

Marek Brandner; Jaroslav Tuma

Modelování dopravního proudu – složitý příběh jednoho typu matematických modelů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 2, 106–118

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141995>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2011

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Modelování dopravního proudu – složitý příběh jednoho typu matematických modelů

Marek Brandner a Jaroslav Tuma, Plzeň

1. Úvod

V tomto článku se věnujeme vývoji makroskopických modelů dopravního proudu. Popíšeme stručně první používané modely (modely prvního řádu) a jejich nevýhody. Právě nevýhody jednoduchých modelů vedly k pokusům o jejich zdokonalení za využití poznatků z oblasti mechaniky tekutin. To vedlo k odvození modelů druhého řádu. Došlo však k překvapivému vývoji – modely druhého řádu měly opět zásadní nedostatky. Kritika šla dokonce tak daleko, že někteří odborníci chtěli makroskopické modely úplně zavrhnout. Pak se však objevily práce, ve kterých byly navrženy zajímavé modifikace modelů druhého řádu, které slabiny předchozích přístupů neměly. V těchto pracích bylo navíc ukázáno, že některé makroskopické modely zajímavým způsobem souvisí s modely mikroskopickými – mikroskopické modely lze ztotožnit s některými numerickými metodami pro makroskopické modely (jedná se o souvislost, kterou např. nelze najít v mechanice tekutin).

Poznamenejme, že matematické modelování dopravy se začalo výrazně rozvíjet po druhé světové válce (kromě rostoucí intenzity dopravy hrál jistě svoji roli i nástup výpočetní techniky). Byly vytvořeny různé typy modelů na různých škálách: od mikroskopické úrovně, přes úroveň mezoskopickou až po úroveň makroskopickou. V tomto textu se věnujeme pouze úzkému výběru modelů. Čtenáři, který má zájem o další údaje, doporučujeme např. publikaci [7].

2. Makroskopické modely prvního řádu

Základní makroskopické modely byly vyvinuty v padesátých letech dvacátého století. První model byl odvozen M. J. Lighthillem a G. B. Whithamem v roce 1955 a téměř současně P. I. Richardsem v roce 1956 (podrobnosti o vývoji modelů nalezne čtenář např. v [7]). Jedná se o model prvního řádu, tj. o model založený na jedné parciální diferenciální rovnici. Odvozen byl na základě jednoduché analogie mezi dopravou a

Doc. Ing. MAREK BRANDNER, Ph. D., a Bc. JAROSLAV TUMA, NTIS – Nové technologie pro informační společnost, katedra matematiky, FAV ZČU, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, e-mail: brandner@kma.zcu.cz, jat@students.zcu.cz

prouděním tekutin. Základní formulace vychází ze zákona zachování počtu vozidel a lze ji zapsat ve tvaru

$$\varrho_t + [v(\varrho, x, t)\varrho]_x = 0, \quad (1)$$

kde x představuje prostorovou proměnnou, t časovou proměnnou, $\varrho = \varrho(x, t)$ je hustota vozidel a $v = v(\varrho, x, t)$ je rychlost. Často definujeme tzv. tokovou funkci $q(\varrho, x, t) = v(\varrho, x, t)\varrho(x, t)$. Indexem t míníme parciální derivaci podle t , indexem x míníme derivaci podle x . Výše uvedenou rovnost lze nahradit vyjádřením v integrálním tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x, t) dx + v(\varrho, x_2, t)\varrho(x_2, t) - v(\varrho, x_1, t)\varrho(x_1, t) = 0. \quad (2)$$

Tento vztah lze interpretovat následujícím způsobem: časová změna počtu vozidel v úseku vozovky od x_1 do x_2 je dána rozdílem mezi počtem vozidel, které bodem x_1 do úseku vjedou, a počtem vozidel, které v bodě x_2 úsek opustí. Ještě uvedme, že hustota vozidel je udávána v jejich počtu na metr, integrál tedy skutečně reprezentuje počet vozidel v úseku $\langle x_1, x_2 \rangle$. Součin $v\varrho$ má rozměr počet vozidel za sekundu. Lze jej tedy chápat jako tok vozidel. Vztah (1) je lokální formulací integrální bilance (2). V dalším textu však budeme uvažovat hustotu jako bezrozměrnou (původní hustotu přenásobíme délkou vozidla ΔX). Budeme také předpokládat, že všechna vozidla mají stejnou délku a že platí $0 \leq \varrho \leq 1$.

K tomu, abychom získali kompletní matematický model, je třeba ještě dodat počáteční podmínku (počáteční rozložení hustoty vozidel v úseku, který budeme sledovat) a okrajovou podmínku (hustotu vozidel na jednom z okrajů úseku v každém bodě časového intervalu, ve kterém budeme úlohu řešit). Dále je potřeba zvolit konkrétní tvar funkce $v = v(\varrho, x, t)$. Nejjednodušší volbou je pochopitelně $v = \text{konst.}$ Tato volba znamená, že všechna vozidla se pohybují předepsanou konstantní rychlostí. Druhou jednoduchou volbou je $v = v(x)$. V tomto případě je rychlost také předepsána, je však na různých místech vozovky různá. Model s touto volbou rychlosti můžeme interpretovat i jinak: místo vozidel můžeme uvažovat např. balíky, které jsou dopravovány po pásových dopravnících umístěných za sebou, z nichž každý má obecně nastavenou jinou rychlost. Funkce $v = v(x)$ je pak po částech konstantní (v tomto případě musíme však uvažovat i zobecněná řešení). Klasickou volbou je

$$v = v_{\max}(1 - \varrho), \quad (3)$$

kde v_{\max} je daná maximální rychlost. Je zřejmé, že dosáhne-li hustota své maximální hodnoty, tj. $\varrho = 1$, je rychlost nulová. Blíží-li se hustota k nule, rychlost se blíží ke své maximální hodnotě.

Podívejme se nejdříve na nejjednodušší z případů, tj. případ s konstantní rychlostí. Uvažujme pro jednoduchost pouze počáteční úlohu

$$\begin{aligned} \varrho_t + v\varrho_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T_{\max}), \\ \varrho(x, 0) &= \varrho_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Vyhne se tedy ošetřování okrajových podmínek. Dosazením do rovností v (4) ověříme, že řešením je $\varrho(x, t) = \varrho_0(x - vt)$. Lze tedy říci, že řešení úlohy (4) získáme

posouváním počáteční podmínky rychlostí v . Nyní zvolme novou soustavu souřadnic (X, T) danou $X = x - vt$ a $T = t$. V této nové soustavě souřadnic má počáteční úloha (4) následující tvar

$$\begin{aligned} \varrho_T &= 0, & X \in \mathbb{R}, \quad T \in (0, T_{\max}), \\ \varrho(X, 0) &= \varrho_0(X), & X \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Pokud chceme připustit i nehladká řešení, lze parciální derivaci podle T nahradit požadavkem, že řešení je konstantní vzhledem k této proměnné. Uvažujme nyní, že počáteční hustota je pro všechna $x \in \mathbb{R}$ kladná. Potom lze zavést novou funkci definovanou $\tau = 1/\varrho$, kterou lze chápat jako měrný objem (délku). Počáteční úlohu (5) lze přeformulovat na

$$\begin{aligned} \tau_T &= 0, & X \in \mathbb{R}, \quad T \in (0, T_{\max}), \\ \tau(X, 0) &= \frac{1}{\varrho_0(X)}, & X \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Opusťme nyní na chvíli svět makroskopických modelů a popišme mikroskopický model odpovídající právě zkoumanému případu. Uvažujme, že se na zkoumaném úseku vyskytuje I vozidel. Všechna tato vozidla se pohybují rychlostí v . Studujme nejdříve polohu vozidel v časových okamžicích $t_n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$, $\Delta t > 0$. Poloha vozidla i , které bylo na počátku na pozici x_i^0 , je v čase t_{n+1} dána

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t v. \quad (7)$$

Obecněji pro libovolný čas platí vztah

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v. \quad (8)$$

Připomeňme, že všechna vozidla mají stejnou délku a že jsme ji označili ΔX . Diskrétní analogií funkce $\tau = \tau(x, t)$ je pak mikroskopický měrný objem (měrná délka)

$$\tau_i^n = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{\Delta X}, \quad \text{resp. } \tau_i(t) = \frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{\Delta X}.$$

Diskrétní analogií hustoty $\varrho = \varrho(x, t)$ je mikroskopická hustota

$$\varrho_i^n = \frac{\Delta X}{x_{i+1}^n - x_i^n}, \quad \text{resp. } \varrho_i(t) = \frac{\Delta X}{x_{i+1}(t) - x_i(t)}.$$

Vztah (7) lze přepsat na $x_{i+1}^{n+1} = x_{i+1}^n + \Delta t v$. Odečteme-li tuto rovnost od (7) a vydělíme-li ji ΔX , dostaneme vztah

$$\frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{\Delta X} = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{\Delta X}, \quad (9)$$

tj.

$$\tau_i^{n+1} = \tau_i^n, \quad (10)$$

což je aproximace úlohy (6). Podobnou úvahu lze pochopitelně učinit pro semidiskrétní případ (8). Lze ukázat, že jednoduchá numerická metoda reprezentovaná (10) konverguje pro $\Delta t \rightarrow 0$ a $\Delta X \rightarrow 0$ k řešení úlohy (4).¹⁾

Podobné úvahy lze učinit i pro obecnější počáteční úlohu

$$\begin{aligned} \varrho_t + [v(x)\varrho]_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T_{\max}), \\ \varrho(x, 0) &= \varrho_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (11)$$

Vynásobíme-li první rovnost v (11) funkcí $v(x)$ (předpokládáme, že $v(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$) a označíme-li tok $q = v(x)\varrho$, dostáváme úlohu

$$\begin{aligned} q_t + v(x)q_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T_{\max}), \\ q(x, 0) &= v(x)\varrho_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (12)$$

Lze ukázat, že na křivkách, pro které platí $\frac{dx}{dt} = v(x)$, je řešení právě uvedené úlohy konstantní. Zavedeme-li nové souřadnice (X, T) , pro které platí

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \tau, \quad \frac{\partial x}{\partial T} = v, \quad T = t,$$

dostaneme po příslušných úpravách úlohu (tyto úpravy jsou popsány v dodatku A)

$$\begin{aligned} \tau_T - v_X &= 0, & X \in \mathbb{R}, \quad T \in (0, T_{\max}), \\ \tau(X, 0) &= \frac{1}{\varrho_0(X)}, & X \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Nyní ukážeme, že zvolíme-li mikroskopické modely dané v plně diskretním případě vztahem

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t v(x_i^n) \quad (14)$$

a v semidiskretním případě vztahem

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v(x_i(t)), \quad (15)$$

lze najít velice jednoduchou souvislost mezi právě uvedeným mikroskopickým modelem a modelem (12). Stačí odečíst rovnost (14) s indexem i od rovnosti (14) s indexem $i + 1$, podělit ΔX a získáme

$$\frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{\Delta X} = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{\Delta X} + \frac{\Delta t}{\Delta X} [v(x_{i+1}^n) - v(x_i^n)], \quad (16)$$

a tedy

$$\tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta X} [v(x_{i+1}^n) - v(x_i^n)]. \quad (17)$$

¹⁾ Konvergence $\Delta X \rightarrow 0$ znamená, že se zkracuje délka vozidel. Jinak řečeno, $\Delta X \rightarrow 0$ lze interpretovat jako zvyšování počtu vozidel na sledovaném úseku. V odstavci 4 se k tomuto problému ještě vrátíme.

Rekurentní formulí (17) lze interpretovat jako základní krok Godunovovy metody²⁾ pro úlohu (13). Lze ukázat, že tato metoda konverguje pro $\Delta t \rightarrow 0$ a $\Delta X \rightarrow 0$ k zobecněnému řešení úlohy (13) i zobecněnému řešení úlohy (11). Jinak řečeno, stejně jako v předchozím případě, je diskrétní model vhodnou numerickou aproximací počáteční úlohy. Poznamenejme ovšem, že právě diskutovaný model má jednu slabinu: není zaručena platnost nerovnosti $0 \leq \varrho \leq 1$. Jak jsme uvedli, řešení rovnice (12) je konstantní na charakteristikách. Z toho plyne, že platí $0 \leq q \leq 1$.

Analogickou úvahu lze realizovat i pro případ (3), tj. pro případ

$$\begin{aligned} \varrho_t + [v_{\max}(1 - \varrho)]_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T_{\max}), \\ \varrho(x, 0) &= \varrho_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (18)$$

Zavedeme-li nové souřadnice (X, T) , pro které platí

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \tau, \quad \frac{\partial x}{\partial T} = v, \quad T = t,$$

dostaneme po příslušných úpravách úlohu (opět viz dodatek A)

$$\begin{aligned} \tau_T - [v_{\max}(1 - \frac{1}{\tau})]_X &= 0, & X \in \mathbb{R}, \quad T \in (0, T_{\max}), \\ \tau(X, 0) &= \frac{1}{\varrho_0(X)}, & X \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (19)$$

Odpovídající mikroskopické modely mají v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} x_i^{n+1} &= x_i^n + \Delta t v \left(\frac{1}{\tau_i^n} \right), \\ \tau_i^{n+1} &= \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta X} \left[v \left(\frac{1}{\tau_{i+1}^n} \right) - v \left(\frac{1}{\tau_i^n} \right) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

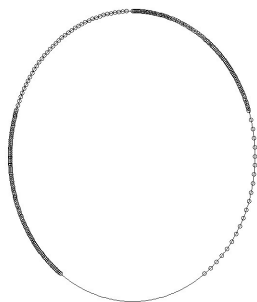
a

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= v(x_i(t)), \\ \frac{d\tau_i(t)}{dt} &= \frac{1}{\Delta X} \left[v \left(\frac{1}{\tau_{i+1}(t)} \right) - v \left(\frac{1}{\tau_i(t)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

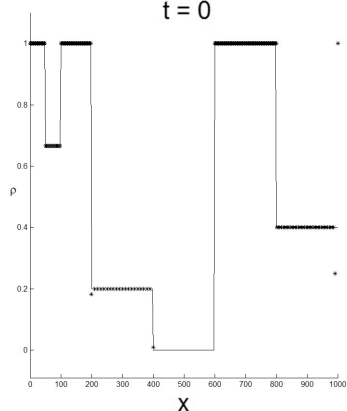
V případě tohoto modelu platí pro hustotu vozidel $0 \leq \varrho \leq 1$. Je třeba si ovšem uvědomit, že i pro hladkou počáteční podmínku může řešení obsahovat tzv. rázové vlny a vlny zředění. Rázovou vlnu lze nejlépe popsat na příkladu, ve kterém na jednom úseku vozovky vznikla dopravní zácpa. Je-li hustota vozidel na tomto úseku rovna jedné, rychlost vozidel je nulová. Představme si, že za tímto úsekem bezprostředně následuje úsek další, ve kterém je hustota vozidel $\tilde{\varrho} < 1$. Tato vozidla mají kladnou rychlost a přijíždějí na konec stojící kolony. Lze ukázat, že skok v hustotě (tj. rázová

²⁾ Godunovova metoda je speciálním případem metody konečných objemů. Metoda konečných objemů vychází z integrální bilance, výstupem jsou aproximace integrálních průměrů hledaných veličin. Protože je v rámci výpočtu třeba stanovovat i hodnoty hledaných funkcí v některých bodech, je třeba tyto funkce rekonstruovat z aproximací integrálních průměrů. Rekonstrukcemi jsou obvykle funkce, které jsou po částech polynomy. Součástí výpočtu jsou i řešení tzv. Riemannových problémů, tj. řešení počátečních úloh s nespojitou počáteční podmínkou.

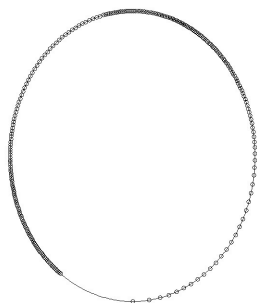
Pozice vozidel na okruhu



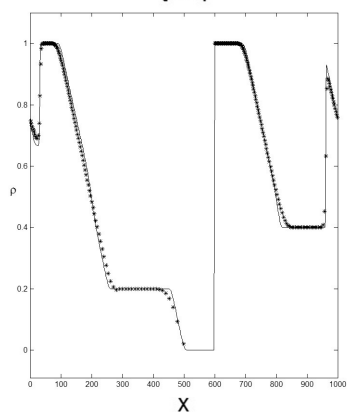
$t = 0$



Pozice vozidel na okruhu



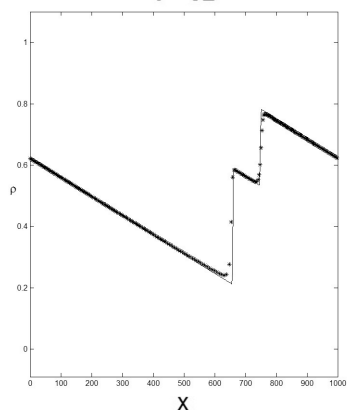
$t = 4$



Pozice vozidel na okruhu



$t = 32$



Obr. 1. Srovnání makroskopického modelu (18) a mikroskopického modelu (20). Počáteční úloha vycházející z makroskopického modelu je řešena konzervativní TVD metodou s vysokým rozlišením založenou na přepínání mezi schématem typu upwind bez entropie-fix procedury a Laxovým–Wendroffovým schématem (podrobnosti lze nalézt v [11]). Volba parametrů: $u_{\max} = 25$ m/s, $\Delta t = 0,05$, $\Delta x = \Delta X = 2$, délka okruhu je 1000 m, počet vozidel je 252.

vlna představující konec kolony) se pak šíří rychlostí $-v_{\max}\tilde{\varrho}$. Vlnu zředění lze nejlépe popsat na situaci, kdy před semaforem vznikne kolona o maximální hustotě. Předpokládejme, že za semaforem nejsou žádná vozidla (všechna již odjela). Jakmile se rozsvítí zelená, dají se vozidla do pohybu. První vozidlo dosáhne rychlosti v_{\max} . Čelo stojící kolony se bude posouvat s rychlostí $-v_{\max}$. Vznikne tak vlna zředění – nehladké (ale spojitě) řešení.

Daganzo v práci [3] mimo jiné shrnuje nedostatky modelů prvního řádu: nejsou příliš vhodné pro modelování situací s lehkou dopravou, nepopisují korektně pohyb vozidla v okolí rázové vlny a nejsou schopny postihnout některá řešení obsahující nestability. Poznamenejme, že ve všech doposud popsaných modelech nepředpokládáme, že vozidla se mohou předjíždět.³⁾ G. F. Newell však ukazuje (viz [13]), že v řadě případů je Lighthillův–Whithamův–Richardsův model v dobré shodě s modely mikroskopickými. R. J. LeVeque upozorňuje v práci [12], že situace je složitější v případě, ve kterém není toková funkce $f = f(\varrho)$ ani konvexní, ani konkávní (tato situace nastává např. u některých modelů popisujících provoz v noci). V tomto případě zobecněné řešení tak, jak je obvykle chápeme, nesouvisí s vhodným mikroskopickým modelem. Zde je nezbytné vzít v potaz anizotropické chování řidičů, tj. to, že v řadě situací se řidič rozhoduje především podle situace před vozidlem (a nikoliv za vozidlem).

Dalším problémem je možný vznik shluků, které makroskopický model nepostihne. Představme si situaci, ve které jsou vozidla na vozovce rovnoměrně rozložena (hustota je konstantní). V nočním provozu se může stát, že řidič, který před sebou vidí koncová světla jiného vozidla zrychlí, pokud je toto vozidlo dostatečně vzdáleno. Unikne tak vozidlu za sebou, které musí ve tmě zpomalit. Ke zpomalenému vozidlu se přiblíží vozidlo za ním. Právě popsaná situace nastává při určitých hodnotách hustoty – dojde ke vzniku výše zmíněných shluků. Shluky se mohou navíc za jistých okolností dále shlukovat.

Daganzo ve své práci také zpochybňuje možnost doplnění modelů o vazký člen, který reprezentuje tendenci řidičů udržovat nenulovou vzdálenost od vozidla před ním. Vazký člen (a případně tzv. numerická vazkost vyskytující se v numerických metodách) může však být v rozporu s předpokládanou anizotropií v chování řidičů.

3. Makroskopické modely druhého řádu

Nedostatky modelů prvního řádu vedly některé odborníky ke snaze modely zdokonalit. Modely prvního řádu jsou založeny na zákonech zachování příbuzných zákonů zachování hmotnosti. Jeden směr zdokonalení se přímo nabízel: vyjít opět z analogie s mechanikou tekutin a doplnit model o zákon zachování hybnosti. Klasickým modelem tohoto typu je Payneho–Whithamův model [7] navržený v letech 1971 a 1974, který

³⁾ Přesněji řečeno: například pro nejjednodušší model s $v = \text{konst.}$ je nutnou podmínkou konvergence Godunovovy metody Courantova–Friedrichsova–Lewyho podmínka, která má tvar $\max_{i,n} |v| \frac{\Delta t}{x_{i+1}^n - x_i^n} \leq 1$. Tato podmínka současně zaručuje, že se vozidla nemohou předjíždět. I v případě ostatních modelů lze udělat obdobné úvahy.

lze zapsat následujícím způsobem (zde uvádíme zjednodušenou verzi bez relaxačního členu)

$$\begin{aligned} \varrho_t + (\varrho v)_x &= 0, \\ (\varrho v)_t + [\varrho v^2 + p(\varrho)]_x &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

kde $\varrho = \varrho(x, t)$ je opět hustota, $v = v(x, t)$ je rychlost, $p = p(\varrho)$ odpovídá tlaku zaváděnému v mechanice tekutin. Vazba mezi tlakem a hustotou je dána vybraným konstitutivním vztahem. První rovnost je tedy analogií zákona zachování hmotnosti a druhý vztah je analogií zákona zachování hybnosti. Funkci $q = \varrho v$ interpretujeme jako tok vozidel. Ve druhé polovině dvacátého století byla tomuto typu modelů věnována velká pozornost jak po stránce teoretické, tak po stránce numerické. Přesto veškeré toto snažení neskončilo příliš úspěšně. Například Daganzo [3] zdůrazňuje tři základní slabiny těchto modelů:

1. Částice tekutiny reagují na podněty ze všech směrů, zatímco řidiči vozidel reagují především na podněty před nimi.
2. Tloušťka rázové vlny v dopravě odpovídá délce několika málo vozů.
3. Na rozdíl od molekul jsou řidiči samostatně jednajícími osobnostmi.

Podstatná je především první připomínka. Druhá připomínka souvisí s tím, jaký model zvolíme (zda jako odpovídající tekutinu zvolíme tekutinu vazkou či nevazkou). Třetí připomínka je také podstatná. Ovšem k tomu, abychom do všech předchozích modelů zavedli vliv chování řidičů, je pochopitelně třeba modely doplnit například o další členy na pravé straně.

I další Daganzovy komentáře jsou velice důležité. Výše popsanou soustavu parciálních diferenciálních rovnic lze zařadit mezi diferenciální rovnice hyperbolického typu (samozřejmě při vhodné volbě konstitutivního vztahu $p = p(\varrho)$). V případě tohoto typu rovnic často zkoumáme rychlost šíření vln. Zjednodušeně řečeno nás zajímá rychlost šíření fluktuací od nějakého referenčního stavu. Nejlépe si lze tuto představu přiblížit na modelování šíření vln v oceánu. Zmiňovanou fluktuací pak je skutečně vlna šířící se v dostatečně hlubokém moři. Modelům dopravního proudu je však bližší jiná představa. Uvažujme dlouhý přímý dostatečně hluboký vodní kanál s rovným dnem. Dále uvažujme ustálený stav, kdy je rychlost tekutiny nulová a hloubka je konstantní. Pokud dojde v nějakém místě k fluktuaci, uvažujme např. změnu hloubky, bude se tato fluktuace šířit oběma směry (rychlost šíření bude přímo úměrná druhé odmocnině hloubky). V tomto ohledu má bohužel právě popisovaný model (22) velkou slabinu: rychlost šíření vln může být větší než rychlost vozidel (tato slabina se nevyskytuje ani u jednoho z diskutovaných modelů prvního řádu). Konkrétně se vlny šíří rychlostmi $\lambda_1(\varrho, v) = v - \sqrt{p'(\varrho)}$ a $\lambda_2(\varrho, v) = v + \sqrt{p'(\varrho)}$. To však také znamená, že změny pohybu vozidel jsou ovlivněny tím, co se stalo za nimi (tím je míněno např. to, co se stalo vozidlu, které je o mnoho vozidel za námi). Dále ještě upozorníme na zřejmý fakt, a to sice na výrazně rozdílný počet molekul v tekutině a vozidel na obvykle uvažovaném úseku.

Významným příspěvkem ve vývoji makroskopických modelů druhého řádu jsou práce A. Awa, A. Klara, T. Maternea a M. Rasclea [1], [2], kteří navrhli model založený

na následujících vztazích (opět pro jednoduchost uvádíme formulaci bez relaxačního členu):

$$\begin{aligned} \varrho_t + [q - \varrho p(\varrho)]_x &= 0, \\ q_t + [q^2/\varrho - p(\varrho)q]_x &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

kde stejně jako v předchozích případech je $\varrho = \varrho(x, t)$ hustota, $v = v(x, t)$ je rychlost a $p = p(\varrho)$ je tlak a $q = \varrho w$. Tento model má dvě zajímavé vlastnosti:

1. Rychlosti šíření vln jsou $\lambda_1(\varrho, v) = v - \varrho p'(\varrho)$ a $\lambda_2(\varrho, v) = v$. To znamená, že je-li funkce $p = p(\varrho)$ rostoucí, potom maximální rychlostí šíření vln je v . Rychlost λ_1 může být samozřejmě záporná i v případě, že rychlost všech vozidel je nezáporná. To však není v rozporu s našimi představami. Například rázová vlna představující čelo dopravní zácpy se pochopitelně může zápornou rychlostí pohybovat.
2. Soustava (23) může být opět transformována do jiného systému souřadnic (stejně jako tomu bylo v případě (11) a (3)). Soustava získaná touto transformací má opět již přímou vazbu na mikroskopický model.

Popišme stručně tento převod. Jako v předchozím případě použijeme nové souřadnice (X, T) , pro které platí

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \tau, \quad \frac{\partial x}{\partial T} = v, \quad T = t$$

a dostaneme tak po příslušných úpravách úlohu (opět viz přílohu A)

$$\begin{aligned} \tau_T - v_X &= 0, & X \in \mathbb{R}, \quad T \in (0, T_{\max}), \\ w_T &= 0, & X \in \mathbb{R}, \quad T \in (0, T_{\max}), \\ \tau(X, 0) &= \frac{1}{\varrho_0(X)}, & X \in \mathbb{R}, \\ w(X, 0) &= \frac{1}{\varrho_0(X)}, & X \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (24)$$

kde $w = v + p(1/\tau)$. Uvažujme nyní pro jednoduchost případ $p(\varrho) = \varrho^4$.⁴⁾ Opět snadno ukážeme souvislost mezi makroskopickým modelem (24) a semidiskrétním mikroskopickým modelem

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= v_i(t), \\ \frac{dv_i(t)}{dt} &= \Delta X \frac{v_{i+1} - v_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Stačí odečíst první rovnost v (25) s indexem i od první rovnosti v (25) s indexem $i + 1$, podělit ΔX a získáme opět

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{\Delta X} \right] = \frac{1}{\Delta X} (v_{i+1}(t) - v_i(t)), \quad (26)$$

⁴⁾ Obecnější případ je popsán např. v [1].

tj.

$$\frac{d\tau_i}{dt} = \frac{1}{\Delta X}(v_{i+1} - v_i). \quad (27)$$

Dále, v našem případě máme $w = v + 1/\tau$, a tedy

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{dv_i}{dt} - \frac{1}{\tau_i^2} \frac{d\tau_i}{dt}, \quad (28)$$

což lze upravit na

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{dv_i}{dt} - \Delta X \frac{v_{i+1} - v_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}. \quad (29)$$

Odtud a z (25) již přímo plyne

$$\frac{dw_i}{dt} = 0, \quad (30)$$

tj. $w_T = 0$.

Formule (27) a (30) lze stejně jako v předchozích případech interpretovat jako aproximaci, která je základem semidiskrétní Godunovovy metody pro úlohu (24). Lze ukázat, že tato metoda konverguje pro $\Delta X \rightarrow 0$ k zobecněnému řešení úlohy (24) i zobecněnému řešení úlohy (23). Jinak řečeno, stejně jako v předchozím případě, je mikroskopický model vhodnou numerickou aproximací počáteční úlohy.

4. Závěr

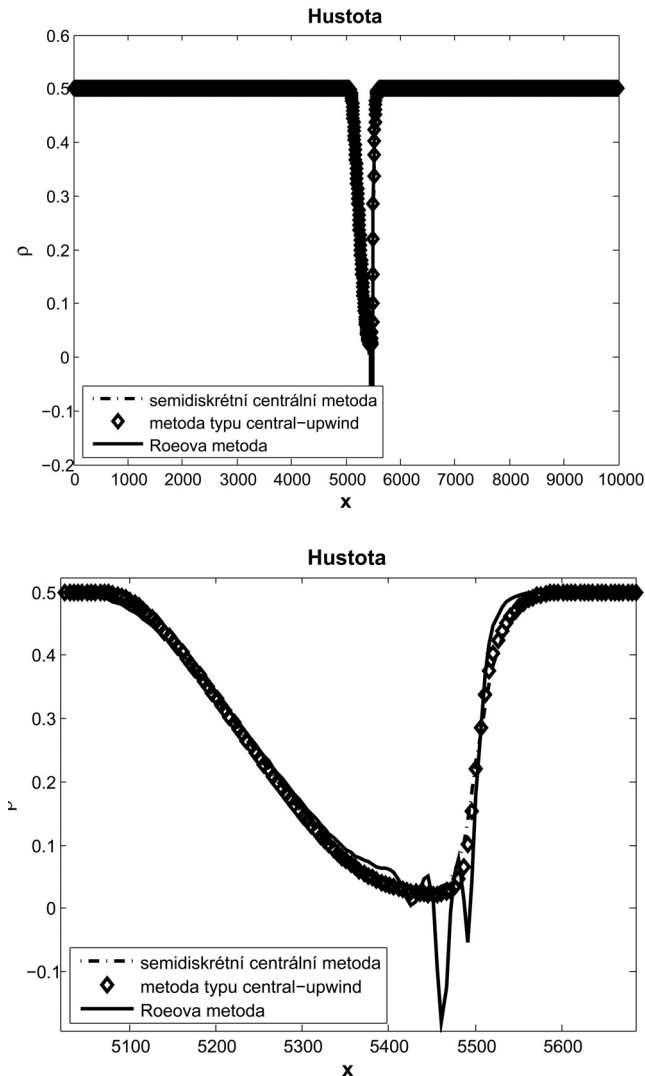
V předchozím textu jsme stručně shrnuli vývoj makroskopických modelů dopravního proudu a popsali vzájemné vazby mezi makroskopickými a mikroskopickými modely. Všechny makroskopické modely jsou založeny na parciálních diferenciálních rovnicích hyperbolického typu. Jednou z podmínek stability příslušných numerických metod je Courantova–Friedrichsova–Lewyho podmínka, ve které vystupuje následující nerovnost

$$\max |v| \frac{\Delta t}{\Delta X} \leq \text{konst.} \quad (31)$$

V případě plně diskretních metod (realizována diskretizace v časové i prostorové proměnné) navíc předpokládáme, že podíl Δt a ΔX je konstantní. V případě konvergentní metody tedy platí: pro $\Delta X \rightarrow 0$ přibližné řešení konverguje k řešení přesnému (v zobecněném smyslu). V našich modelech ovšem představuje ΔX délku vozidla, která je samozřejmě pevně dána. Obvykle se zavádí škálování $X' = \varepsilon X$, $T' = \varepsilon T$, $\Delta X' = \varepsilon \Delta X$ a uvažuje se, že místo $\Delta X \rightarrow 0$ konverguje k nule ε . Toto škálování nám umožňuje zvyšovat počet vozidel na sledovaném úseku při zkracování jejich délky a zachování jejich hustoty. V textu jsme ukázali, že některé makroskopické modely souvisí s modely mikroskopickými: mikroskopické modely lze interpretovat jako numerické metody, které konvergují k zobecněným řešením úloh založených na makroskopických modelech.

Na závěr stručně ilustrujme ještě jeden problém, který se týká souvislostí mezi různými numerickými metodami pro makroskopické modely dopravního proudu. Lze

snadno ukázat, že mikroskopické modely lze interpretovat nejen jako Godunovovu metodu pro úlohu v transformovaných souřadnicích, ale též jako Hartenovu–Laxovu–Leerovu (HLL) metodu ([8]) nebo metodu s přibližným Roeovým řešičem ([11]) (opět pro úlohu v transformovaných souřadnicích). Uvažujeme-li ovšem formulace úloh před transformací souřadnic, dávají zmiňované metody rozdílné výsledky. Můžeme si pochopitelně položit otázku, která z těchto metod je nevhodnější? Ukazuje se, že metoda s Roeovým řešičem je nevhodná v případech, ve kterých nastává analogie vakua, tj. hustota vozidel v některých bodech nabývá nulové hodnoty (Roeův řešič



Obr. 2. Řešení Riemannova problému – srovnání tří metod pro makroskopický model druhého řádu (celková situace a detailní pohled). V detailním zobrazení je zřejmá nestabilita Roeovy metody. Na vodorovné ose jsou vyneseny indexy j diskretizačních uzlů x_j , $x_j = j\Delta x$, $\Delta x = 5$.

je založen na lokální linearizaci problému; vlivem linearizace můžeme obdržet záporné hodnoty hustoty). Tuto negativní vlastnost nemají zbývající dvě metody. Rozumnou volbou je metoda typu HLL, která je obecně výpočetně méně náročnější než metoda Godunovova a která stejně jako Godunovova metoda respektuje existenci dvou šířících se vln v případě fluktuace v řešení.

V následujícím numerickém experimentu (viz obrázek 2) řešíme problém (23) třemi metodami – centrální metodou (viz [10]), metodou typu central-upwind, která je totožná s metodou typu HLL (viz [8]) a metodou založenou na přibližném Roeově řešiči (viz [11]). Poznamenejme, že v případě poslední metody musíme stanovit příslušnou Roeovu matici pro různé konstitutivní vztahy $p = p(\varrho)$ (v tomto numerickém experimentu volíme $p(\varrho) = 6\varrho$). To může být samo o sobě problém. Uvažujeme Riemannův problém, tj. po částech konstantní počáteční podmínku, s následující počáteční podmínkou: Levý a pravý stav jsou $\varrho_L = 0.5$, $\varrho_R = 0.5$, $v_L = 6$, $v_R = 12$. Diskretizační kroky jsou zvoleny $\Delta x = 5$, $\Delta t = 0.25$ a $T_{\max} = 42$ (tato konfigurace odpovídá 5000 vozidel, pokud také $\Delta X = 5$). Proměnná x leží v intervalu $x \in \langle 0, 50000 \rangle$, tj. sledovaný úsek má délku 50 km. V tomto případě řešení obsahuje stav odpovídající vakuu. V případě metody založené na Roeově řešiči je možné pozorovat nestabilitu způsobenou linearizací.

A. Formulace úloh v transformovaném systému souřadnic

V tomto dodatku stručně popíšeme formulaci úloh v proměnných (X, T) . Volíme takovou transformaci, pro kterou platí $\frac{\partial x}{\partial X} = \tau$, $\frac{\partial x}{\partial T} = v$ a $T = t$. Pro funkce $\tau = \tau(x(X, T), t(X, T))$ a $v = v(x(X, T), t(X, T))$ platí $\tau_T = \tau_x v + \tau_t$ a $v_X = v_x \tau$. Postup ukážeme na úloze (11), tj. na

$$\varrho_t + [v(x)\varrho]_x = 0. \quad (32)$$

Dosadíme $\varrho = \frac{1}{\tau}$ a upravíme první rovnost z této úlohy na

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_t + v(x) \left(\frac{1}{\tau}\right)_x + v_x \frac{1}{\tau} = 0.$$

Po další úpravě máme

$$-\frac{\tau_t}{\tau^2} - v \frac{\tau_x}{\tau^2} + v_x \frac{1}{\tau} = 0.$$

Po přenásobení $-\tau^2$ získáme

$$\tau_t + v\tau_x - v_x\tau = 0.$$

S využitím vlastností transformace odtud dostáváme

$$\tau_T - v_X = 0.$$

Soustavu (5) lze přepsat na

$$\begin{aligned}\varrho_t + (\varrho v)_x &= 0, \\ (\varrho w)_t + (\varrho v w)_x &= 0.\end{aligned}\tag{33}$$

První rovnost lze tedy upravit stejně jako v předchozím případě (32). Druhou rovnost v (33) upravíme na

$$\varrho_t w + \varrho w_t + w_x (v \varrho) + w (v \varrho)_x = 0.$$

S využitím první rovnosti v (33) dostaneme

$$w_t + v w_x = 0,$$

což je $w_T = 0$. Další otázkou je, zda lze realizovat analogické úvahy i v případě zobecněných řešení. Ukazuje se, že je to možné (a to nejen pro případ modelů dopravního proudu). Podrobnosti čtenář nalezne v [14].

Poděkování: Tato práce byla podpořena projektem CZ.1.05/1.1.00/02.0090 a projektem SGS-2010-026.

L i t e r a t u r a

- [1] AW, A., KLAR, A., MATERNE, T., RASCLE, M.: *Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models*. SIAM Journal on Applied Mathematics 63, 2002, 259–278.
- [2] AW, A., RASCLE, M.: *Ressurrection of „second order“ models of traffic flow?* SIAM Journal on Applied Mathematics 60, 2000, 916–938.
- [3] DAGANZO, C. F.: *Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow*. Transport Research 29B, 1995, 277–286.
- [4] DARBHA, S., RAJAGOPAL, K. R., TYAGI, V.: *A review of mathematical models for the flow of traffic and some recent results*. Nonlinear Analysis 69, 2008, 950–970.
- [5] GARAVELLO, M., GOATIN, P.: *The Aw-Rasclé traffic model with locally constrained flow*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 378, 2011, 634–648.
- [6] HELBING, D., JOHANSSON, A.: *On the controversy around Daganzo’s requiem for and Aw-Rasclé’s resurrection of second-order traffic flow models*. The European Physical Journal B 69, 2009, 549–562.
- [7] HOOGENDOORN, S. P., BOVY, P. H. L.: *State-of-the-art of vehicular traffic flow modeling*. Journal of Systems and Control Engineering 215, 2001, 283–303.
- [8] KURGANOV, A., NOELLE, S., PETROVA, G.: *Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations*. SIAM Journal of Scientific Computation 23, 2001, 707–740.
- [9] KURGANOV, A., POLIZZI, A.: *Non-oscillatory central schemes for traffic flow models with Arrhenius look-ahead dynamics*. Networks and Heterogeneous Media 4, 2009, 431–451.
- [10] KURGANOV, A., TADMOR, E.: *New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations*. Journal of Computational Physics 160, 2000, 241–282.
- [11] LEVEQUE, R. J.: *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [12] LEVEQUE, R. J.: *Some traffic flow models illustrating interesting hyperbolic behavior*. Technical report, SIAM Annual Meeting, July 10, 2001.
- [13] NEWELL, G. F.: *Nonlinear effects in the dynamics of car following*. Operations Research 9, 1961, 209–229.
- [14] WAGNER, D. H.: *Equivalence of the Euler and Lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions*. Journal of Differential Equations 68, 1987, 118–136.