a zvon odbíjí příslušný počet hodin. Kola se zastaví, jakmile západka zapadne současně do zářezů na obou kolech. Každý den udeří zvon celkem

$$1 + 2 + \dots + 24 = 300\text{krát},$$

a protože číslo 300 je dělitelné  $s = 15$ , bude pomocné kolečko na počátku každého dne vždy ve stejné poloze.

Závěrkové kolo má 120 vnitřních zubů, které zapadají do cévového kola se 6 vodorovnými tyčkami, jež obklopují střed pomocného kolečka (viz obr. 5 a 6). Protože se závěrkové kolo otočí jednou denně, pomocné kolečko se otočí za tu dobu 20krát. Obě kola se otáčejí pouze během odbíjení. Přitom je ale obvodová rychlost pomocného kolečka přibližně 4krát větší, protože jeho obvod je 5krát menší než obvod závěrkového kola. To umožňuje dostatečně přesnou stabilizaci počtu úderů zvonu zejména při opotřebení zářezů závěrkového kola. Bez pomocného kolečka by totiž mohl zvon udeřit např. jen 11krát místo 12krát, pokud by segment označený 12 na obr. 6 měl již příliš zaoblené konce.

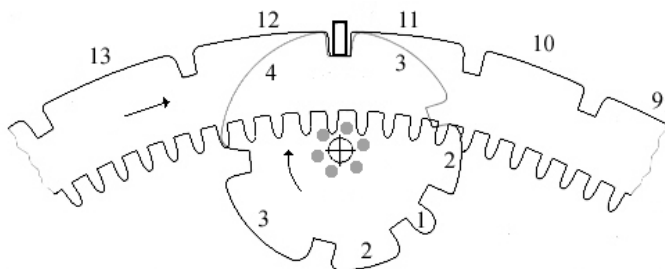
Pro jeden úder zvonu hodinu po půlnoci bylo kdysi pomocné kolečko dokonce nezbytné, neboť na závěrkovém kole schází příslušný segment délky 1. Ten by byl totiž tak tenký, že by se brzy zlomil (srov. [7, s. 78]). V současnosti se ale odbíjení zvonu na noc vypíná.



Obr. 5. Detail bicího stroje pražského orloje ukazující umístění pomocného kolečka. Západka je v poloze mezi segmenty odpovídajícími 8. a 9. hodině ranní (SEČ). Hodiny vpravo nahoře ukazují 9:35 letního času.

Pražský orloj je pravděpodobně nejstarší a stále fungující hodinový stroj, který obsahuje takové důmyslné zařízení pro přesnou stabilizaci počtu úderů zvonu (viz [7, s. 76]).

Když se pomocné kolečko otáčí, vytváří pomocí délek segmentů mezi jednotlivými zářezy periodickou posloupnost, jejíž částečné součty odpovídají počtu úderů zvonu



Obr. 6. Počet úderů zvonu je označen čísly  $\dots, 9, 10, 11, 12, 13, \dots$  po vnějším obvodu velkého závěrkového kola. Za ním je umístěno pomocné kolečko, jehož obvod je zářezy rozdělen na segmenty o délkách oblouku 1, 2, 3, 4, 3, 2. Západka je znázorněna malým obdélníčkem nahore uprostřed.

v každou celou hodinu,

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & \underbrace{3 & 2}_{5} & \underbrace{1 & 2 & 3}_{6} & \underbrace{4 & 3}_{7} & & (1) \\
 \\
 \underbrace{2 & 1 & 2 & 3}_{8} & \underbrace{4 & 3 & 2}_{9} & \underbrace{1 & 2 & 3 & 4}_{10} & \underbrace{3 & 2 & 1 & 2 & 3}_{11} & \underbrace{4 & 3 & 2 & 1 & 2}_{12} \\
 \\
 \underbrace{3 & 4 & 3 & 2 & 1}_{13} & \underbrace{2 & 3 & 4 & 3 & 2}_{14} & \underbrace{1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2}_{15} & \dots
 \end{array}$$

V další kapitole ukážeme (viz věta 4), že bychom takto mohli pokračovat až do nekonečna. Všechny periodické posloupnosti ale takovou pěknou součtovou vlastnost nemají. Například je patrné, že nelze použít periodu 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, protože pro 6 úderů zvonu je  $6 < 4 + 3$ . Rovněž perioda 1, 2, 3, 2 se k tomuto účelu nehodí, neboť pro 4 úderů máme  $2 + 1 < 4 < 2 + 1 + 2$ .

Sloane v [24] a též ve své encyklopedii celočíselných posloupností [25] nazývá periodickou posloupnost

$$1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, \dots$$

*pražská hodinová posloupnost* díky zajímavé součtové vlastnosti obsažené v (1).

V následujících kapitolách uvedeme několik matematických vět týkajících se zobecnění této posloupnosti. Budeme se vlastně zajímat o to, jak navrhnout nepravidelné ozubení pomocného kolečka i pro obecně jiné hodnoty součtu  $s$ .

## 5. Trojúhelníková čísla a šindelovské posloupnosti

V článku [13] jsme odvodili překvapivou souvislost mezi *trojúhelníkovými čísly*

$$T_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

a pražskou hodinovou posloupností, která byla použita při konstrukci bicího stroje pražského orloje. V této kapitole se budeme zabývat dalšími periodickými posloupnostmi, které mají podobnou vlastnost jako posloupnost 1, 2, 3, 4, 3, 2, ... v (1), tj. které by mohly být použity při konstrukci podobného pomocného kolečka jako je znázorněno na obr. 5.

Posloupnost  $(a_i)_{i=1}^{\infty}$  se nazývá *periodická*, jestliže existuje  $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  tak, že

$$\forall i \in \mathbb{N} : a_{i+p} = a_i. \quad (3)$$

Konečná posloupnost  $a_1, \dots, a_p$  se nazývá *perioda* a  $p$  *délka periody*. Nejmenší  $p$  splňující (3) se nazývá *minimální délka periody* a jemu odpovídající posloupnost  $a_1, \dots, a_p$  *minimální perioda*.

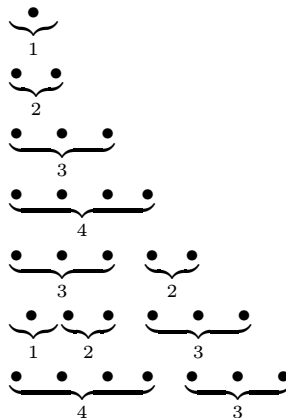
Periodickou posloupnost  $(a_i) \subset \mathbb{N}$  nazveme *šindelovskou*, jestliže pro každé  $k \in \mathbb{N}$  existuje  $n \in \mathbb{N}$  tak, že

$$T_k = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (4)$$

Trojúhelníkové číslo  $T_k$  na levé straně je rovno součtu  $1 + \dots + k$  hodin na velkém závěrkovém kole, zatímco součet na pravé straně odpovídá celkovému pootočení pomocného kolečka (viz obr. 7). Přitom pro  $k$ -tou hodinu platí

$$k = T_k - T_{k-1} = \sum_{i=m+1}^n a_i, \quad (5)$$

kde  $T_{k-1} = \sum_{i=1}^m a_i$ . Protože  $a_i > 0$ , je číslo  $n$  v (4) závislé na  $k$  určeno jednoznačně. Z (2) a (4) je také patrné, že  $a_1 = 1$ , je-li  $(a_i)$  šindelovská posloupnost.



Obr. 7. Schematické znázornění trojúhelníkového čísla  $T_7 = 28$ . Černé puntíky v  $k$ -tém řádku znázorňují počet úderů zvonu v  $k$ -té hodině (viz (5)). Celkový počet úderů zvonu od jedné hodiny po půlnoci do  $k$ -té hodiny je  $T_k$ . Čísla jsou označeny délky segmentů mezi zářezy na pomocném kolečku.

Následující věta ukazuje, že podmínku v definici šindelovské posloupnosti lze změnit mnohem jednodušší podmínkou, jež obsahuje pouze konečný počet čísel  $k$ . To nám umožňuje provést jen konečný počet aritmetických operací, abychom zjistili, zda zvolená perioda  $a_1, \dots, a_p$  dává šindelovskou posloupnost. Součet prvků periody budeme nadále označovat

$$s = \sum_{i=1}^p a_i. \quad (6)$$

Následující dvě věty dokazujeme v [10].

**Věta 4.** *Periodická posloupnost  $(a_i)$  je pro liché  $s$  šindelovská, jestliže pro každé přirozené  $k < (s + 1)/2$  existuje  $n \in \mathbb{N}$  tak, že platí (4).*

**Příklady.** Význam věty 4 můžeme demonstrovat na pražské hodinové posloupnosti (1) pro  $s = 15$ . Stačí totiž ověřit vztah (4) pouze pro  $k \leq \frac{1}{2}(s-1) = 7$ , tedy jen první řádek v (1). Platnost vztahu (4) pro všechna přirozená čísla  $k > 7$  na dalších řádcích (1) pak již vyplývá z věty 4. Tak se nám podařilo odkrýt jedno z mnoha tajemství pražského orloje.

Podobně můžeme ověřit předpoklady věty 4 i pro další periody:

- 1, 2 pro  $p = 2$  a  $s = 3$ ,
- 1, 2, 2 pro  $p = 3$  a  $s = 5$ ,
- 1, 2, 3, 1 pro  $p = 4$  a  $s = 7$ ,
- 1, 2, 3, 3 pro  $p = 4$  a  $s = 9$ ,
- 1, 2, 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4 pro  $p = 11$  a  $s = 25$ .

Existují šindelovské posloupnosti i pro  $s$  sudá. Jednu takovou můžeme zkonstruovat např. z periody 1, 2, 1, 1, 1:

$$1\ 2\ \underbrace{1\ 1\ 1}_3\ \underbrace{1\ 2\ 1}_4\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 2}_5\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 2}_6\ \dots$$

**Věta 5.** *Periodická posloupnost  $(a_i)$  je pro sudé  $s$  šindelovská, jestliže pro každé přirozené  $k < s$  existuje  $n \in \mathbb{N}$  tak, že platí (4).*

Následující věta udává, že odhady ve větách 4 a 5 jsou nejlepší možné.

**Věta 6.** *Horní odhady  $k < (s + 1)/2$  a  $k < s$  ve větách 4 a 5 nelze zlepšit.*

Důkaz je uveden v [11].

## 6. Nutná a postačující podmínka pro existenci šindelovské posloupnosti

Nechť  $n \geq 2$  a  $a$  jsou pevně daná celá čísla. Připomeňme nejprve pojem kvadratického zbytku. Jestliže kvadratická kongruence

$$x^2 \equiv a \pmod{n}$$

má řešení  $x$ , pak  $a$  se nazývá *kvadratický zbytek modulo  $n$* .

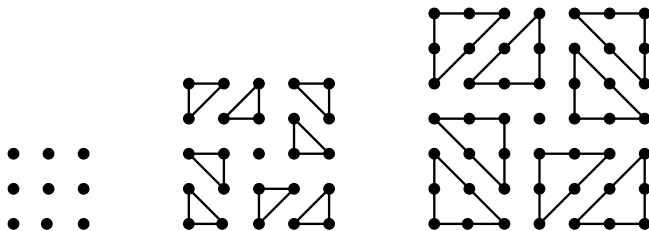
**Věta 7.** Periodická posloupnost  $(a_i)$  je šindelovská právě tehdy, když pro každé  $n \in \{1, \dots, p\}$  a  $j \in \{1, 2, \dots, a_n - 1\}$ , pro něž  $a_n \geq 2$ , číslo

$$w = 8 \left( \sum_{i=1}^n a_i - j \right) + 1$$

není kvadratickým zbytkem modulo  $s$ .

Důkaz je uveden v [13]. Jako vedlejší výsledek důkazu věty 7 dostáváme známé tvrzení (viz [3, s. 15], [11] a obr. 8):

**Důsledek.** Přirozené číslo  $r$  je trojúhelníkové právě tehdy, když je  $8r + 1$  je čtvercové.



Obr. 8. Již staří pythagorejci věděli, že když  $r$  je trojúhelníkové číslo, pak  $8r + 1$  je čtverec. Tento výsledek byl zaznamenán řeckým historikem Plútarchem kolem roku 100, viz [28, s. 4].

**Poznámka 3.** Uvažujme posloupnost  $(a_i)$  s periodou  $1, 2, 1, 1, \dots, 1$  a povšimněme si, že

$$w = 8 \left( \sum_{i=1}^2 a_i - 1 \right) + 1 = 17.$$

Z věty 7 a zákona kvadratické reciprocit (viz [9]) je patrné, že pokud  $s$  je liché prvočíslo a

$$s \equiv 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16 \pmod{17}, \quad (7)$$

pak  $w$  je také kvadratický zbytek modulo  $s$ , a tedy  $(a_i)$  není šindelovská posloupnost. Protože ale  $s = 15$  není prvočíslo, je posloupnost s periodou  $1, 2, 1, 1, \dots, 1$  šindelovská. Periody dalších posloupností  $(a_i)$  lze vyšetřovat obdobně.

## 7. Konstrukce primitivní šindelovské posloupnosti

Nejprve si zavedeme pojem složené a primitivní šindelovské posloupnosti. Pak uvedeme větu, která nám bude zaručovat existenci jediné primitivní šindelovské posloupnosti pro dané  $s$  (viz (6)).

Šindelovská posloupnost  $(a'_i)$  s minimální délkou periody  $p + 1$  se nazývá *složená*, jestliže existuje šindelovská posloupnost  $(a_i)$  a  $m \in \mathbb{N}$  tak, že

$$\begin{aligned} a_i &= a'_i, & i &= 1, \dots, m - 1, \\ a_m &= a'_m + a'_{m+1}, \\ a_i &= a'_{i+1}, & i &= m + 1, \dots, p. \end{aligned}$$

**Příklad.** Perioda 1, 2, 3, 2, 2, 3, 2 odvozená z periody 1, 2, 3, 4, 3, 2 posloupnosti (1) dává složenou šindelovskou posloupnost. Jinými slovy, pomocné kolečko (s jedním zářezem navíc) by fungovalo i pro tuto složenou šindelovskou posloupnost.

Šindelovská posloupnost  $(a_i)$  se nazývá *primitivní*, jestliže není složená.

**Příklad.** Snadno lze ověřit, že všechny posloupnosti z příkladů uvedených za větou 4 jsou primitivní.

**Věta 8.** Pro každé  $s \in \mathbb{N}$  existuje jediná primitivní šindelovská posloupnost  $(a_i)$  tak, že platí (6) pro nějakou (ne nutně minimální) délku periody  $p$ .

Důkaz je konstruktivní (viz [11]), tj. obsahuje explicitní algoritmus pro nalezení primitivní šindelovské posloupnosti pro dané  $s$ .

Posloupnost 1, 1, 1, ... se nazývá *triviální* šindelovská posloupnost.

Důkazy posledních dvou vět jsou uvedeny v [13].

**Věta 9.** Primitivní šindelovská posloupnost  $(a_i)$  je triviální právě tehdy, když  $s = 2^j$  pro nějaké celé  $j \geq 0$ .

Poslední věta nám zaručuje, že pro libovolně velké přirozené číslo  $k$  lze vždy najít šindelovskou posloupnost, která jej bude obsahovat.

**Věta 10.** Pro každé  $k \in \mathbb{N}$  existuje  $m \in \mathbb{N}$  a šindelovská posloupnost  $(a_i)$  taková, že  $a_m = k$ .

**Příklad.** Perioda 1, 2, 3, 4, 5, 3, 3, 7, 2, 3, 3, 9 s minimální délkou periody  $p = 12$  a  $s = 45$  dává primitivní šindelovskou posloupnost  $(a_i)$  s poměrně velkou hodnotou  $a_{12} = 9$  vzhledem k  $s$  (viz věta 8). Jinými slovy, dvanáctý segment na odpovídajícím pomocném kolečku by měl délku 9.

## 8. Závěrečné poznámky

V důkazu věty 8 je obsažen numerický algoritmus pro vytváření primitivních šindelovských posloupností. Následující tabulka udává periody těchto posloupností pro  $s = 1, \dots, 25$ . Pomocí počítače jsme prověřili, že žádná primitivní šindelovská posloupnost pro  $s \leq 1000$  a  $s \neq 15$  nemá takovou krásnou „palindromickou“ vlastnost jako pražská hodinová posloupnost (1), která byla použita při konstrukci bicího stroje pražského orloje. Tuto posloupnost generuje při otáčení pomocné kolečko znázorněné na obr. 5 a 6.



$s$       **Periody primitivních šindelovských posloupností**

---

1	1
2	1 1
3	1 2
4	1 1 1 1
5	1 2 2
6	1 2 1 2
7	1 2 3 1
8	1 1 1 1 1 1 1 1
9	1 2 3 3
10	1 2 2 1 2 2
11	1 2 1 2 4 1
12	1 2 1 2 1 2 1 2
13	1 1 1 3 2 2 3
14	1 2 3 1 1 2 3 1
15	<b>1 2 3 4 3 2</b>
16	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
17	1 1 1 1 2 4 1 4 2
18	1 2 3 3 1 2 3 3
19	1 1 1 3 1 2 1 5 2 2
20	1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2
21	1 2 3 1 3 3 2 6
22	1 2 1 2 4 1 1 2 1 2 4 1
23	1 2 2 1 3 1 3 2 5 1 1 1
24	1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
25	1 2 2 1 4 1 4 1 4 1 4

---

Z tabulky dále vidíme, že triviální primitivní šindelovské posloupnosti odpovídají  $s = 2^j$  a nějaké celé  $j \geq 0$  (viz věta 9).

O struktuře šindelovských posloupností pro případ  $s = 13$  a  $s = 19$ , kdy  $a_2 = 1$ , se diskutuje a v poznámce ke vztahu (7). Pokud by zvon zvonil

$$1 + 2 + \dots + 12 = 78 = 6 \times 13$$

za každý půlden, pak by pomocné kolečko bylo nejspíše voleno tak, že  $s = 13$ , přičemž další možnosti jsou  $s \in \{2, 3, 6, 26, 39\}$ . Jejich příslušné primitivní šindelovské posloupnosti ale nejsou tak „pěkné“ jako je pražská hodinová posloupnost (1).

**Poděkování.** Autoři děkují paní Mgr. Heleně Holovské a Monice Kabelkové za cenné připomínky a Mgr. Ing. Jakubu Šolcovi, Ph.D., za tvůrčí pomoc s obrázky. Práce byla podpořena grantem IAA 100190803 GA AV ČR a výzkumným záměrem MSM 0021620839.

L i t e r a t u r a

- [1] BARTOŠ, F. M.: *Rektor Jan Šindel*. Věstník ČAVU, Praha, 1948, 27–34.

- [2] BEDRNÍČEK, P.: *Náměstí, rynky a náměstíčka historické Prahy*. Volvox globator, Praha 2007.
- [3] BURTON, D. M.: *Elementary number theory*. Fourth edition, McGraw-Hill, New York 1998.
- [4] ČENĚK, G., MEDEK, V.: *Deskriptívna geometria*. SVTL, Bratislava 1959.
- [5] ČERMÁK, M.: *Olomoucký orloj*. Memoria, Olomouc 2005.
- [6] HADRAVOVÁ, A., HADRAVA, P.: *Křišťan z Prachatic: Stavba a užití astrolábu*. Filosofia – nakl. Filosofického ústavu AV ČR, Praha 2001.
- [7] HORSKÝ, Z.: *Pražský orloj*. Panorama, Praha 1988.
- [8] HORSKÝ, Z., PROCHÁZKA, E.: *Pražský orloj*. Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky 9 (1964), 83–146.
- [9] KŘÍŽEK, M., LUCA, F., SOMER, L.: *17 lectures on Fermat numbers: From number theory to geometry*. CMS Books in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York 2001.
- [10] KŘÍŽEK, M., SOMER, L., ŠOLCOVÁ, A.: *Jaká matematika se ukrývá v pražském orloji?* Matematika-fyzika-informatika 16 (2006), 129–137.
- [11] KŘÍŽEK, M., SOMER, L., ŠOLCOVÁ, A.: *Kouzlo čísel: od velkých objevů k aplikacím*. Edice Galileo, sv. 39, Academia, Praha 2009.
- [12] KŘÍŽEK, M., ŠOLC, J., ŠOLCOVÁ, A.: *Pražský orloj a stereografická projekce*. Matematika-fyzika-informatika 17 (2007/2008), 129–139.
- [13] KŘÍŽEK, M., ŠOLCOVÁ, A., SOMER, L.: *Construction of Šindel sequences*. Comment. Math. Univ. Carolin. 48 (2007), 373–388.
- [14] KŘÍŽEK, M., ŠOLCOVÁ, A., SOMER, L.: *Ten theorems on the astronomical clock of Prague*. Proc. Internat. Conf. Presentation of Mathematics '07 (eds. J. Příhonská, K. Segeth, D. Andrejsová), Tech. Univ. Liberec, 2007, 53–62.
- [15] LORIŠ, J.: *Mánesův orloj*. Orbis, Praha 1952.
- [16] MACHÁČEK, S.: *Nález nové zprávy vzniku orloje na Starém Městě v Praze*. Čas. Společnosti přátel starožitností, orgán historické vlastivědy české 70 (1962), 159–161.
- [17] MALINA, J.: *Staroměstský orloj*. Eminent, Praha 2005.
- [18] POCHE, E., UREŠOVÁ, L.: *Hodiny a hodinky*. Panorama, Praha 1987.
- [19] PROCHÁZKA, E.: *Oprava staroměstského orloje*. Zprávy památkové péče, Praha 18 (1958), 45–50.
- [20] PROCHÁZKA, E.: *Obnovení chodu čtyřřadvacetníku na staroměstském orloji*. Jemná mechanika a optika 7 (1958), 205–208.
- [21] PROCHÁZKA, E.: *Profesor Kadeřávek a staroměstský orloj*. Sborník konf. Geometrie v technice a umění (ed. K. Drábek), JČSMF, Praha, 1985, 158–165.
- [22] ROSENFELD, B. A., SERGEEVA, N. D.: *Stereographic projection*. Mir Publishers, Moscow 1977.
- [23] ROSICKÝ, V.: *Staroměstský orloj v Praze*. Nakl. J. Otto, Praha 1923.
- [24] SLOANE, N. J. A.: *My favorite integer sequences*. arXiv:math.CO/0207175v1, 2002, 1–28.
- [25] SLOANE, N. J. A.: *The on-line encyclopedia of integer sequences*. 2007, A028355, A028356, viz <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [26] ŠÍMA, Z.: *Orloje — HI-TECH 14. století*. Čs. čas. pro fyziku 50 (2000), 435–447.
- [27] TÁBORSKÝ, J.: *Zpráva o orloji pražském*. Josef Teige, Praha 1570, 1901.
- [28] TATTERSALL, J. J.: *Elementary number theory in nine chapters*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 2005.
- [29] VETTER, Q.: *Šest století matematického a astronomického učení na universitě Karlově v Praze*. Věstník Královské české společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědecká XIV (1952), vyšlo v Praze r. 1953.
- [30] VETTER, Q.: *Dějiny matematických věd v českých zemích od založení univerzity v r. 1348 až do r. 1620*. Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky IV, Praha 1958, 82–84.

## Summary

### Ten Mathematical Theorems on the Prague Horologe

by Michal Křížek, Lawrence Somer, and Alena Šolcová

In the center of the Old Town in Prague, there is an astronomical clock (called „orloj“ in the Czech language and horologe in English) — an interesting rarity often visited by many tourists. We found that there is a surprising connection between this clock and triangular numbers (see [13]). In this article we take notice of special properties of these numbers that make the regulation of the bellworks more precise.

The mathematical model of the astronomical clock of Prague was invented by Jan Ondřejův, called *Šindel* (Joannes Andreae, cca 1375–1456), a professor at Prague University founded in 1348 by the Emperor Charles IV. In 1410, Šindel was the rector there. The astronomical clock was realized by the skilled clockmaker Mikuláš (Nicholas) from Kadaň around 1410.

The astronomical clock of Prague is placed inside an almost 60 m high tower of the Old Town City Hall. The clock has two large dial-plates on the south wall of the tower. Over the centuries the construction of the clock has been renovated several times, for example, by the clockmaker Jan from Růže (called Master Hanuš) around 1490. A memorial plaque devoted to the creators of the clock is on the left of the lower dial-plate.

The upper dial-plate (see Figure 1) of the astronomical clock is an astrolabe controlled by a clockwork mechanism. It represents a stereographic projection of the celestial sphere from its North Pole onto the tangent plane passing through the South Pole. The center of the dial-plate thus corresponds to the South Pole of the celestial sphere. The smallest interior circle around the South Pole illustrates the Tropic of Capricorn, whereas the exterior circle illustrates the Tropic of Cancer. The concentric circle between them corresponds to the equator of the celestial sphere (see Figures 1 and 2). An important property (known already to Ptolemy) of the stereographic projection is given by Theorem 1:

*Any circle on the sphere which does not pass through the North Pole<sup>13)</sup> is mapped onto a circle as well.*

Therefore, the ecliptic on the celestial sphere is projected on a circle, which is represented by the gilded ring with zodiac signs along the ecliptic. However, its center is not the South Pole, but the ring eccentrically rotates around this pole (see Figure 1). Theorem 2 says that the stereographic projection is a conformal mapping, i.e., it preserves angles.

The astronomical clock also shows the approximate position of the Sun on the ecliptic, the motion of the Moon and its phases, and the rising, culmination and setting of the Sun, the Moon and zodiac signs. The gilded solar hand indicates the Central-European time (CET) in the ring of Roman numerals. Note that the difference between CET and the original Prague mean local time is only 138 seconds. The clock-hand with a small gilded asterisk shows the sidereal time (see Figure 1). Twenty four golden Arabic numerals are used for the ancient Czech time measured from sunset. Twelve black Arabic numerals denote planetary hours of the Babylonian time measured from sunrise.

The black circular area at the bottom of the dial-plate corresponds to the astronomical night, when the Sun is lower than  $18^\circ$  below horizon. The reddish area stands for twilight (AVRORA in the morning and CREPUSCULVM in the evening). Sunrise is denoted by ORTVS and sunset by OCCASVS.

In the main clockwork, there are three large original concentric gears of the same diameter 116 cm (see Figures 3 and 4) which were originally driven on one axis by three pinions, each with 24 teeth. The first gear has 365 teeth and turns round the zodiac ring once per sidereal day (23 hr 56 min 4 s). The second gear, which has 366 teeth, drives the solar pointer and

---

<sup>13)</sup> Circles passing through the North Pole are mapped onto straight lines.

turns round once per mean solar day. Since the true orbit of the Earth is elliptic, the Sun does not move uniformly on the celestial sphere. Therefore, the position of the zodiac ring is slightly corrected manually several times per year. The third gear, which has 379 teeth (whose construction is discussed in Theorem 3), drives the Moon's hand and rotates according to the mean apparent motion of the Moon. The lunar pointer is also at present manually corrected due to the elliptic orbit of the Moon. The lunar pointer (see Figure 1) is a hollow sphere with a hidden mechanism inside that displays the phases of the Moon. It draws energy from the movement of the elliptical ring.

The lower dial-plate with 12 round pictures of Josef Mánes is a calendar. It turns round only once per year. The clock-hand on the top shows the particular day of the year. It also provides information about namedays and other items.

The ingenuity and skill of clockmakers of the 15th century can be demonstrated by the following example. The bellworks of the astronomical clock contains a large gear with 24 slots at increasing distances along its circumference (see Figures 5 and 6). This arrangement allows for a periodic repetition of 1–24 strokes of the bell each day. There is also a small auxiliary gear whose circumference is divided by 6 slots into segments of arc lengths 1, 2, 3, 4, 3, 2 (see Figures 5 and 6). These numbers constitute a period which repeats after each revolution and their sum is

$$s = 15.$$



Fig. 9. Apostles (the right ring) – in front St. Philip holds a cross and St. Paul a sword and book.

At the beginning of every hour a catch rises, both gears start to revolve, the 12 apostles appear and transit through two windows in sequence, and finally the bell chimes. The gears stop when the catch simultaneously falls back into the slots on both gears. The bell strikes

$$1 + 2 + \dots + 24 = 300$$

times every day. Since this number is divisible by  $s = 15$ , the small gear is always at the same position at the beginning of each day.

The large gear has 120 interior teeth which drop into a pin gear with 6 little horizontal bars that surround the center of the small gear (see Figures 5 and 6). The large gear revolves one time per day and therefore, the small gear revolves 20 times per day with approximately 4 times greater circumferential speed. Thus, the small gear makes the regulation of strokes sufficiently precise despite the wearing out of the slots on the large gear. Moreover, one stroke of the bell at one a.m. is due only to the movement of the small gear. In Figure 5 we observe that there is no tooth between the first and second slot of the large gear, since such a tooth would be extremely thin and thus, it could break. Therefore, in this case the catch is in contact only with the tooth of arc length 1 of the small gear, which makes the use of the small gear essential. A detail of the astronomical clock showing the location of the small gear is given in Figure 7. The catch is in the slot between the segments corresponding to 8 and 9 hours on the large gear.

The number of bell strokes is denoted in Figure 6 by the numbers  $\dots, 9, 10, 11, 12, 13, \dots$  along the large gear. The small gear placed behind it is divided by slots into segments of arc lengths 1, 2, 3, 4, 3, 2. The catch is indicated by a small rectangle on the top. When the small gear revolves it generates by means of its slots a periodic sequence whose particular sums correspond to the number of strokes of the bell at each hour (cf. (1)):

$$\begin{aligned} 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5 = 3 + 2, \quad 6 = 1 + 2 + 3, \quad 7 = 4 + 3, \quad 8 = 2 + 1 + 2 + 3, \\ 9 = 4 + 3 + 2, \quad 10 = 1 + 2 + 3 + 4, \quad 11 = 3 + 2 + 1 + 2 + 3, \\ 12 = 4 + 3 + 2 + 1 + 2, \quad 13 = 3 + 4 + 3 + 2 + 1, \\ 14 = 2 + 3 + 4 + 3 + 2, \quad 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2, \quad \dots \end{aligned}$$

In Theorems 4 and 5 we show that we could continue in this way until infinity. However, not all periodic sequences have such a nice summation property. For instance, we immediately find that the period 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2 could not be used for such a purpose, since  $6 < 4 + 3$ . Also the period 1, 2, 3, 2 could not be used, since  $2 + 1 < 4 < 2 + 1 + 2$ .

The astronomical clock of Prague is probably the oldest [7, p. 76] still functioning clock that contains such an apparatus illustrated in Figure 6. Due to the beautiful summation property discussed above, Sloane in [24] and [25, A028355, A028356] calls the sequence 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4,  $\dots$  the *clock sequence*.

Finally, we briefly mention how the *triangular numbers*

$$T_k = 1 + 2 + \dots + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

are related to the astronomical clock. We shall look for all periodic sequences that have a similar property as the clock sequence 1, 2, 3, 4, 3, 2, i.e., that could be used in the construction of the small gear.

The periodic sequence  $(a_i) \subset \mathbb{N}$  is said to be a *Šindel sequence* if for any positive integer  $k$  there exists a positive integer  $n$  such that

$$T_k = a_1 + \dots + a_n,$$

where the triangular number  $T_k$  on the left-hand side is equal to the sum  $1 + \dots + k$  of hours on the large gear, whereas the sum on the right-hand side expresses the corresponding rotation of the small gear. A schematic illustration of the triangular number  $T_7 = 28$  is given in Figure 7. The bullets in the  $k$ -th row indicate the number of strokes at the  $k$ -th hour. The numbers in Figure 7 denote lengths of segments on the small gear.

In theorem 7 we introduce a necessary and sufficient condition for a periodic sequence to be a Šindel sequence. Theorems 8–10 deal with various properties of Šindel sequences. In [14] we give an explicit algorithm for finding the so-called primitive Šindel sequences, which is uniquely determined for a given  $s = a_1 + \dots + a_p$ .