Pavel Rucki; Marian Genčev; Simona Pulcerová

Aproximace reálných čísel a příspěvek českých matematiků. (2. část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 4, 298–312

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142016

Aproximace reálných čísel a příspěvek českých matematiků (2. část)

Pavel Rucki, Marian Genčev, Simona Pulcerová, Ostrava

5. Vyjádření reálných čísel pomocí nekonečných řad

Již v předchozí kapitole jsme viděli význam teorie nekonečných řad v analytické teorii čísel. Ve spojitosti s touto teorií často hovoříme o rozvoji (expanzi) reálného čísla do nekonečné řady, velmi často zcela specifického tvaru.

V běžné početní praxi s reálnými čísly se zpravidla opíráme o jejich desetinné vyjádření. Každé reálné číslo α můžeme rozdělit na dvě části: na dolní celou část $\lfloor\alpha\rfloor$ a desetinnou (zlomkovou) část $\{\alpha\}$. Při vyšetřování racionality nebo iracionality tohoto reálného čísla hraje zásadní roli právě jeho desetinná část, konkrétně postavení cifer v desetinném rozvoji. Jinými slovy, pro každé kladné reálné číslo α existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ taková, že $a_0 = \lfloor\alpha\rfloor$, $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a platí

$$\alpha = a_0{,}a_1a_2a_3\cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}\,. \tag{9}$$

Aby korespondence mezi reálnými čísly a jejich desetinnými rozvoji byla jednoznačně určena, je nutno navíc požadovat, aby $a_n < 9$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Už na základní škole se žáci dovídají, že reálná čísla můžeme rozdělit do dvou skupin podle toho, zda mají ukončený desetinný rozvoj (tzn. od jistého přirozeného čísla n_0 jsou všechny členy a_m, $m \geq n_0$, rovny 0), nebo zda tento rozvoj mají neukončený. V případě, že reálné číslo má desetinný rozvoj ukončený nebo neukončený periodický, je toto číslo racionální. Pokud má reálné číslo desetinný rozvoj neukončený a neperiodický, je toto číslo iracionální. Je zřejmé, že toto kritérium iracionality reálných čísel není na rozdíl od předchozích kapitol založeno na schopnosti jeho aproximace čísly racionálními, ale na pozici jednotlivých cifer, popř. na „vzorech“, které tyto cifry v desetinném vyjádření daného reálného čísla vytvářejí.

Přestože je toto kritérium velice jednoduché, jeho praktické použití selhává už při zkoumání otázky iracionality např. čísel π a e. Nemáme totiž k dispozici žádné snadné explicitní pravidlo, na jehož základě bychom mohli určit obecně cifru na libovolné pozici jejich desetinného rozvoje. Nemůžeme tak bez dalších znalostí rozhodnout, zda je jejich rozvoj ukončený, popř. zda se periodicky opakuje. Lze však uplatnit postup

RNDr. Pavel Rucki, Ph.D., Mgr. Marian Genčev, Ph.D., RNDr. Simona Pulcerová, Ph.D. (roz. Sobková), Vysoká škola báňská, Ekonomická fakulta, Katedra matematických metod v ekonomice, Sokolská třída 33, 701 21 Ostrava 1, e-mail: pavel.rucki@vsb.cz, marian.gencev@vsb.cz, simona.pulcerova@vsb.cz.

opačný. Budeme-li požadovat, aby nějaká posloupnost nezáporných celých čísel splňovala jisté podmínky, pak reálné číslo, jehož desetinný rozvoj vytvoříme seřazením členů této posloupnosti za sebou, bude iracionální.

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel. Označme symbolem $\delta(a_1, a_2, \dots)$ takové reálné číslo, které má před desetinnou čárkou nulu a za desetinnou čárkou následují dekadické zápisy čísel a_1, a_2, ... Např. $\delta(1, 10, 100, \dots) = 0{,}110100\dots$ Pro takto vytvořená čísla existuje jednoduché kritérium, které umožňuje rozhodnout, kdy jsou tato čísla iracionální, viz [48].

Věta 5.1 *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

Pak $\delta(a_1, a_2, \dots)$ je iracionální číslo.

Příklad 5.1 *Položme $a_n = n$, resp. $a_n = p_n$, kde p_n je n-té prvočíslo, $n \in \mathbb{N}$. Pak čísla*

$$\delta(1, 2, 3, 4, 5, \dots) = 0{,}1234567891011121314\dots$$
$$\delta(2, 3, 5, 7, 11, \dots) = 0{,}235711131719232931 37\dots$$

jsou iracionální.

Obě čísla jsou pojmenována po slavných matematicích. Jde o Champernownovu, resp. Copelanovu-Erdősovu konstantu.

Pokud bychom však chtěli rozhodnout o iracionalitě čísla $0{,}149162536496481\dots$, které je vytvořeno z cifer druhých mocnin přirozených čísel, nemohli bychom toto kritérium použít, poněvadž příslušná nekonečná řada je konvergentní.

V roce 1937 publikoval německý matematik Kurt Mahler (1903 – 1988) postačující podmínky pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jež implikují nejen iracionalitu, ale také transcendenci reálného čísla vytvořeného již uvedeným postupem. Členy této posloupnosti konstruuje Mahler pomocí nenulového mnohočlenu $P(x)$ s celočíselnými koeficienty, jenž nabývá v přirozených číslech kladných hodnot. Nejdříve se do mnohočlenu $P(x)$ dosazují postupně všechna přirozená čísla a v dalším kroku se z jeho hodnot $P(1), P(2), P(3), \dots$ vybírají bloky vzniklých cifer, které se seřazují postupně za sebou za desetinnou čárku. Vznikne tak číslo $\delta(P(1), P(2), \dots)$, tzn.

$$0, \underbrace{a_{1,t_1}, a_{1,t_1-1}, \dots a_{1,1}, a_{1,0}}_{\text{cifry v } P(1)} \underbrace{a_{2,t_2}, a_{2,t_2-1}, \dots a_{2,1}, a_{2,0}}_{\text{cifry v } P(2)} \dots$$

Mahler o takto zkonstruovaném čísle dokázal, že je transcendentní, avšak není to číslo Liouvilleovo.

Příklad 5.2 *Uvažujme lineární mnohočlen $P(x) = x$. Sepíšeme cifry hodnot polynomu $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ... za desetinnou čárku tak, jak jdou podle velikosti za sebou. Vytvoříme tak číslo*

$$0{,}1234567891011121314\dots,$$

což je nám již známá Champernownova konstanta. Je to číslo iracionální, viz příklad 5.1*, a podle předchozí Mahlerovy myšlenky je také transcendentní, avšak není to číslo Liouvilleovo.*

Příklad 5.3 *Uvažujme nyní kvadratický mnohočlen $P(x) = x^2$. Vytvoříme reálné číslo stejným způsobem jako v předchozím příkladu. Zkonstruujeme tak číslo*

$$0{,}149162536496481100121\ldots,$$

o němž nedokážeme pomocí věty 5.1 *rozhodnout, zda je to číslo iracionální nebo ne. Z Mahlerových poznatků však vyplývá, že toto číslo je transcendentní, tudíž také iracionální.*

Dosud jsme se zabývali pouze desetinnými rozvoji. Toto vyjádření můžeme zobecnit tak, že číslo ve jmenovateli zlomků nacházející se v řadě (9) nahradíme libovolným přirozeným číslem $g > 1$. Hovoříme pak o g-adickém rozvoji reálného čísla α. V zobecnění můžememe jít dále, budeme-li ve jmenovateli uvedené řady uvažovat obecně různá přirozená čísla větší než 1. Pak hovoříme o tzv. *Cantorových řadách*, jimiž se jako první zabýval německý matematik Georg Cantor (1845 – 1918) v roce 1869.

Věta 5.2 *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel větších než 1. Pak každé reálné číslo α lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\alpha = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

kde c_n jsou celá čísla taková, že $0 \leq c_n \leq a_n - 1$ a nerovnost $c_n < a_n - 1$ platí pro nekonečně mnoho n.

Položíme-li $a_n = 10$ pro všechny indexy n, získáme desetinný rozvoj čísla α. Zmínili jsme se, že neznáme-li celý desetinný rozvoj reálného čísla α, je nemožné pouze z něj získat informaci o tom, zda je číslo racionální nebo iracionální (to je případ čísel e a π). Pomocí Cantorových řad lze tento nedostatek částečně odstranit. K tomu si ukážeme několik jednoduchých kritérií.

Věta 5.3 *Nechť posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňují předpoklady věty* 5.2*. Jestliže každé prvočíslo p dělí nekonečně mnoho členů a_n, pak číslo α je iracionální právě tehdy, když nekonečně mnohokrát platí $c_n \geq 1$.*

Příklad 5.4 *Položme $a_n = n + 1$ a $c_n = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Předpoklady věty* 5.3 *jsou splněny, a tedy číslo, které je vyjádřeno řadou*

$$2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

je iracionální.

Použijeme-li vyjádření Eulerova čísla pomocí nekonečné řady

$$2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}, \tag{10}$$

můžeme tak pomocí věty 5.3 dokázat, že Eulerovo číslo e je iracionální.

Vyjádření reálných čísel pomocí Cantorových řad není jediné. V roce 1880 ukázal anglický matematik James Joseph Sylvester (1814 – 1897), že každé reálné číslo α můžeme jednoznačně reprezentovat nekonečnou řadou

$$\alpha = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n},$$

kde c je celé číslo a a_n jsou přirozená čísla větší než 1 taková, že $a_{n+1} > (a_n - 1)a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, viz [47]. Sylvester šel ve svých úvahách dál a dokázal, že číslo α je iracionální právě tehdy, když nerovnost $a_{n+1} > (a_n - 1)a_n + 1$ je splněna nekonečně mnohokrát. Toto kritérium lze použít například na nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^n}}, \tag{11}$$

jejíž součet je tak podle předchozí úvahy iracionální číslo.

V roce 1913 pozměnil Cantor svůj koncept Cantorových řad a ukázal, že každé reálné číslo α lze jednoznačně vyjádřit nekonečnou řadou

$$\alpha = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

kde c je celé číslo a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost celých čísel větších než 1, viz [9]. Můžeme si všimnout, že ve srovnání s vlastnostmi posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uvedené ve větě 5.2 je nyní na posloupnost kladen silnější požadavek monotónnosti jejích členů. Uveďme si jedno z kritérií iracionality pro tento typ řady. Číslo α vyjádřené předchozím způsobem je iracionální právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Jako příklad konkrétní posloupnosti splňující výše uvedené vlastnosti uveďme rostoucí posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ všech prvočísel. Na základě předešlého kritéria můžeme dokázat, že součet nekonečné řady

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} \tag{12}$$

je číslo iracionální.

Viděli jsme, že k některým nekonečným řadám lze najít reprezentanta v reálných číslech, jenž je vyjádářen pomocí známých konstant, viz např. (10). V těchto případech můžeme říct, že jsme našli součet nekonečné řady v uzavřeném tvaru. Častější je však opačný případ, viz např. (11) a (12).

Cantorovy řady můžeme zobecnit tím, že zeslabíme požadavky na koeficienty a_n a b_n, $n \in \mathbb{N}$. Těmito řadami se zabývali český matematik Jaroslav Hančl a nizozemský matematik Robert Tijdeman. Ti v roce 2004 stanovili obecnější podmínky pro to, aby součet tzv. zobecněné Cantorovy řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}, \tag{13}$$

kde $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost libovolných celých čísel a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel větších než 1, byl racionální. Mimo jiné dokázali v [26], že je-li $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ navíc monotónní posloupnost, pak vždy existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy nabývají hodnoty 2, 3 nebo 4, že součet Cantorovy řady (13) je racionální číslo. O rok později v [27] publikovali postačující podmínky pro iracionalitu tzv. faktoriálních řad a dokázali, že například součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lfloor n^{\alpha} \rfloor}{n!}$$

je iracionální číslo pro libovolné kladné reálné číslo α.

6. Rychle konvergující řady

Jak jsme viděli v předchozích kapitolách, algebraická povaha reálného čísla, které je reprezentováno nekonečnou řadou, úzce souvisí s podmínkami, které na tuto řadu klademe. Zmínili jsme podmínky týkající se dělitelnosti jejích členů, vztahu mezi sousedními členy a další. V roce 1975 přišel maďarský matematik Paul Erdős (1913 – 1996) se speciálním typem nekonečných řad, u nichž algebraická povaha jejich součtu úzce souvisí s asymptotickým chováním jejich členů (s „rychlostí konvergence" těchto řad).

Erdősova úvaha byla jednoduchá, viz [8]. Nejdříve si zvolíme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že nerovnost $a_n > n^{1+\varepsilon}$ platí pro nějaké fixní kladné reálné ε a pro všechny dostatečně velké indexy n. Tento požadavek nám zaručí to, že nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \tag{14}$$

bude konvergentní (stačí použít srovnávací kritérium). Dále po této posloupnosti budeme požadovat, aby obsahovala podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která bude divergovat „dostatečně rychle". Na základě těchto předpokladů Erdős dokázal, že součet řady (14) je iracionální číslo. Použili jsme poněkud vágní spojení „... divergovat dostatečně rychle". Tím Erdős rozuměl, že členy podposloupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ budou od určitého indexu n_k pro libovolné předem dané reálné číslo K vždy větší než K^{2^n}. Stručněji zapsáno, pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bude platit podmínka

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{2^n}} = \infty.$$

Erdős dále zavedl nový pojem iracionální posloupnosti přirozených čísel. Jde o posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel s pozoruhodnou vlastností: pokud vynásobíme každý člen této posloupnosti libovolným přirozeným číslem, pak součet nekonečné řady převrácených hodnot těchto součinů je vždy iracionální číslo bez ohledu na to, čím členy a_n násobíme. Jinak řečeno, je-li součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n c_n} \tag{15}$$

iracionální pro každou posloupnost přirozených čísel $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *iracionální posloupnost*. Není-li posloupnost iracionální, nazývá se racionální. Ukázal navíc, že posloupnost $\{2^{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$, o níž byla již zmínka v předchozí kapitole, je iracionální, kdežto posloupnost $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ je racionální. V tomto případě stačí, abychom položili $c_n := n + 2$ pro všechny indexy n, pak totiž

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2-1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) = \frac{1}{2},$$

a tedy posloupnost $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ není iracionální.

Své kritérium Erdős dále modifikoval. Ponechal v platnosti nerovnost $a_n > n^{1+\varepsilon}$, která zaručuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$, avšak zesílil požadavek druhý – aby v posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ existovala podposloupnost, která by divergovala mnohem rychleji než v případě iracionality. Jinými slovy, bude-li platit pro každé kladné reálné t

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/t^n} = \infty \qquad \text{a} \qquad a_n > n^{1+\varepsilon},$$

nebude součet nekonečné řady (14) pouze iracionální číslo, ale bude to dokonce číslo Liouvilleovo.

Zatím jsme se zabývali nekonečnými řadami sestavenými z takových posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, které obsahovaly rychle divergující podposloupnost. Tento růst úzce souvisel s exponentem v podmínce, jíž byla rychlost divergence posloupnosti předepsána. V případě iracionality stačilo vzít exponent $1/2^n$, kdežto v případě „liouvillity“ jsme uvažovali exponent $1/t^n$, kde t bylo libovolné kladné číslo. Jednou z dalších možností, jak můžeme vyjádřit rychlost divergence posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je, že stanovíme vztah mezi členem a_n a všemi předchozími členy $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Mezi prvními, kdo s touto myšlenkou přišel, byl opět Erdős, který v roce 1950 navrhl a dokázal následující tvrzení. Vezměme ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že člen a_n bude v jistém smyslu „mnohem větší“ než součin všech předcházejících členů a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}. Formálně vyjádřeno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} = \infty.$$

Pak součet řady (14) je iracionální číslo. Můžeme říct, že i tato identita je vlastně měřítkem rychlosti divergence posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

V roce 1984 rozvinul tuto myšlenku rumunský matematik József Sándor, viz [43]. Na rozdíl od Erdőse uvažoval Sándor dvě posloupnosti přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ne nutně rostoucí). Splňují-li navíc následující podmínky:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \cdot \frac{1}{b_n} = \infty$$

a

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > 1, \tag{16}$$

bude součet nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} \tag{17}$$

iracionální číslo. Navíc podmínka (16) implikuje, že existuje reálné číslo A větší než 1 takové, že pro členy s dostatečně velkými indexy n, jež závisí na volbě A, platí nerovnost

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} < \frac{1}{A} \cdot \frac{b_n}{a_n}$$

a odtud užitím matematické indukce dostáváme

$$\frac{b_{n+s}}{a_{n+s}} < \frac{1}{A^s} \cdot \frac{b_n}{a_n}\,.$$

Jinými slovy, pro dostatečně velké indexy n roste tato řada srovnatelně s geometrickou řadou s kladným kvocientem menším než 1.

7. Diofantické aproximace v českých zemích

Stejně jako v okolních zemích působili i v českých zemích a v bývalém Československu matematici, kteří se zabývali teorií diofantických aproximací a její aplikací v analýze nekonečných řad. Mezi nejvýznamnější české matematiky bezesporu patřil Vojtěch Jarník (1897 – 1970), jenž svými pracemi výrazně obohatil analytickou teorii čísel a teorii diofantických aproximací o nové poznatky. Dokázal například určit tzv. Hausdorffovu dimenzi množiny reálných čísel α takových, že nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^s}$$

platí pro nekonečně mnoho racionálních čísel $p/q \in \mathbb{Q}$ a pro předem dané fixní $s \geq 1$.

Charakterizujme stručně pojem Hausdorffova dimenze, resp. Hausdorffova míra. Pomocí ní můžeme měřit „velmi malé“, avšak libovolně komplikované podmnožiny n-rozměrného prostoru $\mathbb{R}^n$. Jako motivační příklad vezměme v úvahu běžné množiny, jako jsou např. úsečka nebo čtverec, a použijme klasický koncept Lebesgueovy míry na tyto množiny. Pak 1-dimenzionální Lebesgueova míra úsečky bude odpovídat její délce a 2-dimenzionální Lebesgueova míra čtverce bude odpovídat jeho obsahu a obě míry budou konečné a nenulové. Pokud bychom chtěli určit např. 3-dimenzionální Lebesgueovu míru obou objektů, pak tato míra bude v obou případech nulová, poněvadž úsečka má nulovou šířku a výšku a čtverec má nulovou výšku. Můžeme tedy říct, že kružnice, resp. čtverec má Lebesgueovu dimenzi 1, resp. 2, protože jsou to největší čísla taková, že příslušná n-dimenzionální Lebesgueova míra je ještě konečná a nenulová. Nicméně v prostoru $\mathbb{R}^n$ existují také množiny, které jsou komplikovanější než kružnice nebo čtverec, např. tzv. Cantorovo diskontinuum. Což je množina reálných čísel z intervalu $[0, 1]$, která vznikne tak, že interval $[0, 1]$, rozdělíme na tři stejné části a odstraníme prostřední část. Každou ze zbývajících částí – intervaly $[0, 1/3]$ a $[2/3, 1]$, rozdělíme znovu na tři stejné části a odstraníme z každého intervalu část prostřední. Zůstanou intervaly $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[6/9, 7/9]$ a $[8/9, 1]$ a celý postup dále opakujeme. Cantorovo diskontinuum je tedy množina, která vznikne z intervalu $[0, 1]$ po vyjmutí všech prostředních třetin na nekonečně mnoha úrovních.

Kdybychom chtěli určit dimenzi Cantorova diskontinua jako nejvyšší přirozené číslo n takové, že n-dimenzionální míra této množiny je nenulová a zároveň konečná, neuspěli bychom, protože 1-dimenzionální Lebesgueova míra Cantorova diskontinua je rovna 0. Proto se u takových množin určuje tzv. Hausdorffova dimenze, která je rozšířením Lebesgueovy dimenze. Připouští totiž možnost, že množina může mít dimenzi, která je vyjádřena kladným necelým číslem. Můžeme říct, že složitost struktury Cantorova diskontinua je „přechodným stavem“ mezi spočetnou množinou bodů, jejíž Lebesgueova míra je 0 (Cantorovo discontinuum je nespočetná množina), a intervalem $[0, 1]$, jehož míra je 1. Nabízí se proto možnost definovat dimenzi Cantorova diskontinua jako číslo mezi 0 a 1. A skutečně je možné ukázat, že Hausdorffova dimenze Cantorova diskontinua je rovna $\ln 2/\ln 3 = 0{,}63092\ldots$

Uvažujme speciální případ, kdy neprázdná množina X je podmnožinou 1-dimenzionálního prostoru $\mathbb{R}$. Nechť dále $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je spočetné pokrytí množiny X, tzn. $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Dále nechť β je takové nezáporné reálné číslo, že

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(I_n))^{\beta} : X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = 0.$$

Pak nejmenší ze všech β, pro něž předchozí identita platí, se nazývá *Hausdorffova dimenze množiny* X a značí se $\dim_{\mathrm{H}} X$.

Jarník v roce 1929, viz [30], a nezávisle na něm sovětský matematik A. S. Bezikovič (1891 – 1970) v roce 1934, viz [4], dokázali určit Hausdorffovu dimenzi množiny

$$W_s := \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^s} \text{ pro nekonečně mnoho } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Věta 7.1 (Jarníkova-Bezikovičova věta) *Je-li $s \geq 2$, pak*

$$\dim_{\mathrm{H}} W_s = \frac{2}{s}\,.$$

Je-li naopak $s \leq 2$, pak $W_s = \mathbb{R}$.

Poznamenejme jen, že druhá část tvrzení je důsledkem Dirichletovy věty (věta 2.3). Jarník zobecnil tuto větu také pro případ n-rozměrného prostoru $\mathbb{R}^n$, v němž se definují tzv. simultánní diofantické aproximace. Číslo α je v ní nahrazeno n-ticí reálných čísel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a čitatel zlomku p/q pak n-ticí celých čísel $(p_1, \ldots, p_n)$. Jarník ukázal, že množina

$$\left\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n : \left|\alpha_i-\frac{p_i}{q}\right|<\frac{1}{q^s} \text{ pro nekonečně mnoho } (p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{Z}^n,\ q\in\mathbb{N}\right\}$$

má Hausdorffovu dimenzi $(n+1)/s$, je-li $s \geq (n+1)/n$, a n v ostatních případech.

S Hausdorffovou dimenzí pracuje Jarník i v [31], kde určuje dimenzi množiny reálných čísel vyjádřených ve tvaru řetězového zlomku specifických vlastností. A ukazuje, jak tyto vlastnosti ovlivňují Hausdorffovu dimenzi uvedené množiny.

Jarníkovým žákem byl další z významných československých matematiků Břetislav Novák (1938 – 2003), jenž rozvinul Jarníkovy výsledky z teorie tzv. mřížových bodů a působil také v oblasti aproximace reálných čísel. V roce 1975 dokázal Novák v [38], že pro libovolné nenulové komplexní číslo s nemůže nastat možnost, že by obě čísla s a e^s byla čísla Gaussova, tj. čísla ve tvaru $a+b\mathrm{i}$, kde a a b jsou racionální.

V [39] se Novák zabývá také sedmým Hilbertovým problémem, a to v historickém kontextu v souvislosti s příspěvky světových matematiků, které vedly k jeho vyřešení.

V dřívějších kapitolách jsme se zabývali také reprezentací reálných čísel pomocí nekonečných řad. Jedním z nejznámějších matematiků působících na území bývalého Československa, který se zabýval touto oblastí, byl slovenský matematik Tibor Šalát (1926 – 2005), jenž poodhalil důležité souvislosti mezi Cantorovými a Lürothovými řadami a řetězovými zlomky, které studoval z hlediska Hausdorffovy míry i z hlediska topologie, viz např. [49].

V [50] se Šalát a Drahovský zabývali funkcemi $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, které zachovávají konvergenci řetězového zlomku $[a_0,a_1,a_2,\dots]$. Jinými slovy, je-li $[a_0,a_1,a_2,\dots]$ konvergentní řetězový zlomek, pak také $[f(a_0),f(a_1),f(a_2),\dots]$ je konvergentní řetězový zlomek. Šalát dokázal, že taková funkce musí zachovávat konvergenci libovolné konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 7.2 *Nechť funkce $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ má tu vlastnost, že pro každý konvergentní řetězový zlomek $[a_0;a_1,a_2,\dots]$ je i řetězový zlomek $[f(a_0);f(a_1),f(a_2),\dots]$ konvergentní, právě když pro libovolnou konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(b_n)$ konvergentní. Taková f splňuje:*

1. $\liminf\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}>0$,
2. $\liminf\limits_{t\to a} f(t)>0\ \forall a\in(0,\infty]$.

Zmiňme ještě jeden Šalátův výsledek týkající se Hausdorffovy dimenze Cantorových řad.

Je-li $g\geq 3$ přirozené číslo a M množina všech prvočísel menších než g, pak množina všech reálných čísel $x\in[0,1)$, které lze vyjádřit ve tvaru nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{g^n},\ p_n\in M,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

má Hausdorffovu dimenzi $\ln(\pi(g-1))/\ln g$, kde $\pi(x)$ je prvočíselná funkce označující počet prvočísel menších než x.

V minulé kapitole jsme se zmínili o iracionálních posloupnostech, jež definoval Erdős. V roce 1993 rozšířil Hančl pojem iracionální posloupnosti i na případ, kdy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, a zobecnil tak předchozí Erdősovu definici. Navíc pracoval se dvěma posloupnostmi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel takovými, že pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí stejné podmínky jako v Erdősově případě. Naopak po posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ požadoval, aby $b_n \leq 2^{(\log_2 a_n)^{\alpha}}$ pro všechny indexy n, kde α je reálné číslo z intervalu $(0,1)$, viz [22]. Tyto podmínky postačují k tomu, aby posloupnost podílů $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ byla iracionální. Všimněme si, že pokud ve speciálním případě zvolíme $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že se všechny její členy rovnají 1, obdržíme původní Erdősův výsledek. Na základě předchozího lze tedy ukázat, že např. posloupnost

$$\left\{\frac{\lfloor n^{2^{n/2}}\rfloor + 2^n}{n^{2^n} + 3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je iracionální.

Zcela analogicky lze definovat tzv. transcendentní, resp. algebraickou posloupnost. Je možné ukázat, že např. posloupnost $\{2^{4^n}\}_{n=1}^{\infty}$ je transcendentní, viz [15], kdežto posloupnosti

$$\left\{\frac{2^{n^n}+1}{n^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{3^{n!}+1}{2^{n!}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

jsou Liouvilleovy, viz [14].

V minulých kapitolách jsme zmínili Sandorovu metodu rozšíření původně Erdősova výsledku na řady s obecnými kladnými racionálními členy. Z Sandorových poznatků vyšel v roce 2005 a 2006 Pavel Rucki, který pozměnil první Sandorovu podmínku tak, že v prvním případě umocnil původní jmenovatel na $2+\delta$, kde δ je kladné reálné číslo, a ve druhém případě aplikoval na čitatele a jmenovatele přirozený logaritmus.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{(a_1 a_2 \dots a_{n-1})^{2+\delta}} \cdot \frac{1}{b_n} = \infty,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln(a_1 a_2 \dots a_{n-1})} \cdot \frac{1}{b_n} = \infty,$$

viz [17] a [20]. Tyto změny způsobí, že součet řady (17) je v prvním případě transcendentní číslo a ve druhém případě dokonce Liouvilleovo číslo. Pro ilustraci uveďme konkrétní příklad.

Příklad 7.1 *Nechť* $a_1 := 3$ *a pro všechna* $n \geq 2$ *definujme*

$$a_{n+1} := \begin{cases} (a_1 a_2 \cdots a_n)^3, & \textit{jestliže} \quad 25|n, \\ 2a_n + 1 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Pak součet řady (14) *je transcendentní číslo.*

Navíc pozměnil také druhou podmínku, aby podobná kritéria mohla platit také pro řady, jejichž konvergence je v jistém smyslu pomalejší než konvergence geometrické řady v Sandorově případu. Uveďme jednu z nich:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)^{1/(1+\varepsilon)} \geq \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{1/(1+\varepsilon)} + 1.$$

Nerovnost můžeme jednoduše upravit na tvar

$$\frac{b_{n+s}}{a_{n+s}} \leq \frac{1}{(K_n + s)^{1+\varepsilon}}\,,$$

kde K_n je konstanta závislá na indexu n. Z hlediska rychlosti konvergence bude řada (17) konvergovat srovnatelně s řadou $\sum_{s=1}^{\infty} 1/s^{1+\varepsilon}$, což je pomaleji než ve srovnání s rychlostí konvergence řady geometrické.

Rychlost konvergence řady (17) můžeme dále snižovat. V [19] můžeme najít kritérium, které je určeno pro řady (17), jejichž rychlost konvergence je srovnatelná s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \ln^{1+\varepsilon} n)$, kde ε je kladné reálné číslo.

Pojem iracionality můžeme dále zobecnit a zabývat se tak lineární nezávislostí reálných čísel, popř. součtů daných nekonečných řad spolu s číslem 1 nad tělesem racionálních čísel. V zobecňování můžeme pokračovat tak, že spojíme koncept lineární nezávislosti nekonečných řad spolu s pojmem iracionálních posloupností. Můžeme tak definovat novou vlastnost nekonečných řad, resp. posloupností – *lineárně nespřízněné posloupnosti* (překlad z angl. linearly unrelated sequences). Nazýváme takto posloupnosti kladných reálných čísel $\{a_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$, …, $\{a_{K,n}\}_{n=1}^{\infty}$, kde K je přirozené číslo, pro které platí, že součty nekonečných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{1,n}c_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2,n}c_n}, \quad \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{K,n}c_n}$$

spolu s číslem 1 jsou lineárně nezávislé nad $\mathbb{Q}$ pro libovolnou posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel.

Není obtížné ukázat, že tato vlastnost je skutečně zobecněním pojmů lineární nezávislosti, iracionality a iracionální posloupnosti. Položíme-li totiž $c_n = 1$ pro všechny indexy n, dostaneme definici lineární nezávislosti nad tělesem $\mathbb{Q}$. Pokud dosadíme $K = 1$, získáme tak definici iracionální posloupnosti. A nakonec, položíme-li $c_n = 1$ pro všechny indexy n a zároveň $K = 1$, obdržíme pojem iracionality. Výsledky týkající se lineárně nespřízněných posloupností můžeme najít v pracích Simony Sobkové a Jaroslava Hančla (viz [13], [24], [22] a [23]), od nichž pochází následující příklad lineárně nespřízněných posloupností:

$$\left\{\frac{2^{K^n}}{(n+1)!}\right\}, \left\{\frac{2^{K^n}}{(n+2)!}\right\}, \left\{\frac{2^{K^n}}{(n+3)!}\right\}, \ldots, \left\{\frac{2^{K^n}}{(n+K)!}\right\},$$

kde K je libovolné přirozené číslo.

Iracionální posloupnosti mají úzký vztah ke speciální podmnožině reálných čísel, která nám umožňuje určit, jakých součtů může nekonečná řada (15) nabýt při libovolné volbě posloupnosti přirozených čísel $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Mějme dánu posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nenulových reálných čísel. Pak množinu reálných čísel x, pro která existuje posloupnost přirozených čísel $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že řada (15) konverguje a má součet roven právě x, nazýváme *vyjádřitelná množina* $X\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy

$$X\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n c_n}\right\}.$$

Je zřejmé, že pokud $X\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pak posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je iracionální. Na výzkumu vyjádřitelných množin se vedle Hančla podílí také Jan Šustek. Ten v [21] ukázal, že splňuje-li posloupnost kladných reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ podmínku

$$\frac{1}{2a_n} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_i} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

můžeme vyjádřitelnou množinu $X\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ přesně vymezit:

$$X\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left(0\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}\right], \qquad \text{je-li} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$$

$$X\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (0, \infty), \qquad \text{je-li} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

Situace se mění, obsahuje-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonečně mnoho kladných i záporných členů. Budeme-li požadovat, aby posloupnost splňovala nerovnost

$$\sum_{\substack{i=n+1\\ a_i<0}}^{\infty} \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{2a_n} \leq \sum_{\substack{i=n+1\\ a_i>0}}^{\infty} \frac{1}{a_i} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pak i v tomto případě jsme schopni přesně určit vyjádřitelnou množinu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$X\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{\substack{i=n+1\\ a_i<0}}^{\infty} \frac{1}{a_i}\ ,\ \sum_{\substack{i=n+1\\ a_i>0}}^{\infty} \frac{1}{a_i}\right).$$

Uvažujme například posloupnost $\{(-1)^n n^2\}_{n=1}^{\infty}$, v níž se pravidelně střídají kladné a záporné členy. Není obtížné ukázat, že

$$X\{(-1)^n n^2\}_{n=1}^{\infty} = \left(-\frac{\pi^2}{8}\ ,\ \frac{\pi^2}{24}\right).$$

Nicméně tyto poznatky můžeme použít pouze v případě, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nediverguje rychleji než posloupnost $\{3^n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro rychleji divergující posloupnosti totiž podmínka (18) neplatí a v případě těchto řad již nejsme schopni najít exaktní vyjádření vyjádřitelné množiny. Co však můžeme, je odhadnout, jak „velká“ je vyjádřitelná množina, přesněji řečeno, jaký je spodní odhad Lebesgueovy míry vyjádřitelné množiny $X\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, viz např. [16]. Pro velice rychle divergující posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme navíc ukázat, že příslušná vyjádřitelná množina $X\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má Lebesgueovu míru rovnou nule. To platí např. pro posloupnosti $\{2^{4^n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{2^{n^n}\}_{n=1}^{\infty}$. Je-li Lebesgueova míra nulová, můžeme dále zkoumat Hausdorffovu míru, resp. Hausdorffovu dimenzi vyjádřitelných množin, které již nulové být nemusí, viz [16]. Platí například

$$\dim_{\mathrm{H}} X\{2^{4^n}\}_{n=1}^{\infty} \leq \frac{2}{3} \qquad \text{a} \qquad \dim_{\mathrm{H}} X\{2^{n^n}\}_{n=1}^{\infty} = 0.$$

L i t e r a t u r a

[1] Adhikari, S. D., Saradha, N., Shorey, T. N., Tijdeman, R.: *Transcendental Infinite Sums.* Indag. Math. (N.S.) *12* (2001), 1–14.

[2] Apéry, R.: *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$. Astérisque *61* (1979), 11–13.

[3] Baker, A.: *Transcendental Number Theory.* Cambridge Univ. Press, New York, 1975.

[4] Bezkovič, A. S.: *Sets of Fractional Dimensions (IV): on Rational Approximation to Real Numbers.* J. London Math. Soc. *9* (1934), 126–131.

[5] Borwein, P.: *On the Irrationality of Certain Series.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. *112 (1)* (1992), 141–146.

[6] Borwein, P., Zhou, P.: *On the Irrationality of a Certain q Series.* Proc. Amer. Math. Soc. *127 (6)* (1999), 1605–1613.

[7] Dirichlet, P. G. L.: *Werke, vol. 1.* Ed. by L. Kronecker. Reimer, Berlin 1889.

[8] Erdős, P.: *Some Problems and Results on the Irrationality of the Sum of Infinite Series.* J. Math. Sci. *10* (1975), 1–7.

[9] Galambos, J.: *Representations of Real Numbers by Infinite Series.* Springer, New York 1976.

[10] Gel'fond, A. O.: *Sur le septième Problème de D. Hilbert.* C. R. Acad. Sci. URSS Moscow *2* (1934), 1–6.

[11] Gel'fond, A. O.: *Sur le septième Problème de Hilbert.* Bull. Acad. Sci. URSS Leningrade *7* (1934), 623–634.

[12] Genčev, M.: *Transcendence of Certain Infinite Sums Involving Rational Functions.* Acta Math. Univ. Ostrava *15 (1)* (2007), 7–14.

[13] Hančl, J.: *Linearly Unrelated Sequences.* Pacific J. Math. *190* (1999), 299–310.

[14] Hančl, J.: *Liouville Sequences.* Nagoya Math. J. *172* (2003), 173–187.

[15] Hančl, J.: *Transcendental Sequences.* Math. Slovaca *6* (1996), 177–179.

[16] Hančl, J., Nair, R., Šustek, J.: *On the Lebesgue Measure of the Expressible Sets of Certain Sequences.* Indag. Math. (N.S.) *17* (2006), 567–581.

[17] Hančl, J., Rucki, P.: *Certain Liouville series.* Ann. Univ. Ferrara Sci. Mat. *52* (2006), 45–51.

[18] Hančl, J., Rucki, P.: *The Irrationality of Certain Infinite Series.* Saitama Math. J. *21* (2003), 1–8.

[19] Hančl, J., Rucki, P.: *A Note to the Transcendence of Special Infinite Series.* Math. Slovaca *56* (2006), 409–414.

[20] Hančl, J., Rucki, P.: *The Transcendence of Certain Infinite Series.* Rocky Mountain J. Math. *35* (2005), 531–537.

[21] Hančl, J., Schinzel, A., Šustek, J.: *On Expressible Sets of Geometric Sequences.* Funct. Approx. Comment. Math. *38* (2008), 121–145.

[22] Hančl, J., Sobková, S.: *A General Criterion for Linearly Unrelated Sequences.* Tsukuba J. Math. *27* (2003), 341–357.

[23] Hančl, J., Sobková, S.: *Special Linearly Unrelated Sequences.* J. Math. Kyoto Univ. *46* (2006), 31–45.

[24] Hančl, J., Štěpnička, J., Šustek, J.: *Linearly Unrelated Sequences and Problem of Erdos.* Ramanujan J. *17* (2008), 358–372.

[25] Hančl, J., Šustek, J., Jaššová, A.: *Lebesgue Measure and Hausdorff Dimension of Special Sets of Continued Fractions*, zásláno.

[26] Hančl, J., Tijdeman, R.: *On the Irrationality of Cantor Series.* J. Reine Angew. Math. *571* (2004), 145–158.

[27] Hančl, J., Tijdeman, R.: *On the Irrationality of Factorial Series.* Acta Arith. *118* (2005), 383–401.

[28] Hermite, C.: *Sur la fonction exponentielle.* C. R. Acad. Sci. Paris *77* (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[29] Chinčin, A. J.: *Řetězové zlomky.* Přírodovědné nakladatelství, Praha, 1952.

[30] Jarník, V.: *Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass.* Mat. Sbornik *36* (1929), 371–382.

[31] Jarník, V.: *Contribution a la théorie métrique des fractions continues.*, Czech. Math. J. *4(79)* (1954), 318–329.

[32] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím.* Edice Galileo, sv. 39, Academia, Praha, 2009.

[33] Lambert, H.: *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques.* Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin *17* (1761), 1768, 265–322; lu en 1767; Math. Werke, t. II.

[34] Lehmer, D. H.: *Euler Constants for Arithmetical Progression.* Acta Artih. *27* (1975), 125–142.

[35] Liouville, J.: *Nouvelle démonstration d'un théor'eme sur les irrationalles algébriques, inséré dans le Compte rendu de la derniere séance.* C. R. Acad. Sci. Paris *18* (1844), 910–911.

[36] Nesterenko, Yu. V.: *On Algebraic Independence of the Components of Solutions of a System of Linear Differential Equations.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. *38* (1974), 495–512.

[37] Netuka, I., Veselý, J.: *Nedávné poznatky o čísle π.* PMFA *43* (1998), 271–236.

[38] Novák, B.: *A Remark to a Paper of J. F.Koksma „On Niven's Proof that π Is Irrational".* Nieuw Arch. Wisk. *23(3)* (1975), 195–197.

[39] Novák, B.: *O sedmém Hilbertově problému.* PMFA *17* (1972), 245–256.

[40] Parshin, A. N., Shafarevich, I. R. (Eds.): *Encyclopaedia of Mathematical Sciences 44*, Number Theory IV, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1998.

[41] Ribenboim, P.: *My Numbers, my Friends.* Springer, New York 2000.

[42] Roth, K. F.: *Rational Approximations to Algebraic Numbers.* Mathematika *168* (1955), 1–20.

[43] Sándor, J.: *Some Classes of Irrational Numbers.* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. *29* (1984), 3–12.

[44] Schneider, T.: *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I.* J. Reine Angew. Math. *172* (1934), 65–69.

[45] Schneider, T.: *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II.* J. Reine Angew. Math. *172* (1934), 70–74.

[46] Siegel, C. L.: *Approximation algebraischer Zahlen.* Math. Z. *10(3)* (1921), 173–213.

[47] Sylvester, J. J.: *On a Point in the Theory of Vulgar Fractions.* Amer. J. Math. *3(4)* (1880), 332–335.

[48] Šalát, T.: *Nekonečné rady.* Academia, Praha 1974.

[49] Šalát, T. *Über die Cantorschen Reihen.* Czechoslovak Math. J. *18(1)* (1968), 25–56.

[50] Šalát, T., Drahovský, Š.: *On Functions that Preserve Convergence of Continued Fractions.* Tatra Mt. Math. Publ. *8* (1996), 61–65

[51] Thue, A.: *Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen.* J. Reine Angew. Math. *135* (1909), 284–305.

[52] van der Poorten, A.: *A Proof that Euler Missed ...* The Math. Intelligencer *1(4)* (1979), 195–203.

[53] von Lindemann, F.: *Über die Zahl π.* Math. Ann. *20* (1882), 213–225.

[54] Zudilin, W.: *Irrationality of Values of Riemann's Zeta Function.* Russian Acad. Sci. Izv. Math. *66(3)* (2002), 49–102.