

Abdelmalek Azizi; Abdelkader Zekhnini; Mohammed Taous

Sur un problème de capitulation du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$ dont le 2-groupe de classes est élémentaire

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 64 (2014), No. 1, 11–29

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/143944>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR UN PROBLÈME DE CAPITULATION DU CORPS $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$
DONT LE 2-GROUPE DE CLASSES EST ÉLÉMENTAIRE

ABDELMALEK AZIZI, ABDELKADER ZEKHINI, MOHAMMED TAOUS, Oujda

(Received March 13, 2012)

Abstract. Let $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$ be primes such that $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$ and $\left(\frac{2}{a+b}\right) = -1$, where $p_1 p_2 = a^2 + b^2$. Let $i = \sqrt{-1}$, $d = p_1 p_2$, $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, $\mathbb{k}_2^{(1)}$ be the Hilbert 2-class field and $\mathbb{k}^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, i)$ be the genus field of \mathbb{k} . The 2-part $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ of the class group of \mathbb{k} is of type $(2, 2, 2)$, so $\mathbb{k}_2^{(1)}$ contains seven unramified quadratic extensions \mathbb{K}_j/\mathbb{k} and seven unramified biquadratic extensions \mathbb{L}_j/\mathbb{k} . Our goal is to determine the fourteen extensions, the group $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ and to study the capitulation problem of the 2-classes of \mathbb{k} .

Résumé. Soient $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$ des nombres premiers tels que, $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$ et $\left(\frac{2}{a+b}\right) = -1$, où $p_1 p_2 = a^2 + b^2$. Soient $i = \sqrt{-1}$, $d = p_1 p_2$, $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, $\mathbb{k}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de \mathbb{k} et $\mathbb{k}^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, i)$ le corps de genres de \mathbb{k} . La 2-partie $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ du groupe de classes de \mathbb{k} est de type $(2, 2, 2)$, par suite $\mathbb{k}_2^{(1)}$ contient sept extensions quadratiques non ramifiées \mathbb{K}_j/\mathbb{k} et sept extensions biquadratiques non ramifiées \mathbb{L}_j/\mathbb{k} . Dans ce papier on s'intéresse à déterminer ces quatorze extensions, le groupe $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ et à étudier la capitulation des 2-classes d'idéaux de \mathbb{k} dans ces extensions.

Keywords: unit group; class group; Hilbert class field; genus field; capitulation of ideal

MSC 2010: 11R27, 11R29, 11R37

1. INTRODUCTION

Soient k un corps de nombres de degré fini sur \mathbb{Q} , K une extension non ramifiée de k , \mathbf{C}_k et \mathbf{C}_K les groupes des classes d'idéaux de k et K respectivement. Alors on dit qu'une classe d'idéaux de k capitule dans K si elle est dans le noyau de l'homomorphisme $j_K: \mathbf{C}_k \rightarrow \mathbf{C}_K$, qui est induit par l'extension des idéaux de k à K .

This work is partially supported by Hassan II Academy of Sciences and Technology (Morocco) and URAC6.

Soit $d = p_1 p_2$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers tels que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$. Considérons le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ et notons par $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ son 2-groupe de classes. Soient $\mathbb{k}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de \mathbb{k} et $\mathbb{k}^{(*)}$ son corps de genres, alors $\mathbb{k}^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{-1})$. D'après [12], le rang du 2-groupe des classes de \mathbb{k} est égal à 2 ou 3. Si $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ est élémentaire, alors il est de type $(2, 2)$ ou $(2, 2, 2)$. Dans [2], A. Azizi a étudié le problème de capitulation pour le type $(2, 2)$. Dans ce papier on va étudier le même problème pour le deuxième type, mais signalons que A. Azizi et M. Taous ont montré dans [5] que $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ est de type $(2, 2, 2)$ si et seulement si p_1 et p_2 vérifient l'hypothèse (1.1) suivante:

$$(1.1) \quad p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{a+b}\right) = -1, \quad \text{où } p_1 p_2 = a^2 + b^2.$$

Dans ce cas \mathbb{k} admet, dans $\mathbb{k}_2^{(1)}$, sept extensions quadratiques non ramifiées, parmi eux figure $\mathbb{k}^{(*)}$, puisque $[\mathbb{k}^{(*)} : \mathbb{k}] = 2$ (voir [5]), et sept extensions biquadratiques non ramifiées.

Le plan de notre travail est:

- ▷ Détermination des générateurs de $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$.
- ▷ Étude de la capitulation dans le corps de genres de \mathbb{k} .
- ▷ Construction des six autres extensions quadratiques non ramifiées de \mathbb{k} et étude de la capitulation dans ces extensions.
- ▷ Étude de la capitulation dans les extensions biquadratiques du corps \mathbb{k} .

On démontre alors le théorème principal suivant:

Théorème 1.1. *Soient $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1), $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ le 2-groupe de classes de \mathbb{k} . Si $p_1 = e^2 + 16f^2$ et $p_2 = g^2 + 16h^2$, posons $\pi_1 = e + 4if$, $\pi_2 = e - 4if$, $\pi_3 = g + 4ih$ et $\pi_4 = g - 4ih$. Notons par \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1 + i$, π_1 et π_2 respectivement. Alors on a:*

- (1) $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2} = \langle [\mathcal{H}_0^{h(d)/2}], [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$, où $h(d)$ est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$.
- (2) Les sept extensions quadratiques non ramifiées de \mathbb{k} sont: $\mathbb{K}_1 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1})$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_2})$, $\mathbb{K}_3 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_3})$, $\mathbb{K}_4 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_4})$, $\mathbb{K}_5 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1 \pi_3})$, $\mathbb{K}_6 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1 \pi_4})$ et $\mathbb{K}_7 = \mathbb{k}^{(*)}$.
- (3) $|\ker j_{\mathbb{K}_j}| = 2$ ou 4 , où $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- (4) Si on note par \mathbb{L}_j , où $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, les extensions biquadratiques non ramifiées de \mathbb{k} , alors on a: $\ker j_{\mathbb{L}_j} = \langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$ ou bien $\ker j_{\mathbb{L}_j} = \mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$.

Corollaire 1. *Gardons les hypothèses du théorème précédent, alors pour toute extension quadratique non ramifiée \mathbb{K} de \mathbb{k} , on a: $[E_{\mathbb{k}}: N_{\mathbb{K}/\mathbb{k}}(E_{\mathbb{K}})] = 1$ ou 2 , où $E_{\mathbb{k}}$ et $E_{\mathbb{K}}$ sont les groupes des unités de \mathbb{k} et \mathbb{K} respectivement.*

2. LES GÉNÉRATEURS DE $C_{\mathbb{k},2}$

Si $C_{\mathbb{k},2}$ est élémentaire, alors $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$, donc la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est égale à -1 et le 2-nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est égal à 2 (voir [13]). Ce dernier résultat va jouer un rôle important dans la construction des générateurs de $C_{\mathbb{k},2}$. Pour le type $(2, 2)$, les générateurs de $C_{\mathbb{k},2}$ sont deux classes d'idéaux de \mathbb{k} au dessus de p_1 . On commence cette section par citer quelques résultats:

Proposition 1 ([3]). *Soient a un entier composé, impair et sans facteurs carrés, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, i)$, $C_{k,2}$ le 2-groupe de classes de k , l un nombre premier et \mathcal{H} un idéal de k tel que $\mathcal{H}^2 = (l)$. Alors si l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ est de norme -1 , \mathcal{H} est d'ordre 2 dans $C_{k,2}$.*

Comme $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$, alors d'après Barruccand et Cohn [6], ils existent des entiers e, f, g et h tels que $p_1 = e^2 + 16f^2$ et $p_2 = g^2 + 16h^2$, posons $\pi_1 = e + 4if$, $\pi_2 = e - 4if$, $\pi_3 = g + 4ih$ et $\pi_4 = g - 4ih$. On sait que ces nombres sont des premiers ramifiés dans $\mathbb{k}/\mathbb{Q}(i)$, alors ils existent des idéaux premiers $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ et \mathcal{H}_4 de \mathbb{k} tels que: $\pi_j \mathcal{O}_{\mathbb{k}} = (\pi_j) = \mathcal{H}_j^2$ ($j \in \{1, 2, 3, 4\}$), où $\mathcal{O}_{\mathbb{k}}$ est l'anneau des entiers du corps \mathbb{k} .

Proposition 2. *Si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ et \mathcal{H}_4 désignent les idéaux de \mathbb{k} au dessus de π_1, π_2, π_3 et π_4 respectivement, alors les idéaux $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4, \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_1\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4$ et $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4$ sont d'ordre 2 dans \mathbb{k} .*

Preuve. 1) $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4$ sont d'ordre 2 dans \mathbb{k} en effet: on a $(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)^2 = (p_1)$ et $(\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4)^2 = (p_2)$, alors la Proposition 1 implique les résultats.

2) \mathcal{H}_1 est d'ordre 2 dans \mathbb{k} , sinon il existe un $\alpha \in \mathbb{k}$ tel que $\mathcal{H}_1 = (\alpha)$, donc $\mathcal{H}_1^2 = (\pi_1) = (\alpha^2)$, alors il existe une unité ε de \mathbb{k} telle que $\alpha^2 = \pi_1\varepsilon$, et comme $d = p_1p_2 \equiv 1 \pmod{4}$, alors d'après [5] \mathbb{Q} , l'indice d'unités de \mathbb{k} , est égal 1 , donc ε est un nombre réel ou bien un nombre purement imaginaire. Les deux cas se traitent de la même façon.

Supposons que ε est réel. Soit $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ avec α_1 et α_2 deux nombres réels de \mathbb{k} , on a: $(\alpha_1 + i\alpha_2)^2 = (e + 4if)\varepsilon$, c'est à dire que:
$$\begin{cases} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = e\varepsilon; \\ \alpha_1\alpha_2 = 2f\varepsilon. \end{cases}$$
 On trouve que $\alpha_1 = (\alpha_2/4f)(e \pm \sqrt{p_1})$, et comme α_1, α_2, e et f sont dans \mathbb{k} , alors $\sqrt{p_1} \in \mathbb{k}$, ce qui est absurde.

De la même façon on montre que $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4, \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_1\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4$ et $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4$ sont d'ordre 2 dans \mathbb{k} . \square

Pour montrer la proposition suivante on a besoin du lemme:

Lemme 1. Soient $d = p_1p_2$ où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers tels que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$ et $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$, $\varepsilon_d = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{d})$ l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, alors ils existent y_1, y_2 dans $\mathbb{Z}[i]$ tels que $y = y_1y_2$ et $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend l'une des formes suivantes:

- (1) $\pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_3} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_4})$.
- (2) $\pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_4} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_3})$.
- (3) $\pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{-i\pi_1\pi_3} + y_2\sqrt{i\pi_2\pi_4})$.
- (4) $\pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{-i\pi_1\pi_4} + y_2\sqrt{i\pi_2\pi_3})$.

Preuve. Soit ε_d l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, donc ils existent des entiers naturels x et y tels que: $x^2 + 4 = y^2d$. D'après la décomposition de y dans $\mathbb{Z}[i]$, ils existent y_1, y_2 dans $\mathbb{Z}[i]$ tels que $y = y_1y_2$, et comme $d = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$, $\overline{\pi_1} = \pi_2$ et $\overline{\pi_3} = \pi_4$ (le conjugué complexe), alors on a:

i) La décomposition de $x^2 + 4$ dans $\mathbb{Z}[i]$ implique que:

$$\begin{aligned} 2x &= y_1^2\pi_1\pi_3 + y_2^2\pi_2\pi_4 \quad \text{ou} \quad 2x = y_1^2\pi_1\pi_4 + y_2^2\pi_2\pi_3 \quad \text{ou} \\ 2x &= y_1^2\pi_2\pi_3 + y_2^2\pi_1\pi_4 \quad \text{ou} \quad 2x = y_1^2\pi_2\pi_4 + y_2^2\pi_1\pi_3. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_d &= \frac{1}{4}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_3} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_4})^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_d = \frac{1}{4}(y_2\sqrt{\pi_1\pi_3} + y_1\sqrt{\pi_2\pi_4})^2 \quad \text{ou} \\ \varepsilon_d &= \frac{1}{4}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_4} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_3})^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_d = \frac{1}{4}(y_2\sqrt{\pi_1\pi_4} + y_1\sqrt{\pi_2\pi_3})^2. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_d} &= \pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_3} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_4}) \quad \text{ou} \quad \sqrt{\varepsilon_d} = \pm\frac{1}{2}(y_2\sqrt{\pi_1\pi_3} + y_1\sqrt{\pi_2\pi_4}) \quad \text{ou} \\ \sqrt{\varepsilon_d} &= \pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_4} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_3}) \quad \text{ou} \quad \sqrt{\varepsilon_d} = \pm\frac{1}{2}(y_2\sqrt{\pi_1\pi_4} + y_1\sqrt{\pi_2\pi_3}). \end{aligned}$$

Et comme y_1 et y_2 jouent des rôles symétriques, alors

$$\sqrt{\varepsilon_d} = \pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_3} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_4}) \quad \text{ou} \quad \sqrt{\varepsilon_d} = \pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_4} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_3}).$$

ii) Dans i) en remplaçant d par $-i^2d = d$ et en tenant compte que y_1 et y_2 (resp. i et -i) jouent des rôles symétriques, on trouve que:

$$\sqrt{\varepsilon_d} = \pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{-i\pi_1\pi_3} + y_2\sqrt{i\pi_2\pi_4}) \quad \text{ou} \quad \sqrt{\varepsilon_d} = \pm\frac{1}{4}(y_1\sqrt{-i\pi_1\pi_4} + y_2\sqrt{i\pi_2\pi_3}).$$

Et ceci achève la démonstration du lemme. \square

Proposition 3. Soient $d = p_1 p_2$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers tels que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$ et $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$, ε_d l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ et \mathcal{H}_4 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de π_1, π_2, π_3 et π_4 respectivement, alors on a:

- (i) $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_3 \mathcal{H}_4$ est un idéal principal dans \mathbb{k} .
- (ii) Si $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend la forme (1) ou bien (3) du Lemme 1, alors $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_4$ sont principaux dans \mathbb{k} .
- (iii) Si $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend la forme (2) ou bien (4) du Lemme 1, alors $\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_4$ sont principaux dans \mathbb{k} .

P r e u v e. (i) Comme $(\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_3 \mathcal{H}_4)^2 = (p_1 p_2) = (d)$, alors $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_3 \mathcal{H}_4 = (\sqrt{d})$.

(ii) L'idéal $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_3$ devient principal dans \mathbb{k} , si et seulement si l'équation en α , $\pi_1 \pi_3 \varepsilon = \alpha^2$, où ε est une unité de \mathbb{k} , est résoluble dans \mathbb{k} . Comme Q , l'indice d'unités de \mathbb{k} , est égal à 1 (voir [5]), alors ε est un nombre réel ou bien un nombre purement imaginaire, pour toutes les valeurs que peut prendre ε , on se ramène aux cas $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i, \varepsilon_d, i\varepsilon_d\}$.

(a) Les cas $\varepsilon = \pm 1$ ou $\pm i$, ne peuvent pas se produire pour l'idéal $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_3$ (resp. $\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_4$), car sinon on aura $\sqrt{\pi_1 \pi_3} \in \mathbb{k}$ ou $\sqrt{i\pi_1 \pi_3} \in \mathbb{k}$ (resp. $\sqrt{\pi_2 \pi_4} \in \mathbb{k}$ ou $\sqrt{i\pi_2 \pi_4} \in \mathbb{k}$), ce qui est absurde.

(b) Si $\varepsilon = \varepsilon_d$, posons $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ avec α_1 et α_2 deux nombres réels, alors $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_1\alpha_2 = \varepsilon(eg - 16fh) + 4i\varepsilon(eh + gf)$, par suite

$$\begin{cases} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \varepsilon(eg - 16fh), \\ 2\alpha_1\alpha_2 = 4\varepsilon(eh + gf). \end{cases}$$

Or $\pi_1 \pi_3 = (e + 4if)(g + 4ih) = (eg - 16fh) + 4i(eh + gf)$, d'où $\alpha_2 = 2(eh + gf)\varepsilon/\alpha_1$, on trouve alors que: $\alpha_1^4 - \varepsilon(eg - 16fh)\alpha_1^2 - 4((eh + gf)^2\varepsilon^2) = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = \varepsilon^2((eg - 16fh)^2 + 16(eh + gf)^2) = \varepsilon^2 d$, donc $\alpha_1^2 = \frac{1}{2}\varepsilon[(eg - 16fh) + \sqrt{d}]$, or $\pi_1 \pi_3 + \pi_2 \pi_4 = 2(eg - 16fh)$ et $\sqrt{d} = \sqrt{\pi_1 \pi_3} \sqrt{\pi_2 \pi_4}$, alors $\alpha_1^2 = \frac{1}{2}\varepsilon(\sqrt{\pi_1 \pi_3}/2 + \sqrt{\pi_2 \pi_4}/2)^2$, ceci implique que: $\alpha_1 = \pm\sqrt{\varepsilon}/2(\sqrt{\pi_1 \pi_3}/2 + \sqrt{\pi_2 \pi_4}/2)$ et $\alpha_2 = 2(eh + gf)\varepsilon/\alpha_1$, d'où $\alpha_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\pi_1 \pi_3} + \sqrt{\pi_2 \pi_4})$. Or $\varepsilon = \varepsilon_d$, donc si on donne à $\sqrt{\varepsilon_d}$ la valeur (1) du Lemme 1, on trouve alors que: $\alpha_1 = \pm\frac{1}{4}(y_1 \pi_1 \pi_3 + y_2 \pi_2 \pi_4 + (y_1 + y_2)\sqrt{d})$ et $\alpha_2 = 2(eh + gf)\varepsilon/\alpha_1$ et il est clair que α_1 et α_2 sont dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; par suite $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_3$ est principal dans \mathbb{k} . On procède de la même façon pour prouver que $\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_4$ est principal.

(c) Soit $\varepsilon = i\varepsilon_d$, alors en procédant comme dans le cas (b) et en posant $\sqrt{d} = \sqrt{-i^2 d} = \sqrt{i\pi_1 \pi_3} \sqrt{-i\pi_2 \pi_4}$, on trouve que $\alpha_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{i\pi_1 \pi_3} + \sqrt{-i\pi_2 \pi_4})$, donc si on donne à $\sqrt{\varepsilon}$ la valeur (3) du Lemme 1, on trouvera alors que $\alpha_1 = \pm\frac{1}{4}(y_1 i\pi_1 \pi_3 - y_2 i\pi_2 \pi_4 + (y_1 + y_2)\sqrt{d})$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}(eg - 16fh)\varepsilon/\alpha_1$, il est clair que α_1 et α_2 apparti-

ennent à $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Par suite $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_3$ est principal dans \mathbb{k} . Par la même façon on prouve que l'idéal $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_4$ est principal dans \mathbb{k} .

(iii) Même démonstration que (ii).

Remarquons enfin que $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_4$ (resp. $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_4$) ne peuvent pas être principaux en même temps, s'ils sont ainsi, alors ils existent α et β (resp. γ et δ) dans \mathbb{k} tels que $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_3 = (\alpha)$ et $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_4 = (\beta)$ (resp. $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3 = (\gamma)$ et $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_4 = (\delta)$). Alors $\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4 = (\alpha\beta\pi_1^{-1})$ ou bien $\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4 = (\gamma\delta\pi_2^{-1})$ et ceci contredit la Proposition 2. \square

Dans ce qui va suivre, on adoptera les notations et les conventions suivantes: \mathcal{O}_k est l'anneau des entiers du corps k . Si l est un nombre premier de \mathbb{Q} , on note par \mathfrak{l}_k , l'un des idéaux premiers au-dessus de l : $\mathfrak{l}_k^1, \mathfrak{l}_k^2, \dots$, d'un corps de nombres k . On désigne par $\left(\frac{x}{\mathfrak{l}_k}\right)$ le symbole des restes quadratiques pour l'idéal \mathfrak{l}_k appliqué à x . Si $l \equiv 1 \pmod{8}$, rappelons que le symbole $\left(\frac{2}{l}\right)_4$ (biquadratique rationnel) est égal à 1 ou -1 , suivant que $2^{(l-1)/4} \equiv \pm 1 \pmod{l}$. Le symbole $\left(\frac{l}{2}\right)_4$ est égal à $(-1)^{(l-1)/8}$. Le symbole dont le dominateur est composé est défini multiplicativement. Par exemple si $A = 2$ et $P = d = p_1p_2 = a^2 + b^2$, où $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$, nous avons le lemme suivant:

Lemme 2 ([10]). *Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers tels que $d = p_1p_2 = a^2 + b^2$ et $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$. Alors*

$$\left(\frac{2}{d}\right)_4 \left(\frac{d}{2}\right)_4 = \left(\frac{2}{a+b}\right) = \left(\frac{2}{p_1}\right)_4 \left(\frac{p_1}{2}\right)_4 \left(\frac{2}{p_2}\right)_4 \left(\frac{p_2}{2}\right)_4.$$

Pour prouver le théorème suivant, nous donnons quelques lemmes:

Lemme 3 ([11]). *On garde les notations ci-haut. Supposons que $p \equiv 1 \pmod{8}$, alors*

$$\left(\frac{i}{\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}(i)}}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+i}{\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}(i)}}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)_4 \left(\frac{p}{2}\right)_4.$$

Lemme 4. *Soient $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, où $d = p_1p_2 = a^2 + b^2$, $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$ et \mathcal{H}_0 l'idéal premier de \mathbb{k} au dessus de $1+i$. Si $\left(\frac{2}{a+b}\right) = -1$, alors pour tout entier naturel n impair, \mathcal{H}_0^n est un idéal non principal dans \mathbb{k} .*

Preuve. Supposons que \mathcal{H}_0^n est un idéal principal dans \mathbb{k} , pour un entier naturel n impair, alors il existe $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{d} \in \mathbb{k}$ tel que les α_i sont dans $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathcal{H}_0^n = \alpha\mathcal{O}_{\mathbb{k}}$. Comme $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$, alors le nombre $1+i$ se décompose dans $\mathbb{k}/\mathbb{Q}(i)$, par suite il existe \mathcal{H}'_0 un autre idéal premier de \mathbb{k} au dessus de $1+i$ tel que $\mathcal{H}_0\mathcal{H}'_0 = (1+i)\mathcal{O}_{\mathbb{k}}$. Remarquons que \mathcal{H}'_0 est le conjugué de \mathcal{H}_0 dans $\mathbb{k}/\mathbb{Q}(i)$, ce qui nous permet d'écrire: $(1+i)^n = \varepsilon(\alpha_1^2 - d\alpha_2^2)$, où ε est une unité de $\mathbb{Q}(i)$, c'est-à-dire

$\varepsilon = \pm 1$ ou $\pm i$. Comme les α_i^2 sont des carrés dans $\mathbb{Q}(i)$ et n est impair, alors le Lemme précédent entraîne que

$$\left(\frac{1+i}{\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}(i)}}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}(i)}}\right) = \left(\frac{2}{p_1}\right)_4 \left(\frac{p_1}{2}\right)_4 = \left(\frac{2}{p_2}\right)_4 \left(\frac{p_2}{2}\right)_4 = 1.$$

À l'aide de ce résultat et du Lemme 2, nous trouvons que $\left(\frac{2}{a+b}\right) = 1$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ. \square

Lemme 5. *On garde les notations ci-haut. Si p_1, p_2 sont deux nombres premiers tels que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$, $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$ et $h(d)$ le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$, alors*

- (i) *Le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ est engendré par la classe de $\mathfrak{p}_{i\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})}$;*
- (ii) *L'idéal $(2_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})})^{h(d)/2}$ est principal.*

Preuve. (i) Nous avons déjà rappelé que le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ est cyclique d'ordre 2. Cherchons une classe de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ d'ordre 2, il est clair que p_i se ramifie dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})/\mathbb{Q}$, donc $p_i \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})} = \mathfrak{p}_{i\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})}^2$ et $\mathfrak{p}_{i\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})}$ est un idéal non-principal, car sinon il doit exister ε , une unité de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$, telle que $p_i \varepsilon$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$, ceci montre que $p_i \varepsilon_{p_1 p_2}$ ou bien p_i est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$, nous avons trouvé une contradiction, puisque la norme de l'unité fondamentale $\varepsilon_{p_1 p_2}$ est égale à -1 et $\sqrt{p_i} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$. Ceci montre que le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ est engendré par la classe de $\mathfrak{p}_{i\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})}$.

(ii) Comme $2_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})}$ est un idéal de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ et $h(d)$ le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$, alors $(2_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})})^{h(d)}$ est principal dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$. Si nous supposons que $(2_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})})^{h(d)/2}$ est non-principal, il s'en suit que la classe de $(2_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})})^{h(d)/2}$ est aussi un générateur du 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$. On déduit du (i) que $(2_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})})^{h(d)/2} \mathfrak{p}_{i\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})}$ est un idéal principal dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$. Or p_i se ramifie dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})/\mathbb{Q}$ et 2 se décompose totalement dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})/\mathbb{Q}$, car $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$. Ce qui nous permet d'écrire en prenant la norme: $2p_i = \alpha^2 - p_1 p_2 \beta^2$ où α^2 et β^2 sont dans \mathbb{Q} et de conclure que: $1 = \left(\frac{2p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{2}{p_2}\right) \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. Ceci donne justement la contradiction avec notre hypothèse. Finalement $(2_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})})^{h(d)/2}$ est un idéal principal. \square

Théorème 2.1. *Soient $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, où $d = p_1 p_2$ avec p_1 et p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1), $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ le 2-groupe de classes de \mathbb{k} . Si $p_1 = \pi_1 \pi_2$, où π_1 et π_2 sont dans $\mathbb{Z}[i]$, notons par $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1+i, \pi_1$ et π_2 respectivement. Alors $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ est engendré par les classes de $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}, \mathcal{H}_1$ et \mathcal{H}_2 , où $h(d)$ est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.*

Preuve. Notons par $[\mathcal{H}_0^{h(d)/2}], [\mathcal{H}_1]$ et $[\mathcal{H}_2]$ les classes des idéaux $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}, \mathcal{H}_1$ et \mathcal{H}_2 respectivement. La Proposition 2 montre que le sous-groupe de $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ engendré

par $[\mathcal{H}_1]$ et $[\mathcal{H}_2]$ est de type $(2, 2)$. Comme $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ est de type $(2, 2, 2)$, alors pour que $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ soit engendré par les classes de $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$, \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , où $h(d)$ est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, il suffit que les idéaux $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$, $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ soient d'ordre 2 dans \mathbb{k} .

Montrons que $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ est un idéal d'ordre 2 dans \mathbb{k} . D'après [13], $h(d)/2$ est un entier naturel impair, alors le Lemme 4 implique que $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ est un idéal non-principal dans \mathbb{k} , or $\mathcal{H}_0^{h(d)} = (\mathcal{H}_0^2)^{h(d)/2} = (2_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})^{h(d)/2}\mathcal{O}_{\mathbb{k}}$, car $2_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ est un idéal premier ramifié dans $\mathbb{k}/\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Le Lemme précédent montre que $\mathcal{H}_0^{h(d)}$ est un idéal principal dans \mathbb{k} , c'est-à-dire que $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ est un idéal d'ordre 2.

Montrons par l'absurde que $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}\mathcal{H}_i$ est un idéal d'ordre 2 dans \mathbb{k} . Si par exemple $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}\mathcal{H}_1$ est principal, en prenant la norme dans $\mathbb{k}/\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, nous trouvons que $(2_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})})^{h(d)/2}\mathfrak{p}_{1, \mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ est un idéal principal dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ensuite $\mathfrak{p}_{1, \mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ est principal dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Ceci est évidemment contradictoire avec le Lemme précédent.

Montrons par l'absurde aussi que l'idéal $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ est d'ordre 2 dans \mathbb{k} . S'il est principal, il existe un $\alpha \in \mathbb{k}$ tel que $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2 = (\alpha)$ et puisque $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3\mathcal{H}_4$ est un idéal principal dans \mathbb{k} (Proposition 3), alors il existe un $\beta \in \mathbb{k}$ tel que $\mathcal{H}_0^{h(d)/2} \times \mathcal{H}_3\mathcal{H}_4 = (\beta)$, en prenant la norme dans $\mathbb{k}/\mathbb{Q}(i)$, nous trouvons que $(1+i)^{h(d)/2}p_1 = \varepsilon(\alpha_1^2 - \alpha_2^2d)$ et $(1+i)^{h(d)/2}p_2 = \varepsilon'(\beta_1^2 - \beta_2^2d)$, avec $\varepsilon, \varepsilon'$ deux unités de $\mathbb{Q}(i)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 des éléments de $\mathbb{Q}(i)$. Ceci implique que

$$\left(\frac{1+i}{\mathfrak{p}_{2, \mathbb{Q}(i)}}\right)\left(\frac{p_1}{\mathfrak{p}_{2, \mathbb{Q}(i)}}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+i}{\mathfrak{p}_{1, \mathbb{Q}(i)}}\right)\left(\frac{p_2}{\mathfrak{p}_{1, \mathbb{Q}(i)}}\right) = 1.$$

Comme

$$\left(\frac{p_1}{\mathfrak{p}_{2, \mathbb{Q}(i)}}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{p_2}{\mathfrak{p}_{1, \mathbb{Q}(i)}}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

et comme aussi $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$, alors le Lemme 3 implique que

$$\left(\frac{2}{p_1}\right)_4 \left(\frac{p_1}{2}\right)_4 = \left(\frac{2}{p_2}\right)_4 \left(\frac{p_2}{2}\right)_4 = -1.$$

Enfin et avec le Lemme 2 nous avons que $\left(\frac{2}{a+b}\right) = 1$, ce qui est absurde. \square

3. CAPITULATION DANS LE CORPS DE GENRES DE \mathbb{k}

Soient $d = p_1 p_2$ tel que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$, $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$ et $\left(\frac{2}{a+b}\right) = -1$, où $d = a^2 + b^2$. Soit $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$. On note par $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ le 2-sous groupe de Sylow du groupe de classes de \mathbb{k} . D'après [5], $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit $\mathbb{k}^{(*)}$ le corps de genres de \mathbb{k} (l'extension maximale non ramifiée de \mathbb{k} qui est abélienne sur \mathbb{Q}). Soient $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ un corps biquadratique, Q_F l'indice du groupe engendré par les groupes des unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1 d_2})$ dans le groupe des unités de F , si $d_1 = d \neq 2, 3$ et $d_2 = -1$, alors Q_F est l'indice de Hasse de F . On sait d'après [8] que le nombre de classes qui capitulent dans une extension cyclique non ramifiée M/N est égal à :

$$(3.1) \quad [M : N][E_N : \mathcal{N}_{M/N}(E_M)]$$

où E_N (resp. E_M) est le groupe des unités de N (resp. M), alors pour calculer le nombre de classes qui capitulent dans $\mathbb{k}^{(*)}/\mathbb{k}$ il faut chercher un système fondamental d'unités (SFU) de $\mathbb{k}^{(*)}$. On sait que $\mathbb{k}^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, i)$, posons $\mathbb{k}_+^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2})$, comme p_1 et p_2 sont congrus à 1 (mod 4), alors d'après [2], $Q = [E_{\mathbb{k}^{(*)}} : WE_{\mathbb{k}_+^{(*)}}] = 1$, où W est le groupe des racines de l'unité contenues dans $\mathbb{k}^{(*)}$, $E_{\mathbb{k}^{(*)}}$ le groupe des unités de $\mathbb{k}^{(*)}$ et $E_{\mathbb{k}_+^{(*)}}$ celui de $\mathbb{k}_+^{(*)}$. Donc $\mathbb{k}^{(*)}$ et $\mathbb{k}_+^{(*)}$ ont même SFU.

Théorème 3.1. *Soient p_1, p_2 deux nombres premiers tels que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$ et $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$. Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, i)$ et K_0 son sous-corps réel maximal. Soient $\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}$ et $\varepsilon_{p_1 p_2}$ les unités fondamentales de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p_2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ respectivement. Alors $\{\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}, \sqrt{\varepsilon_{p_1} \varepsilon_{p_2} \varepsilon_{p_1 p_2}}\}$ est un SFU de K_0 et de K .*

Preuve. Même démonstration que le théorème (5) page 16 de l'article [2]. \square

Théorème 3.2. *Soit le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$, où p_1, p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1) et soit $\mathbb{k}^{(*)}$ le corps de genres de \mathbb{k} . Alors quatre classes de $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ capitulent dans $\mathbb{k}^{(*)}$.*

Preuve. Dans ce cas, le corps de genres de \mathbb{k} est $\mathbb{k}^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, i)$. Soient $\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}$ et $\varepsilon_{p_1 p_2}$ les unités fondamentales de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p_2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ respectivement, alors la norme de chacune de ces unités est égale à -1 . De plus, on sait d'après le Théorème 3.1 que $\mathbb{k}^{(*)}$ et son sous-corps réel maximal ont $\{\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}, \sqrt{\varepsilon_{p_1} \varepsilon_{p_2} \varepsilon_{p_1 p_2}}\}$ comme SFU. Et comme la norme de $\varepsilon_{p_1 p_2}$ est égale à -1 , alors d'après [4], $\{\varepsilon_{p_1 p_2}\}$ est un SFU de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$. Notons par N la norme de $\mathbb{k}^{(*)}/\mathbb{k}$, alors on a :

$$\triangleright E_{\mathbb{k}^{(*)}} \text{ est engendré par } \{i, \varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}, \sqrt{\varepsilon_{p_1} \varepsilon_{p_2} \varepsilon_{p_1 p_2}}\};$$

- ▷ $E_{\mathbb{k}}$ est engendré par $\{i, \varepsilon_{p_1 p_2}\}$;
- ▷ $N(E_{\mathbb{k}^{(*)}})$ est engendré par $\{\pm 1, \varepsilon_{p_1 p_2}\}$.

Donc $[E_{\mathbb{k}} : N(E_{\mathbb{k}^{(*)}})] = 2$, par suite d'après la formule (3.1), quatre classes de $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ capitulent dans $\mathbb{k}^{(*)}$. Donc on a le théorème énoncé. \square

Le théorème suivant nous donne les quatre classes de $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ qui capitulent dans $\mathbb{k}^{(*)}$.

Théorème 3.3. *Soient le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$, où p_1, p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1) et $\mathbb{k}^{(*)}$ le corps de genres de \mathbb{k} . Si $p_1 = e^2 + 16f^2$, posons $\pi_1 = e + 4if$ et $\pi_2 = e - 4if$. Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de π_1 et π_2 respectivement. Alors $\ker j_{\mathbb{k}^{(*)}} = \langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$.*

Preuve. Soit ε_{p_1} l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, comme $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$, alors $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{p_1})/\mathbb{Q}}(\varepsilon_{p_1}) = -1$, posons $\varepsilon_{p_1} = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{p_1})$, donc on a : $x^2 + 4 = y^2 p_1$, d'où $(x - 2i)(x + 2i) = y^2 p_1$. Du fait que $(x - 2i) + (x + 2i) = 4i$, alors le plus grand commun diviseur de $(x - 2i)$ et $(x + 2i)$ est un diviseur de $4i$ et d'après l'unicité de la décomposition dans $\mathbb{Z}[i]$, ils existent y_1 et y_2 de $\mathbb{Z}[i]$ tels que :

$$\begin{cases} x - 2i = y_1^2 \pi_1, \\ x + 2i = y_2^2 \pi_2, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 2i = y_1^2 \pi_2, \\ x + 2i = y_2^2 \pi_1. \end{cases}$$

Avec $p_1 = \pi_1 \pi_2$, $y = y_1 y_2$ et π_2 (resp. y_2) est le conjugué complexe de π_1 (resp. y_1) (on se contente de ces deux cas car y_1 et y_2 jouent des rôles symétriques); par suite $2x = y_1^2 \pi_1 + y_2^2 \pi_2$ ou $2x = y_1^2 \pi_2 + y_2^2 \pi_1$.

▷ Si $2x = y_1^2 \pi_1 + y_2^2 \pi_2$, posons $\alpha = \frac{1}{2}(y_1 \pi_1 + y_2 \sqrt{p_1})$ et $\beta = \frac{1}{2}(y_2 \pi_2 + y_1 \sqrt{p_1})$; donc α et β sont dans $\mathbb{k}^{(*)} = \mathbb{k}(\sqrt{p_1})$ et comme $p_1 = \pi_1 \pi_2$, $\varepsilon_{p_1} = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{p_1})$ et $y = y_1 y_2$, alors on a : $\alpha^2 = \pi_1 \varepsilon_{p_1}$ et $\beta^2 = \pi_2 \varepsilon_{p_1}$; or ε_{p_1} est une unité de $\mathbb{k}^{(*)}$, donc $(\alpha^2) = (\pi_1) = \mathcal{H}_1^2$ et $(\beta^2) = (\pi_2) = \mathcal{H}_2^2$, par suite $(\alpha) = \mathcal{H}_1$ et $(\beta) = \mathcal{H}_2$, c'est à dire que les classes de \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 capitulent dans $\mathbb{k}^{(*)}$.

▷ Si $2x = y_1^2 \pi_2 + y_2^2 \pi_1$, posons $\alpha = \frac{1}{2}(y_2 \pi_1 + y_1 \sqrt{p_1})$ et $\beta = \frac{1}{2}(y_1 \pi_2 + y_2 \sqrt{p_1})$, alors on trouve que $(\alpha) = \mathcal{H}_1$ et $(\beta) = \mathcal{H}_2$. Donc les quatre classes qui capitulent dans $\mathbb{k}^{(*)}$ sont $[\mathcal{H}_1]$, $[\mathcal{H}_2]$, $[\mathcal{H}_1][\mathcal{H}_2]$ et la classe unité de $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$. \square

4. CAPITULATION DANS LES AUTRES EXTENSIONS QUADRATIQUES NON-RAMIFIÉES DE \mathbb{k}

Dans cette partie on va étudier la capitulation des éléments de $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$, le 2-groupe de classes de \mathbb{k} , dans les six autres extensions quadratiques non ramifiées de \mathbb{k} . Mais avant ça nous les construirons.

Théorème 4.1. Soit $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$ où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1). Si on pose $p_1 = e^2 + 16f^2$, $p_2 = g^2 + 16h^2$, $\pi_1 = e + 4if$, $\pi_2 = e - 4if$, $\pi_3 = g + 4ih$ et $\pi_4 = g - 4ih$, alors les sept extensions quadratiques non ramifiées de \mathbb{k} sont: $\mathbb{K}_1 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1})$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_2})$, $\mathbb{K}_3 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_3})$, $\mathbb{K}_4 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_4})$, $\mathbb{K}_5 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1 \pi_3})$, $\mathbb{K}_6 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1 \pi_4})$ et $\mathbb{k}^{(*)}$.

Preuve. i) Il est clair que l'extension quadratique $\mathbb{k}^{(*)}/\mathbb{k}$ est non ramifiée.

Comme $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{8}$, alors ils existent des entiers naturels e, f, g et h tels que $p_1 = e^2 + 16f^2$ et $p_2 = g^2 + 16h^2$; posons $\pi_1 = e + 4if$, $\pi_2 = e - 4if$, $\pi_3 = g + 4ih$ et $\pi_4 = g - 4ih$. Considérons les extensions $\mathbb{K}_1 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1})$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_2})$, $\mathbb{K}_3 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_3})$, $\mathbb{K}_4 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_4})$, $\mathbb{K}_5 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1 \pi_3})$ et $\mathbb{K}_6 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1 \pi_4})$.

ii) Supposons que $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$, c'est-à-dire $\mathbb{k}(\sqrt{\pi_1}) = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_2})$, alors il existe $t \in \mathbb{k}$ tel que $\pi_1 = t^2 \pi_2$, ce qui montre que $p_1 = t^2 \pi_2^2$, et ceci n'est pas le cas, car $\sqrt{p_1} \notin \mathbb{k}$. Comme les premiers π_1 et π_2 sont des premiers ramifiés dans $\mathbb{k}/\mathbb{Q}(i)$, alors les idéaux engendrés par π_1 et π_2 sont des carrés d'idéaux de \mathbb{k} , de plus e est un nombre impair, donc $e \equiv \mp 1 \equiv i^2 \pmod{4}$, alors les équations $\pi_i \equiv \xi^2 \pmod{4}$ sont résolubles dans \mathbb{k} . Donc d'après [9], les extensions \mathbb{K}_1 et \mathbb{K}_2 sont des extensions quadratiques différentes non ramifiées de \mathbb{k} .

iii) Supposons que $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_3$, c'est-à-dire que $\mathbb{k}(\sqrt{\pi_1}) = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_3})$, alors il existe $t \in \mathbb{k}$ tel que $\pi_1 = t^2 \pi_3$, ce qui montre que $N_{\mathbb{k}/\mathbb{Q}(\sqrt{d})}(\pi_1) = N_{\mathbb{k}/\mathbb{Q}(\sqrt{d})}(t)^2 N_{\mathbb{k}/\mathbb{Q}(\sqrt{d})}(\pi_3)$, par suite $p_1 = t'^2 p_3$; où $t' \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, alors p_2 divise p_1 , ce qui est absurde. D'autre part les idéaux engendrés par π_1 et π_3 sont des carrés d'idéaux de \mathbb{k} et comme e et g sont des nombres impairs, alors les extensions \mathbb{K}_1 et \mathbb{K}_3 sont quadratiques différentes non ramifiées de \mathbb{k} .

Par la même méthode, on montre que les extensions cités ultérieurement sont différentes deux à deux et sont non ramifiées. \square

Théorème 4.2. Soit le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1). Posons $p_1 = e^2 + 16f^2$, $\pi_1 = e + 4if$ et $\pi_2 = e - 4if$. Notons par \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1 + i$, π_1 et π_2 respectivement. Soient les extensions $\mathbb{K}_j = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_j})$, où $j \in \{1, 2\}$, notons par $h(d)$ le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Alors, pour $j \in \{1, 2\}$, on a: $\ker j_{\mathbb{K}_j} = \langle [\mathcal{H}_j] \rangle$ ou bien $\ker j_{\mathbb{K}_j} = \langle [\mathcal{H}_j], [\mathcal{H}_0^{h(d)/2}] \rangle$.

Avant de montrer ce théorème rappelons le résultat suivant:

Théorème 4.3 ([11]). Soit K/k une extension finie normale de corps de nombres, alors on a:

- (1) Si le degré d'inertie d'un idéal \mathfrak{p} est égal à 1 dans K/k et \mathfrak{B} est un idéal premier fini de K au dessus de \mathfrak{p} , alors $(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}) = [\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}]$, où $\alpha \in \mathcal{O}_k$, l'anneau des entiers de k .

(2) Si K/k est abélienne et \mathfrak{p} est un idéal premier de k , alors $(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}) = [\frac{N_{K/k}(\alpha)}{\mathfrak{p}}]$, avec $\alpha \in \mathcal{O}_K$, l'anneau des entiers de K .

Ici, $(-)$ (resp. $[-]$) est le symbole des restes quadratiques de K (resp. k).

Preuve. Dans tous ce qui suit, on prend $d = p_1 p_2$ et $\mathcal{B} = \{\pm 1, \pm i, i\varepsilon_d, \varepsilon_d\}$, où ε_d est l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

On sait que $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$, le 2-groupe de classes de \mathbb{k} , est engendré par les classes de $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$, \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , où $h(d)$ est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

1) Pour $j \in \{1, 2\}$, la classe de l'idéal \mathcal{H}_j capitule dans \mathbb{K}_j , en effet, on a: $(\pi_j) = \mathcal{H}_j^2$, alors $\mathcal{H}_j = (\sqrt{\pi_j})$, d'où les résultats.

2) $[\mathcal{H}_2]$ la classe de \mathcal{H}_2 ne capitule pas dans \mathbb{K}_1 ; sinon, il existe un élément $\alpha \in \mathbb{K}_1$ tel que $\mathcal{H}_2 = (\alpha)$, donc $(\pi_2) = \mathcal{H}_2^2 = (\alpha^2)$, par suite il existe une unité $\varepsilon \in \mathbb{K}_1$ telle que $\alpha^2 = \pi_2 \varepsilon$, donc $(N_{\mathbb{K}_1/\mathbb{k}}(\alpha))^2 = \pi_2^2 N_{\mathbb{K}_1/\mathbb{k}}(\varepsilon)$, posons $\alpha' = N_{\mathbb{K}_1/\mathbb{k}}(\alpha)$ et $\varepsilon' = N_{\mathbb{K}_1/\mathbb{k}}(\varepsilon)$, par suite $(\alpha')^2 = \pi_2^2 (\varepsilon')$, avec $\alpha' \in \mathbb{k}$ et ε' une unité de \mathbb{k} .

On sait que $E_{\mathbb{k}}$, le groupe des unités de \mathbb{k} , est engendré par le complexe i et ε_d , l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, donc sans perdre de généralité, on peut prendre $\varepsilon' \in \mathcal{B}$, on distingue alors les cas suivants:

i) $\varepsilon' = \pm i$, donc 2 est un carré dans \mathbb{k} , ce qui est absurde.

ii) $\varepsilon' = \varepsilon_d$ (resp. $\varepsilon' = i\varepsilon_d$), donc ε_d (resp. $i\varepsilon_d$) est un carré dans \mathbb{k} , ceci implique que ε_d est strictement négative ou de norme positive, ce qui est faux car $\varepsilon_d > 0$ et $N(\varepsilon_d) = -1$.

iii) $\varepsilon' = 1$, c'est-à-dire $N_{\mathbb{K}_1/\mathbb{k}}(\varepsilon) = 1$, donc d'après le théorème 90 de Hilbert, il existe $\beta \in \mathbb{K}_1$ tel que $\varepsilon = \beta^{1-\sigma}$, où $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(\mathbb{K}_1/\mathbb{k})$, par suite $\alpha^2 = \pi_2 \beta^{1-\sigma} = \pi_2 \beta / \sigma(\beta)$. Posons $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{\pi_1}$ et $\beta = a + b \sqrt{\pi_1}$, avec α_1, α_2, a et b sont des éléments de \mathbb{k} , alors $(\alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{\pi_1})^2 = \pi_2 (a + b \sqrt{\pi_1}) / (a - b \sqrt{\pi_1})$, donc $(a - b \sqrt{\pi_1})^2 (\alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{\pi_1})^2 = \pi_2 (a^2 - b^2 \pi_1)$, par suite $[(\alpha_1 a - \alpha_2 b \pi_1) + (\alpha_2 a - \alpha_1 b) \sqrt{\pi_1}]^2 = \pi_2 (a^2 - b^2 \pi_1)$, d'où $(\alpha_1 a - \alpha_2 b \pi_1)^2 + (\alpha_2 a - \alpha_1 b)^2 \pi_1 + 2(\alpha_1 a - \alpha_2 b \pi_1)(\alpha_2 a - \alpha_1 b) \sqrt{\pi_1} = \pi_2 (a^2 - b^2 \pi_1)$, ce qui implique que:

$$(4.1) \quad \begin{cases} (\alpha_1 a - \alpha_2 b \pi_1)^2 + (\alpha_2 a - \alpha_1 b)^2 \pi_1 = \pi_2 (a^2 - b^2 \pi_1), \\ (\alpha_1 a - \alpha_2 b \pi_1)(\alpha_2 a - \alpha_1 b) = 0. \end{cases}$$

1^{er} cas. $\alpha_1 a - \alpha_2 b \pi_1 = 0$ c'est-à-dire $\alpha_1 a = \alpha_2 b \pi_1$, donc le système (4.1) implique que:

$$(4.2) \quad (\alpha_2 a - \alpha_1 b)^2 \pi_1 = \pi_2 (a^2 - b^2 \pi_1).$$

Là aussi on a deux cas à évoquer:

a) Si $b = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ ($a \neq 0$ car $\beta \neq 0$), donc $\alpha_2^2 a^2 \pi_1 = \pi_2 a^2$, ceci implique que $\alpha_2^2 \pi_1 = \pi_2$, ce qui contredit le Théorème 4.1.

b) Si $b \neq 0$, alors $\alpha_2 = \alpha_1 a / b\pi_1$ et l'équation (4.2) implique que:

$$(\alpha_1^2 / b^2 \pi_1^2)(a^2 - b^2 \pi_1)^2 \pi_1 = \pi_2(a^2 - b^2 \pi_1), \text{ par suite } \alpha_1^2(a^2 - b^2 \pi_1) = b^2 p_1.$$

D'après la Proposition 3, on sait que $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_3$ ou bien $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_4$ est principal, donc la classe de \mathcal{H}_1 est égale à la classe de \mathcal{H}_3 ou bien la classe de \mathcal{H}_4 , d'où:

▷ Si $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_3$ est principal, alors ils existent $c \in \mathbb{k}$ et une unité ε de \mathbb{k} tels que $\pi_1 = c^2 \varepsilon \pi_3$, donc on a: $\alpha_1^2(a^2 - b^2 c^2 \varepsilon \pi_3) = b^2 p_1$; par suite le symbole des restes quadratiques pour l'idéal \mathcal{H}_3 appliqué à l'égalité $\alpha_1^2(a^2 - b^2 c^2 \varepsilon \pi_3) = b^2 p_1$ et le Théorème 4.3 donnent:

$$\left(\frac{\alpha_1^2}{\pi_3}\right)\left(\frac{a^2}{\pi_3}\right) = \left(\frac{p_1}{\pi_3}\right)\left(\frac{b^2}{\pi_3}\right);$$

donc $\left(\frac{p_1}{\pi_3}\right) = 1$, or d'après le Théorème 4.3, $\left(\frac{p_1}{\pi_3}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$; d'où $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$, et ceci contredit notre hypothèse $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$.

▷ De même si $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_4$ est principal, alors par le même procédé on montre que: $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$, ce qui est faux.

2^{ème} cas. $\alpha_2 a - \alpha_1 b = 0$ c'est-à-dire $\alpha_2 a = \alpha_1 b$, donc d'après le système (4.1), on a:

$$(4.3) \quad (\alpha_1 a - \alpha_2 b \pi_1)^2 = \pi_2(a^2 - b^2 \pi_1).$$

On a donc les deux cas suivants à distinguer:

▷ Si $b = 0$, alors $\alpha_2 = 0$ ($a \neq 0$), l'égalité (4.3) implique que $\alpha_1^2 a^2 = \pi_2 a^2$, d'où π_2 est un carré dans \mathbb{k} , ce qui est absurde.

▷ Si $b \neq 0$, alors $\alpha_1 = \alpha_2 a / b$ et l'égalité (4.3) implique que $\alpha_2^2(a^2 - b^2 \pi_1) = b^2 \pi_2$, donc il existe y dans \mathbb{k} tel que $b^2 \pi_1 = a^2 - y^2 \pi_2$, par suite $y^2 p_1 = a^2 \pi_1 - (b \pi_1)^2$. Or d'après la Proposition 3, on a $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_3$ ou bien $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_4$ est principal, donc ils existent c_1 dans \mathbb{k} et une unité ε_1 de \mathbb{k} , tels que: $\pi_1 = c_1^2 \varepsilon_1 \pi_3$ ou bien $\pi_1 = c_1^2 \varepsilon_1 \pi_4$, alors on trouve que:

$$y^2 p_1 = a^2 c_1^2 \varepsilon_1 \pi_3 - (b \pi_1)^2 \quad \text{ou bien} \quad y^2 p_1 = a^2 c_1^2 \varepsilon_1 \pi_4 - (b \pi_1)^2.$$

Donc par application du symbole des restes quadratiques pour l'idéal \mathcal{H}_3 ou bien \mathcal{H}_4 et en tenant compte du Théorème 4.3 on trouve que: $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$, ce qui contredit nos hypothèses.

iv) $\varepsilon' = -1$, alors $N_{\mathbb{k}_1/\mathbb{k}}(\varepsilon) = -1$, posons $\varepsilon_1 = i\varepsilon$, donc $N_{\mathbb{k}_1/\mathbb{k}}(\varepsilon_1) = 1$, par suite en remplaçant ε par ε_1 dans le cas précédent (cas iii)) et en reprenant la même démonstration on aboutit à des contradictions.

3) A l'aide des exemples on montre que $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ capitule dans des cas et ne capitule pas dans d'autres. D'après [7], le guide du logiciel PARI/GP, un idéal \mathfrak{p} est principal

si et seulement si la commande $\text{bnfsprincipal}(\mathbb{K}_1, \mathfrak{p}, 0)$ donne un vecteur nul.

$d = p_1 \cdot p_2$	\mathcal{H}_0	$\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$	Principalité de $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ dans \mathbb{K}_1
$697 = 17 \cdot 41$	$[2, [0, 1, 1, 0]]$	$[4, [2, 0, 0, 1]]$	$[0, 0, 1]$
$3649 = 89 \cdot 41$	$[2, [1, 0, 0, 1]]$	$[2, [1, 0, 0, 1]]$	$[0, 1, 1]$
$7913 = 193 \cdot 41$	$[2, [1, 0, 0, 1]]$	$[2, [1, 0, 0, 1]]$	$[0, 0, 0]$
$13753 = 17 \cdot 809$	$[2, [0, 1, 1, 0]]$	$[2, [1, 1, 0, 1]]$	$[0, 0, 0]$

4) Montrons enfin que la classe de $\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ ne capitule pas dans \mathbb{K}_1 ; sinon, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}_1$ tel que $\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_0^{h(d)/2} = (\alpha)$, par suite $\mathcal{H}_2^2 \mathcal{H}_0^{h(d)} = (\alpha^2)$, comme $\mathcal{H}_0^{h(d)}$ est principal dans \mathbb{k} , alors il existe $\theta \in \mathbb{k}$ tel que $\mathcal{H}_0^{h(d)} = (\theta)$, d'où il existe ε , une unité de \mathbb{K}_1 , telle que $\pi_2 \theta \varepsilon = \alpha^2$, on procède comme précédemment on montre que cette égalité n'est vraie que si $N_{\mathbb{K}_1/\mathbb{k}}(\varepsilon) = \pm 1$. Pour $N_{\mathbb{K}_1/\mathbb{k}}(\varepsilon) = 1$ (l'autre cas se traite de la même façon), en suivant la même démarche faite dans 2) iii) et en remarquant que θ est un carré dans \mathbb{k} , puisque $(\theta) = \mathcal{H}_0^{h(d)} = (\mathcal{H}_0^{h(d)/2})^2$, on trouve des contradictions.

On procède de la même manière pour prouver que les classes de \mathcal{H}_1 et $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ ne capitulent pas dans \mathbb{K}_2 . \square

Théorème 4.4. *Soit le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1). Si $p_1 = e^2 + 16f^2$ et $p_2 = g^2 + 16h^2$, posons $\pi_1 = e + 4if$, $\pi_2 = e - 4if$, $\pi_3 = g + 4ih$ et $\pi_4 = g - 4ih$. Notons par $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ et \mathcal{H}_4 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1 + i$, π_1, π_2, π_3 et π_4 respectivement. Soient les extensions $\mathbb{K}_j = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_j})$ où $j \in \{3, 4\}$, notons par $h(d)$ et ε_d le nombre de classes et l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ respectivement, alors:*

(1) *Si $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend l'une des formes (1) ou (3) du Lemme 1, alors:*

$$\ker j_{\mathbb{K}_3} = \langle [\mathcal{H}_1] \rangle \quad \text{ou bien} \quad \langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_0^{h(d)/2}] \rangle$$

et

$$\ker j_{\mathbb{K}_4} = \langle [\mathcal{H}_2] \rangle \quad \text{ou bien} \quad \langle [\mathcal{H}_2], [\mathcal{H}_0^{h(d)/2}] \rangle.$$

(2) *Si $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend l'une des formes (2) ou (4) du Lemme 1, alors:*

$$\ker j_{\mathbb{K}_3} = \langle [\mathcal{H}_2] \rangle \quad \text{ou bien} \quad \langle [\mathcal{H}_2], [\mathcal{H}_0^{h(d)/2}] \rangle$$

et

$$\ker j_{\mathbb{K}_4} = \langle [\mathcal{H}_1] \rangle \quad \text{ou bien} \quad \langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_0^{h(d)/2}] \rangle.$$

Preuve. Pour $j \in \{3, 4\}$, la classe de l'idéal \mathcal{H}_j capitule dans \mathbb{K}_j , en effet, on a $(\pi_j) = \mathcal{H}_j^2$, alors $\mathcal{H}_j = (\sqrt{\pi_j})$, donc \mathcal{H}_j capitule dans \mathbb{K}_j ; et comme \mathcal{H}_j est d'ordre 2 dans \mathbb{k} (Proposition 2), alors son carré capitule dans \mathbb{K}_j .

Avec une démonstration analogue à celle du Théorème 4.2, on prouve que la classe de \mathcal{H}_3 ne capitule pas dans \mathbb{K}_4 et la classe de \mathcal{H}_4 ne capitule pas dans \mathbb{K}_3 .

1) Si $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend l'une des formes (1) ou (3) du Lemme 1, alors d'après la Proposition 3, $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_4$ sont principaux, donc les classes des idéaux \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_3 (resp. \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_4) sont égaux, d'où les résultats.

2) Si $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend l'une des formes (2) ou (4) du Lemme 1, alors d'après la Proposition 3, $\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_4$ sont principaux, donc les classes des idéaux \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_3 (resp. \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_4) sont égaux, d'où les résultats.

3) A l'aide du logiciel PARI/GP ([7]), on donne quelques exemples qui nous montrent que la classe de l'idéal $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ peut capituler comme elle peut ne pas capituler dans \mathbb{K}_j pour $j \in \{3, 4\}$.

$d = p_1 \cdot p_2$	\mathcal{H}_0	$\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$	Principalité de $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ dans \mathbb{K}_3
13753 = 809 · 17	[2, [0, 1, 1, 0]]	[2, [0, 1, 1, 0]]	[0, 0, 0]
19193 = 1129 · 17	[2, [1, 0, 0, 1]]	[2, [1, 0, 0, 1]]	[0, 0, 0]
3649 = 41 · 89	[2, [1, 0, 0, 1]]	[2, [1, 0, 0, 1]]	[10, 1, 0]
3977 = 41 · 97	[2, [1, 0, 0, 1]]	[2, [1, 0, 0, 1]]	[28, 0, 0]

De même on trouve que la classe de $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ capitule dans \mathbb{K}_4 pour les nombres $d = 13753$ et $d = 14569$ et ne capitule pas pour: $d = 10057$ et $d = 11521$.

4) Comme dans le Théorème 4.2, on prouve que:

▷ Si $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend l'une des formes (1) ou (3) du Lemme 1, alors $[\mathcal{H}_2\mathcal{H}_0^{h(d)/2}]$ (resp. $[\mathcal{H}_1\mathcal{H}_0^{h(d)/2}]$) ne capitule pas dans \mathbb{K}_3 (resp. \mathbb{K}_4).

▷ Si $\sqrt{\varepsilon_d}$ prend l'une des formes (2) ou (4) du Lemme 1, alors $[\mathcal{H}_1\mathcal{H}_0^{h(d)/2}]$ (resp. $[\mathcal{H}_2\mathcal{H}_0^{h(d)/2}]$) ne capitule pas dans \mathbb{K}_3 (resp. \mathbb{K}_4). \square

Théorème 4.5. Soit le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1). Si $p_1 = e^2 + 16f^2$ et $p_2 = g^2 + 16f^2$, posons $\pi_1 = e + 4if$, $\pi_2 = e - 4if$, $\pi_3 = g + 4ih$ et $\pi_4 = g - 4ih$. Notons par \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1 + i$, π_1 et π_2 respectivement. Soient les extensions $\mathbb{K}_5 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1 \pi_3})$ et $\mathbb{K}_6 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1 \pi_4})$, notons par $h(d)$ le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, alors pour $j \in \{4, 5\}$ on a: $\ker j_{\mathbb{K}_j} = \langle [\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2] \rangle$ ou bien $\langle [\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2], [\mathcal{H}_0^{h(d)/2}] \rangle$.

Preuve. 1) Pour montrer que la classe de \mathcal{H}_1 (resp. \mathcal{H}_2) ne capitule pas dans \mathbb{K}_5 (resp. \mathbb{K}_6), on reprend la démonstration faite dans le Théorème 4.2 où on a prouvé que la classe de \mathcal{H}_2 ne capitule pas dans \mathbb{K}_1 .

2) Soit $\varepsilon_d = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{d})$, l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, alors d'après le Lemme 1, $\sqrt{\varepsilon_d}$ peut prendre les valeurs $\pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_3} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_4})$ ou $\pm\frac{1}{2}(y_1\sqrt{\pi_1\pi_4} + y_2\sqrt{\pi_2\pi_3})$. La classe de l'idéal $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ devient principale dans \mathbb{K}_5 si et seulement si l'équation en α , $\pi_1\pi_2\varepsilon = \alpha^2$ où ε est une unité de \mathbb{K}_5 , est résoluble dans \mathbb{K}_5 . Cherchons une solution $\alpha \in \mathbb{K}_5$ de la forme $\alpha = \alpha_2\sqrt{\pi_1\pi_3}$ avec $\alpha_2 \in \mathbb{k}$, dans ce cas on a $\pi_1\pi_2\varepsilon = \alpha_2^2\pi_1\pi_3$ c'est-à-dire $\pi_2\varepsilon = \alpha_2^2\pi_3$, ceci montre que ε est une unité de \mathbb{k} . Soit $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi_3^{-1}(y_2\pi_2\pi_3 + y_1\sqrt{d})$. Comme $2x = y_1^2\pi_1\pi_4 + y_2^2\pi_2\pi_3$ et $y = y_1y_2$, alors $\alpha_2^2 = (\pi_2/\pi_3)\varepsilon_d$; donc $\pi_1\pi_2\varepsilon_d = \alpha_2^2\pi_1\pi_3$, ce qui est équivalent à $\pi_1\pi_2\varepsilon_d = (\alpha_2\sqrt{\pi_1\pi_3})^2$; d'où $(\pi_1\pi_2) = (\alpha^2)$ c'est-à-dire $(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)^2 = (\alpha^2)$ par suite $(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2) = (\alpha)$. Donc la classe de $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ capitule dans \mathbb{K}_5 . On procède de la même façon pour prouver que la classe de $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ capitule dans \mathbb{K}_6 .

3) A l'aide des exemples, on prouve que dans l'extension \mathbb{K}_5 , $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ capitule dans certains cas et ne capitule pas dans d'autres.

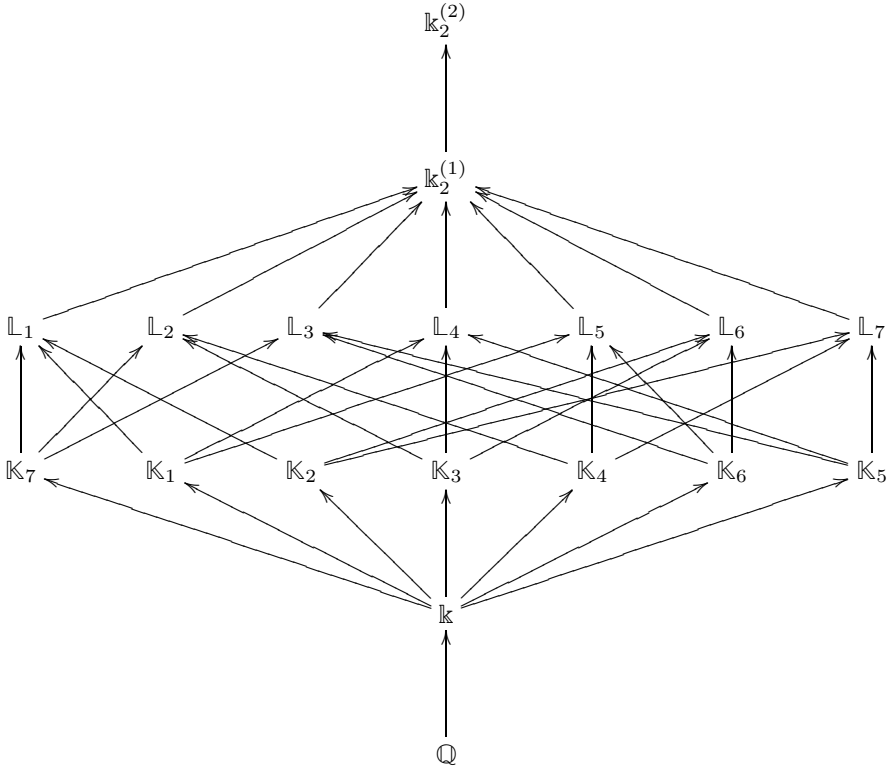
$d = p_1 \cdot p_2$	\mathcal{H}_0	$\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$	Principalité de $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ dans \mathbb{K}_5
1921 = 17 · 113	[2, [1, 0, 0, 1]]	[2, [1, 0, 0, 1]]	[5, 0, 0, 1]
8857 = 17 · 521	[2, [0, 1, 1, 0]]	[2, [1, 1, 0, 1]]	[5, 0, 0, 1]
5321 = 17 · 313	[2, [1, 0, 0, 1]]	[2, [1, 0, 0, 1]]	[0, 0, 0, 0]
5321 = 313 · 17	[2, [1, 0, 0, 1]]	[2, [1, 0, 0, 1]]	[0, 0, 0, 0]

4) On procède comme dans le Théorème 4.2 pour montrer que $[\mathcal{H}_1\mathcal{H}_0^{h(d)/2}]$ et $[\mathcal{H}_2\mathcal{H}_0^{h(d)/2}]$ ne capitulent ni dans \mathbb{K}_5 ni dans \mathbb{K}_6 . \square

5. CAPITULATION DANS LES EXTENSIONS BIQUADRATIQUES NON-RAMIFIÉES DE \mathbb{k}

Soit le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, où $d = p_1p_2$ et p_1, p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1). Posons $p_1 = e^2 + 16f^2$, $p_2 = g^2 + 16h^2$, $p_1 = \pi_1\pi_2 = (e + 4if)(e - 4if)$ et $p_2 = \pi_3\pi_4 = (g + 4ih)(g - 4ih)$. Notons par $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ et \mathcal{H}_4 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1 + i$, π_1, π_2, π_3 et π_4 respectivement. On sait que $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2} = \langle [\mathcal{H}_0^{h(d)/2}], [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$, où $h(d)$ est le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Les extensions quadratiques non ramifiées de \mathbb{k} sont: $\mathbb{K}_j = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_j})$, où $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{K}_5 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1\pi_3})$, $\mathbb{K}_6 = \mathbb{k}(\sqrt{\pi_1\pi_4})$ et $\mathbb{k}^{(*)}$ le corps de genres de \mathbb{k} . Comme le rang de $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ est égal à 3, alors d'après la théorie des corps de classes, \mathbb{k} admet sept extensions biquadratiques non-ramifiées dans $\mathbb{k}_2^{(1)}$, notons les par \mathbb{L}_i , où $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, chaque extension \mathbb{L}_i est définie comme suit: $\mathbb{L}_i = \mathbb{K}_j.\mathbb{K}_k = \mathbb{K}_j.\mathbb{K}_l = \mathbb{K}_k.\mathbb{K}_l$, où j, k et l sont trois éléments différents de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, la situation est schématisée

dans le diagramme suivant:



Donc on a:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}_1 &= \mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{K}_7 = \mathbb{K}_2 \cdot \mathbb{K}_7, \\
 \mathbb{L}_2 &= \mathbb{K}_3 \cdot \mathbb{K}_4 = \mathbb{K}_3 \cdot \mathbb{K}_7 = \mathbb{K}_4 \cdot \mathbb{K}_7, \\
 \mathbb{L}_3 &= \mathbb{K}_5 \cdot \mathbb{K}_6 = \mathbb{K}_5 \cdot \mathbb{K}_7 = \mathbb{K}_6 \cdot \mathbb{K}_7, \\
 \mathbb{L}_4 &= \mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{K}_3 = \mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{K}_5 = \mathbb{K}_3 \cdot \mathbb{K}_5, \\
 \mathbb{L}_5 &= \mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{K}_4 = \mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{K}_6 = \mathbb{K}_4 \cdot \mathbb{K}_6, \\
 \mathbb{L}_6 &= \mathbb{K}_2 \cdot \mathbb{K}_3 = \mathbb{K}_2 \cdot \mathbb{K}_6 = \mathbb{K}_3 \cdot \mathbb{K}_6, \\
 \mathbb{L}_7 &= \mathbb{K}_2 \cdot \mathbb{K}_4 = \mathbb{K}_2 \cdot \mathbb{K}_5 = \mathbb{K}_4 \cdot \mathbb{K}_5.
 \end{aligned}$$

Les extensions \mathbb{L}_i sont différentes deux à deux, on démontre ceci pour \mathbb{L}_1 et \mathbb{L}_6 , pour les autres extensions la démonstration se fait de la même façon.

Si $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_6$ c'est-à-dire que $\mathbb{K}_2(\sqrt{\pi_1}) = \mathbb{K}_2(\sqrt{\pi_3})$, alors il existe $t \in \mathbb{K}_2$ tel que $\pi_1\pi_3 = (t\pi_3)^2$, ce qui est absurde. Comme les extensions \mathbb{L}_i sont composées de

deux extensions quadratiques de \mathbb{k} , alors d'après la théorie de Galois, les extensions \mathbb{L}_i sont non-ramifiées, abéliennes et galoisiennes sur \mathbb{k} . Chaque extension \mathbb{L}_i est normale, puisqu'elle est corps de décomposition d'un polynôme de degré 4 de $\mathbb{k}[X]$.

Théorème 5.1. *Soit le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers vérifiant l'hypothèse (1.1). Posons $p_1 = e^2 + 16f^2 = (e + 4if)(e - 4if)$, $\pi_1 = e + 4if$ et $\pi_2 = e - 4if$. Notons par \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1 + i$, π_1 et π_2 respectivement. Soient \mathbb{L}_i les corps définis précédemment, où $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $h(d)$ le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $\mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$ le 2-groupe de classes de \mathbb{k} , alors on a $\ker j_{\mathbb{L}_i} = \langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$ ou bien $\ker j_{\mathbb{L}_i} = \mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$.*

Preuve. Les Théorèmes 2.1, 3.3, 4.1, 4.2, 4.4 et 4.5 impliquent que pour chaque extension \mathbb{L}_i , on a $\langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle \subseteq \ker j_{\mathbb{L}_i}$ ou bien $\ker j_{\mathbb{L}_i} = \mathbf{C}_{\mathbb{k}, 2}$. Les exemples suivants nous montrent que dans l'extension \mathbb{L}_1 , $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$ capitule dans certains cas et ne capitule pas dans d'autres:

$d = p_1 \cdot p_2$	\mathcal{H}_0	$\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$	Principalité de $\mathcal{H}_0^{h(d)/2}$
$5321 = 17 \cdot 313$	$[2, [-1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]]$	$[2, [-1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]]$	$[88, 0, 0]$
$21809 = 193 \cdot 113$	$[2, [-1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1]]$	$[4, [2, 1, 1, 2, 1, -1, 1, -1]]$	$[84, 0, 0]$
$31417 = 89 \cdot 353$	$[2, [0, 0, -1, 0, -1, 1, -1, 1]]$	$[2, [0, 0, -1, 0, -1, 1, -1, 1]]$	$[18, 0, 1]$
$14569 = 17 \cdot 857$	$[2, [-1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]]$	$[2, [-1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]]$	$[0, 0, 0]$
$22849 = 73 \cdot 313$	$[2, [-1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1]]$	$[2, [-1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1]]$	$[0, 0, 0]$
$31753 = 281 \cdot 113$	$[2, [-1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]]$	$[2, [-1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]]$	$[0, 0, 0]$

□

Démonstration du théorème principal. C'est une conséquence immédiate des Théorèmes 2.1, 3.3, 4.1, 4.2, 4.4, 4.5 et 5.1. Par contre le Corollaire 1 découle du Théorème 1.1 et de la formule 3.1.

References

- [1] A. Azizi: Units of certain imaginary abelian number fields over \mathbb{Q} . Ann. Sci. Math. Qué. 23 (1999), 15–21. (In French.)
- [2] A. Azizi: Capitulation of the 2-ideal classes of $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2}, i)$ where p_1 and p_2 are primes such that $p_1 \equiv 1 \pmod{8}$, $p_2 \equiv 5 \pmod{8}$ and $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$. Algebra and Number Theory (Boulagouaz, M'hammed et al., eds.). Proceedings of a conference, Fez, Morocco. Lect. Notes Pure Appl. Math. 208, Marcel Dekker, New York, 2000, pp. 13–19.
- [3] A. Azizi: Construction of the 2-Hilbert class field tower of some biquadratic fields. Pac. J. Math. 208 (2003), 1–10. (In French.)
- [4] A. Azizi: On the units of certain number fields of degree 8 over \mathbb{Q} . Ann. Sci. Math. Qué. 29 (2005), 111–129.

- [5] *A. Azizi, M. Taous*: Determination of the fields $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$, given the 2-class groups are of type $(2, 4)$ or $(2, 2, 2)$. *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste* 40 (2008), 93–116. (In French. English summary.)
- [6] *P. Barruccand, H. Cohn*: Note on primes of type $x^2 + 32y^2$, class number, and residuacity. *J. Reine Angew. Math.* 238 (1969), 67–70.
- [7] *C. Batut, K. Belabas, D. Bernadi, H. Cohen, M. Olivier*: GP/PARI calculator Version 2.2.6.
- [8] *F. P. Heider, B. Schmithals*: Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen. *J. Reine Angew. Math.* 336 (1982), 1–25. (In German.)
- [9] *D. Hilbert*: On the theory of the relative quadratic number field. *Math. Ann.* 51 (1899), 1–127.
- [10] *P. Kaplan*: Sur le 2-groupe de classes d'idéaux des corps quadratiques. *J. Reine Angew. Math.* 283/284 (1976), 313–363. (In French.)
- [11] *F. Lemmermeyer*: Reciprocity Laws. From Euler to Eisenstein. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2000.
- [12] *T. M. McCall, C. J. Parry, R. R. Ranalli*: Imaginary bicyclic biquadratic fields with cyclic 2-class group. *J. Number Theory* 53 (1995), 88–99.
- [13] *A. Scholz*: Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$. *Math. Z.* 39 (1934), 95–111. (In German.)

Authors' addresses: Abdelmalek Azizi, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mohammed 1, Oujda, Morocco, e-mail: abdelmalekazizi@yahoo.fr; Abdelkader Zekhni, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mohammed 1, Oujda, Morocco, e-mail: zekha1@yahoo.fr; Mohammed Taous, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques, Université Moulay Ismail, Errachidia, Morocco, e-mail: taousm@hotmail.com.