

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Tomáš Málek; Vojtěch Pravda; Alena Pravdová
Einsteinovy rovnice a jejich vybrané důsledky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 60 (2015), No. 3, 203–214

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144416>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2015

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Einsteinovy rovnice a jejich vybrané důsledky

Tomáš Málek, Vojtěch Pravda, Alena Pravdová, Praha

1. Úvod

Newtonovská fyzika byla v popisu pohybu těles ve Sluneční soustavě neobyčejně úspěšná a dodnes zůstává ve většině aplikací v rámci Sluneční soustavy dostatečně přesným nástrojem. V tomto článku se zaměříme na relativistickou teorii gravitace, neboli obecnou teorii relativity (OTR). Proto nás přirozeně budou zajímat zejména takové situace, kdy newtonovská teorie není dostatečně přesná. Uveďme tedy dva příklady, kde již v 19. století byly ve Sluneční soustavě pozorovány odchylky od newtonovského modelu.

Nesoulad mezi pozorovaným pohybem Uranu s newtonovským modelem Sluneční soustavy vysvětlil francouzský matematik Urbain Le Verrier v roce 1846 tak, že odchylky v pohybu Uranu jsou způsobeny přítomností další, tehdy neznámé planety. Vypočtenou polohu nové planety zaslal do Berlína, kde se již téže noci podařilo planetu Neptun nalézt s přesností 1° na místě vypočítaném Le Verrierem.

Urbain Le Verrier se také řadu let zabýval studiem pohybu planety Merkur a ve svých pracích došel k závěru, že pozorované stáčení perihelia Merkuru nelze plně vysvětlit pomocí newtonovské teorie (např. gravitačním působením dalších planet). Část tohoto efektu o velikosti $43''$ zůstávala nevysvětlena.¹ Le Verrier se snažil vysvětlit odchylky v pozorovaném pohybu planety mj. pomocí gravitačního vlivu hypotetické planety Vulkán.

Když dojde k rozporu mezi pozorovaným chováním systému a matematickým modelem tohoto systému, dochází mnohdy k novým objevům. Tento rozpor nás upozorňuje, že buď nemáme úplné informace o pozorovaném systému (viz výše uvedený objev planety Neptun) nebo náš matematický model není postaven na vhodné teorii (jak uvidíme v kapitole 4.1, tato situace nastává u stáčení perihelia planety Merkur).

Albert Einstein však ke své obecné teorii relativity došel ještě jinou, abstraktnější cestou. Jeho hlavní motivací při práci na nové teorii nebylo vysvětlit rozpory mezi teorií a experimentem, ale odstranit nekompatibilitu dvou teoretických modelů — speciální teorie relativity a newtonovské teorie gravitace². Einstein se tak pokusil vybudovat novou teorii gravitace.

Výchozím principem OTR je tzv. *princip ekvivalence*, který říká, že lokálně nelze odlišit gravitační pole od rovnoměrně zrychleného pohybu. Uvnitř kosmické lodi

¹Le Verrier původně došel k hodnotě $38''$.

²Newtonova gravitace předpokládá okamžité gravitační působení na dálku a v principu tak umožňuje přenášet signál nekonečnou rychlostí, což je v rozporu se speciální teorií relativity.

v prázdném prostoru, která se bude pohybovat s rovnoměrným zrychlením g , bude kosmonaut pozorovat gravitační pole nerozlišitelné od homogenního gravitačního pole. Naopak volným pádem se mohou gravitační pole „odtransformovat“. Například ve výšce cca 400 km nad zemským povrchem dosahuje gravitační síla pouze asi o 10% nižší hodnoty než na zemském povrchu. Přesto kosmonauti na mezinárodní vesmírné stanici gravitační sílu Země nepocítují. To je způsobeno „volným pádem“³ mezinárodní vesmírné stanice v gravitačním poli Země.

Poměrně dlouhou a komplikovanou cestou, která je podrobněji rozebrána v dalších článcích tohoto čísla PMFA, dospěl Einstein k vyjádření gravitace pomocí deseti komponent symetrického metrického tenzoru g_{ab} zakřiveného prostoročasu. Einsteinovy rovnice, nelineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro deset neznámých funkcí g_{ab} , popisují, jakým způsobem hmota zakřivuje okolní prostoročas a jak naopak tento zakřivený prostoročas ovlivňuje pohyb hmoty (viz kapitola 3).

I když je Einsteinův pohled na gravitaci fundamentálně odlišný od newtonovského pohledu, jeho důležitou vlastností je, že za vhodných limitních podmínek (malé rychlosti hmotných objektů vůči rychlosti světla a slabá gravitační pole) přechází na Newtonovu teorii gravitace. Newtonovu teorii tedy můžeme za těchto podmínek dále používat při popisu gravitace s vědomím toho, že se jedná o limitu přesnější Einsteinovy teorie.

Einsteinova teorie vedla k řadě teoretických předpovědí, které byly postupně s narůstajícím pochopením OTR odvozovány a mnohé z nich později i experimentálně ověřovány. Prvními klasickými testy Einsteinovy teorie gravitace byly soulad stáčení perihelia Merkuru s OTR⁴ a naměření ohybu světla v gravitačním poli kompatibilního s OTR při zatmění Slunce v roce 1919. Poté nastalo na dlouhou dobu období, kdy teorie byla příliš daleko před experimentální technologií. Řada astronomických objevů v šedesátých letech (např. pulsary či reliktní záření) pak umožnila pokračovat v experimentálním ověřování důsledků OTR a mnoho relativistických efektů je dnes ověřeno s vysokou přesností (viz např. [6], [7] nebo článek [1] v tomto čísle PMFA). Můžeme doufat, že v nejbližších letech se podaří přímá detekce gravitačních vln, také předpovězených OTR, což by otevřelo nové okno do vesmíru a umožnilo tak vznik nového oboru astronomie.

Testy ve Sluneční soustavě ověřují OTR pouze ve slabém gravitačním poli, protože veličina $\epsilon = GM/Rc^2$, odlišující slabá a silná gravitační pole,⁵ je zde menší než 10^{-5} . V současné době se experimentální výzkum posouvá i k ověřování OTR v „silných“ gravitačních polích, např. v blízkosti černých děr, kde $\epsilon \sim 1$.

Einsteinova teorie a s ní spjaté matematické metody jsou technicky náročné, proto se v tomto článku zaměříme především na stručný výklad některých souvisejících základních myšlenek a některých přístupnějších důsledků Einsteinových rovnic. Více informací o OTR nalezne čtenář např. v úvodních učebnicích [4], [3].

V kapitole 2 se seznámíme s křivostí prostoru a prostoročasu. V kapitole 3 budeme diskutovat některé vlastnosti Einsteinových rovnic. Seznámíme se i s tzv. Schwarzschildovým řešením těchto rovnic, popisujícím gravitační pole sféricky symetrického zdroje (vně tohoto zdroje). V závěrečné kapitole 4 pak z Einsteinovy teorie s využitím

³To znamená pohybem pouze pod vlivem gravitačního pole.

⁴Ve chvíli, kdy už byla teorie dostatečně rozvinuta a neobsahovala žádné volné parametry, odvodil z ní Einstein správnou hodnotu stáčení perihelia Merkuru.

⁵ M a R jsou charakteristická hmotnost a rozměr systému.

Schwarzschildova řešení odvodíme některé relativistické efekty pozorovatelné i ve Sluneční soustavě — stáčení perihelia Merkuru, ohyb světla v gravitačním poli Slunce a gravitační rudý posuv.

Na závěr této úvodní části si ještě připomeňme, že na galaktických a větších škálách existují i pozorování, která jsou v příkrém rozporu jak s newtonovskou gravitací tak s OTR. Problémem je například příliš vysoká rotační rychlost jednotlivých hvězd ve spirálních a eliptických galaxiích. Gravitační síla viditelné hmoty přítomné v galaxiích nemůže, dle současných modelů, hvězdy udržet na orbitě. Opět, jako ve výše diskutovaných případech ve Sluneční soustavě, nastávají dvě možnosti. První možností je modifikovat teorii gravitace na velkých škálách. Většina odborníků se ale v současnosti spíše kloní ke druhé možnosti: předpokládat, že v galaxiích se kromě nám známé baryonové hmoty vyskytuje ještě v několikanásobně vyšším množství doposud neznámá hmota, tzv. temná hmota. Existují různé modely popisující neznámé částice temné hmoty, které mezi sebou neinteragují, ale i teorie komplexní temné hmoty popisující částice, které mezi sebou interagují a případně mohou i vytvářet struktury, např. i jakési temné atomy. Doposud však částice temné hmoty nebyly experimentálně detekovány. Nezbyvá nám tedy než doufat, že v době 120. výročí OTR budeme o otázce temné hmoty vědět o něco více.

2. Křivý prostor a prostoročas

V Einsteinově teorii relativity je gravitační pole vyjádřeno pomocí křivosti prostoročasu. Připomeňme si nejprve pojem zakřiveného dvourozměrného prostoru. Představme si dvourozměrné bytosti žijící na zakřivené dvourozměrné ploše M , které nic netuší o tom, zda je nebo není jejich svět M vnořen do nějakého vícerozměrného prostoru, a mají pouze informace o M . Umíme-li v M měřit vzdálenost, můžeme na M zavést zobecnění pojmu úsečky známé z eukleidovské geometrie. Na M úsečky nahradíme tzv. geodetikami, což jsou nejkratší spojnice⁶ dvou bodů. Kružnice můžeme zavést jako množiny bodů majících stejnou vzdálenost r od daného středu. Jejich obvod označme $C(r)$.

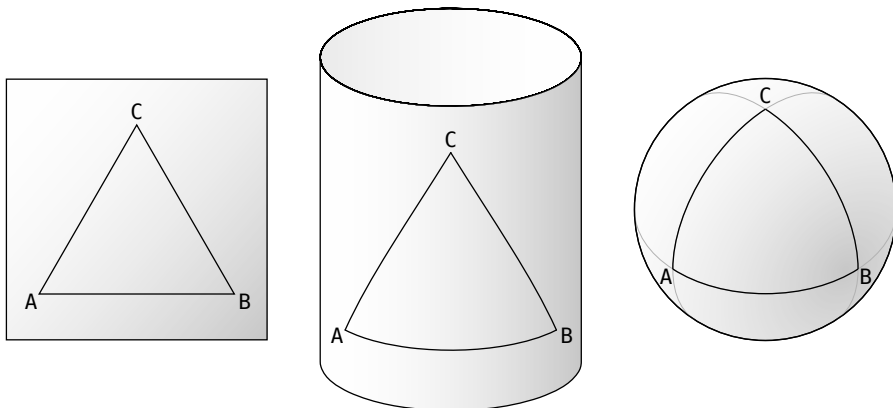
Na M obecně neplatí obvyklá pravidla eukleidovské geometrie, např. součet úhlů v trojúhelníku vytvořeném ze tří geodetik je obvykle odlišný od 180° a obvod kružnic $C(r)$ není roven $2\pi r$. Míru toho, jak se geometrie v M liší (lokálně) od eukleidovské geometrie, lze vyjádřit pomocí tzv. Gaussovy křivosti K

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6}{r^2} \left(1 - \frac{C(r)}{2\pi r} \right). \quad (1)$$

Například pro sféru S^2 o poloměru r vychází Gaussova křivost $K = 1/r^2$. Geometrie na sféře je tedy neeukleidovská. Geodetiky v S^2 jsou části hlavních kružnic⁷.

⁶Požadujeme samozřejmě, aby každý bod těchto spojníc ležel v M .

⁷Hlavní kružnice je průsečík sféry S^2 s rovinou procházející středem koule. Na Zemi jsou to např. poledníky. Jedinou rovnoběžkou, která je současně hlavní kružnicí, je rovník. Na severní polokouli hlavní kružnice spojující dva body ležící na téže rovnoběžce vedou severně od této rovnoběžky. Proto např. letadlo z Prahy do Los Angeles (které leží výrazně jižněji než Praha), volí nejkratší trasu, míří nejprve na severozápad a letí přes Island a Grónsko. To lze také zdůvodnit tím, že poledníky jsou na severu blíže u sebe a proto se při dlouhé cestě na západ vyplatí nejprve zamířit o něco severněji.



Obr. 1. Trojúhelníky v rovinné, cylindrické a sférické geometrii. První případ má nulovou vnější i vnitřní křivost. Druhý případ má nulovou vnitřní a nenulovou vnější křivost a ve třetím případě jsou obě tyto křivosti nenulové.

Trojúhelníky vytvořené z geodetik mají v \mathbb{S}^2 součet úhlů větší⁸ než 180° a snadno si dovedeme představit, že pomocí části rovníku a dvou poledníků můžeme vytvořit i trojúhelník, který má všechny tři úhly pravé (viz též obrázek 1).

Přejdeme nyní k válci. Představme si, že na list papíru nakreslíme kružnice a trojúhelníky. Když poté slepíme dvě protilehlé strany, získáme válec. Trojúhelníky na tomto válci však stále budou mít součet úhlů 180° a kružnice budou mít obvod $2\pi r$. Gaussova křivost válce je tedy rovna nule. My, jako trojrozměrné bytosti, pozorujeme, že válcová plocha jistou křivost má, tato křivost se nazývá vnější křivost a souvisí s vnořením M do trojrozměrného prostoru. V obecné relativitě nás však bude zajímat vnitřní křivost, tj. křivost pozorovatelná obyvateli žijícími v M .

Gaussova křivost je vnitřní křivostí dvourozměrné plochy. Zobecněním plochy do n dimenzí je n -rozměrná varieta M , jejíž křivost je popsána tzv. Riemannovým tenzorem křivosti R_{abcd} , který má obecně $n^2(n^2 - 1)/12$ nezávislých komponent.

V Einsteinově teorii relativity pracujeme se čtyřrozměrným prostoročasem M (tři dimenze odpovídají prostoru a jedna času), takže Riemannův tenzor popisující (vnitřní) křivost M má obecně 20 nezávislých komponent. V OTR se v prostoročasu M hmotné body pod vlivem gravitační síly pohybují v určitém smyslu nejjednodušším možným způsobem — po geodetikách. Např. Země se tak na své dráze pohybuje po geodetice v prostoročase zakřiveném hmotou Slunce a dalších těles Sluneční soustavy.

3. Einsteinovy rovnice

Základními rovnicemi obecné teorie relativity jsou Einsteinovy rovnice

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (2)$$

⁸Součet vnitřních úhlů geodetického trojúhelníku je $180^\circ +$ „celková křivost“ uvnitř trojúhelníku (viz Gaussův–Bonnetův teorém). Tato „celková křivost“ je v \mathbb{S}^2 vždy kladná, na jiných plochách může být i záporná.

kteřé popisují gravitaci jako křivost prostoročasu. Na levé straně těchto rovnic se vyskytují geometrické veličiny: R_{ab} je Ricciho tenzor křivosti (stopa Riemannova tenzoru) a Ricciho skalár R (stopa Ricciho tenzoru), metrika g_{ab} a kosmologická konstanta Λ .⁹ Na pravé straně vystupuje Newtonova gravitační konstanta G , rychlost světla c a tenzor energie a hybnosti T_{ab} popisující rozložení a pohyb hmoty.

Jednoduchý a elegantní tenzorový zápis Einsteinových rovnic ve tvaru (2) může vyvolat mylný dojem, že se jedná o poměrně jednoduché rovnice. Tyto rovnice při rozepsání v souřadnicích ovšem dávají komplikovaný systém deseti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro deset neznámých komponent metricky g_{ab} .

Einsteinovy rovnice jsou natolik složité, že jejich analytická řešení lze nalézt pouze za vhodných předpokladů vedoucích k jejich výraznému zjednodušení, např. za předpokladu dostatečného množství symetrií. Dnes je známo velké množství jak tzv. vakuových řešení Einsteinových rovnic (tj. pro $T_{ab} = 0$), tak nevakuových řešení pro fyzikálně relevantní tvary T_{ab} , viz např. [5].

Historicky první netriviální přesné vakuové řešení Einsteinových rovnic nalezl již v roce 1915 K. Schwarzschild (publikováno bylo v roce 1916). Toto řešení popisuje gravitační pole vně sféricky symetrického objektu, který má nulový elektrický náboj a moment hybnosti, a s dostatečnou přesností odpovídá např. gravitačnímu poli vně Slunce (zanedbáváme-li rotaci, zploštění a vyzařování Slunce).

Schwarzschildovu metriku lze napsat ve tvaru

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad f(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r}, \quad (3)$$

kde $M = Gm/c^2$ a m je hmotnost centrálního objektu. Jednotlivé komponenty metricky g_{ab} v souřadnicích (t, r, θ, φ) jsou rovny odpovídajícím koeficientům v (3), např. $g_{rr} = 1/f(r)$, $g_{tr} = 0$ atd. Zobecnění tohoto řešení na případ rotujícího centrálního objektu nalezl až v roce 1963 R. Kerr.

4. Odvození vybraných důsledků Einsteinových rovnic

V této kapitole odvodíme s využitím Schwarzschildova řešení (3) některé relativistické efekty pozorovatelné i ve Sluneční soustavě — stáčení perihelia Merkuru, ohyb světla v gravitačním poli Slunce a gravitační rudý posuv.

4.1. Stáčení perihelia Merkuru

Nyní budeme studovat pohyb planety Merkur ve Sluneční soustavě. V případě planety Merkur nás budou zajímat zejména odchylky od newtonovského chování. Pro naše účely je dostatečně přesné považovat Merkur za testovací hmotný bod pohybující se ve Schwarzschildově prostoročasu¹⁰ (3). Jak jsme již uvedli výše, trajektorie hmotného bodu, který se volně pohybuje pouze pod vlivem gravitační síly, je v Einsteinově teorii neukleidovské zobecnění přímky — geodetika. V křivém prostoru bychom porovnávali

⁹Původní tvar Einsteinových rovnic byl bez členu s kosmologickou konstantou. Tu zavedl Einstein až v roce 1917, aby z těchto rovnic mohl odvodit model statického vesmíru, více viz např. článek [2] v tomto čísle PMFA.

¹⁰Zanedbáváme tedy např. zakřivení prostoročasu způsobené Merkurem a dalšími planetami, rotaci a zploštění Slunce a jeho vyzařování.

všechny křivky mezi body A a B , počítali jejich délku a hledali stacionární body (křivky) odpovídající akce. V OTR ovšem pracujeme v prostoročasu, kde geodetika odpovídá maximálnímu vlastnímu času částice. V případě částice ve Schwarzschildově prostoročasu má tedy akce pro volnou částici tvar

$$L = \sqrt{f(r) \left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2}. \quad (4)$$

S využitím Eulerových–Lagrangeových rovnic (nebo přímo dosazením do rovnic geodetiky) bychom dospěli ke čtyřem rovnicím, nejsložitější z těchto rovnic však nahradíme podmínkou, že norma čtyřrychlosti je rovna $-c^2$ pro hmotnou částici ($\kappa = 1$) a nule pro nehmotnou částici ($\kappa = 0$),

$$-f(r) \left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -c^2 \kappa. \quad (5)$$

Zbývající tři rovnice mají tvar

$$\frac{d}{d\tau} \left(f(r) \frac{dt}{d\tau} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) - r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = 0. \quad (8)$$

„Rovina“ $\theta = \frac{1}{2}\pi$ (stejně jako všechna její otočení) je rovinou symetrie. Každá počáteční rychlost leží v nějaké takové rovině a trajektorie částice po celou dobu v této rovině zůstává. Bez újmy na obecnosti tedy budeme předpokládat, že veškerý pohyb se odehrává v ekvatoriální rovině

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (9)$$

čímž jsme vyřešili rovnici (7). Rovnice (6) a (8) pak mají řešení

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{\mathcal{E}}{f(r)}, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\ell}{r^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

kde \mathcal{E} a ℓ jsou integrační konstanty související s energií a momentem hybnosti.

Dosazením (9) a (10) do (5) dostaneme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r) = \frac{c^2}{2} (\mathcal{E}^2 - \kappa), \quad (11)$$

kde

$$V(r) = \frac{1}{2} \left[\left(c^2 \kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) f(r) - c^2 \kappa \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \frac{2Mc^2\kappa}{r} - \frac{2M\ell^2}{r^3} \right). \quad (12)$$

Porovnáním s rovnicí pro pohyb newtonovské částice zjistíme, že první člen je centrifugální, druhý odpovídá přitažlivé gravitační síle a poslední člen popisuje čistě relativistický efekt.

Vyjádríme-li rovnici (11) pomocí

$$r'(\varphi) \equiv \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{d\tau} \bigg/ \frac{d\varphi}{d\tau} = \dot{r} \frac{r^2}{\ell} \quad (13)$$

a použijeme-li substituci

$$u \equiv 1/r, \quad (14)$$

dostaneme

$$(u')^2 + u^2 - \frac{2Mc^2\kappa}{\ell^2}u - 2Mu^3 = c^2 \frac{\mathcal{E}^2 - \kappa}{\ell^2}, \quad (15)$$

kde $u' \equiv du/d\varphi$. Derivace rovnice (15) podle φ dává tzv. relativistický Binetův vzorec

$$u'' + u = \frac{Mc^2\kappa}{\ell^2} + 3Mu^2. \quad (16)$$

Uvažujme nyní pohyb hmotné částice, a tedy $\kappa = 1$. Bez členu $3Mu^2$ popisuje rovnice (16) newtonovský pohyb planet. Pro poměr členů na pravé straně dostáváme

$$\frac{3Mu^2}{Mc^2/\ell^2} = \frac{3\ell^2}{r^2c^2} \approx 3 \frac{v^2}{c^2}, \quad (17)$$

kde $\ell \approx rv$. Tento poměr je pro Merkur mnohem menší než 1. Vyjdeme tedy z řešení rovnice (16) bez posledního členu

$$u_0 = \frac{Mc^2}{\ell^2}(1 + e \cos \varphi) \quad (18)$$

a řešení rovnice (16) napíšeme jako

$$u = u_0 + u_1, \quad (19)$$

kde $u_1 \ll u_0$. Funkce u_1 splňuje rovnici

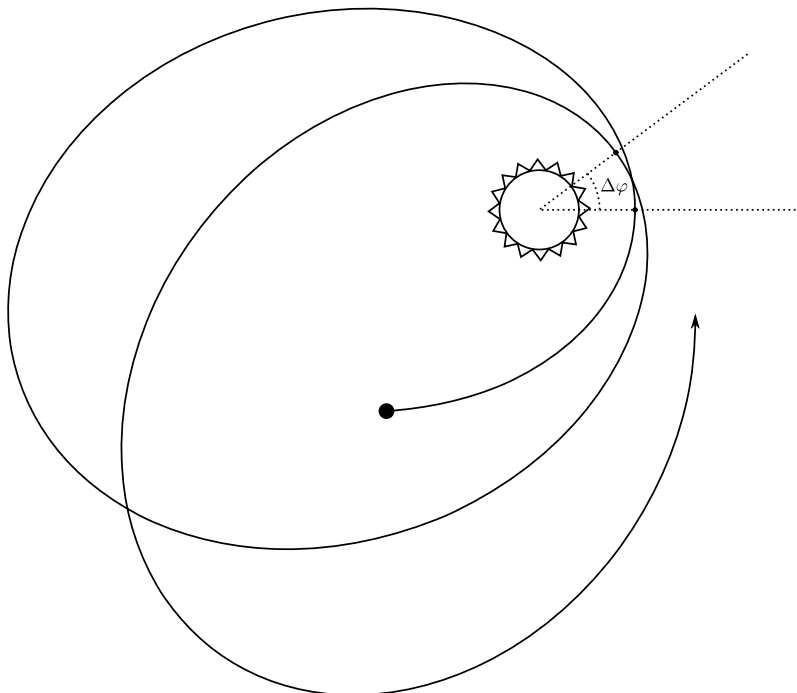
$$u_1'' + u_1 = 3Mu_0^2, \quad (20)$$

ve které jsme ponechali členy prvního řádu a zanedbali členy vyšších řádů ($3M(2u_0u_1 + u_1^2) \ll 3Mu_0^2$). Její řešení je ve tvaru

$$u_1 = a_0 + b_0 \cos \varphi + c_0 \cos^2 \varphi + \frac{3eM^3c^4}{\ell^4} \varphi \sin \varphi, \quad (21)$$

kde a_0 , b_0 a c_0 jsou konstanty. Kromě posledního členu jsou všechny členy periodické s periodou 2π a na stáčení perihelia nemají vliv. Přibližné řešení rovnice (15) je

$$u \approx \frac{Mc^2}{\ell^2} \left(1 + e \cos \varphi + \frac{3eM^2c^2}{\ell^2} \varphi \sin \varphi \right) \approx \frac{Mc^2}{\ell^2} \left[1 + e \cos \left(1 - \frac{3M^2c^2}{\ell^2} \right) \varphi \right]. \quad (22)$$



Obr. 2. Stáčení perihelia v gravitačním poli popsaném Schwarzschildovou metrikou. Během jednoho oběhu se eliptická dráha otočí o úhel $\Delta\varphi$.

Rovnice (22) popisuje mírně se stáčející elipsu. Po jedné otáčce se Merkur dostane do stejné vzdálenosti od Slunce, pokud se argument kosinu ve vztahu (22) změní o 2π . Merkur se tedy otočí o úhel

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{1 - \frac{3M^2c^2}{\ell^2}} \quad (23)$$

a elipsa se tudíž stočí o

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \approx \frac{6\pi M^2c^2}{\ell^2}, \quad (24)$$

kde stejně jako v (3) $M = mG/c^2$, hmotnost Slunce $m = M_\odot = 1,989 \times 10^{30}$ kg, rychlost světla $c = 3 \times 10^8$ m s⁻¹, gravitační konstanta $G = 6,674 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻² a $\ell \approx R^2 2\pi/T$, oběžná doba Merkuru okolo Slunce $T = 0,24$ roku (88 dní) a vzdálenost Merkuru od Slunce $R = 5,791 \times 10^{10}$ m. Dostáváme tedy

$$\Delta\varphi \approx 5 \times 10^{-7} \text{ rad/orbitu} \approx 0,1''/\text{orbitu}, \quad (25)$$

a protože Merkur oběhne Slunce za 88 dní, za 100 let bude tento efekt činit

$$\Delta\varphi \approx 43''/100 \text{ let}. \quad (26)$$

4.2. Ohyb světla

Podle obecné teorie relativity je prostoročas v okolí hmotných těles zakřiven, a proto je ovlivněn nejenom pohyb hmotných testovacích částic v blízkosti takovýchto objektů, ale jsou zakřiveny také trajektorie nehmotných částic pohybujících se po nulových geodetikách¹¹.

Ukažme si, jak se světelný paprsek ohýbá v gravitačním poli Slunce, popsaném Schwarzschildovou metrikou (3). Využijeme rovnice geodetiky (5), (6)–(8) a z nich odvozený Binetův vzorec (16), do kterých pro světlo dosadíme $\kappa = 0$. Dostaneme

$$u'' + u = 3Mu^2, \quad (27)$$

kde člen na pravé straně je relativistická korekce. Podobně jako v případě stáčení perihelia hledáme řešení postupnou aproximací ve tvaru $u = u_0 + u_1$, tedy newtonovské řešení u_0 plus relativistická korekce $u_1 \ll u_0$ prvního řádu v M . Řešením rovnice (27) bez pravé strany je newtonovská trajektorie

$$u_0 = \frac{1}{b} \cos \varphi, \quad (28)$$

odpovídající přímce v polárních souřadnicích, kde jedna z integračních konstant byla zvolena tak, aby $\varphi = 0$ odpovídalo nejbližšímu bodu k počátku souřadnic. Zbývající integrační konstanta b , tzv. impaktní faktor, představuje právě tuto nejmenší vzdálenost od počátku a je určena rovnicí (15), ze které v newtonovské limitě pro nulovou geodetiku plyne

$$b = \frac{\ell}{c\mathcal{E}}. \quad (29)$$

Korekci u_1 dostaneme řešením rovnice (20),

$$u_1 = \frac{M}{b^2}(1 + \sin^2 \varphi). \quad (30)$$

Přibližné řešení rovnice (27) je tedy

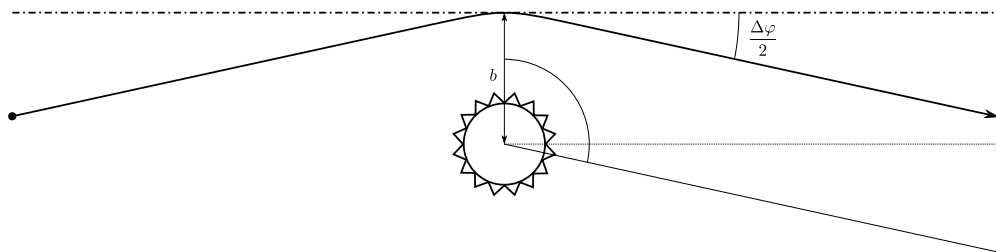
$$u \approx \frac{1}{b} \left(\cos \varphi + \frac{M}{b}(1 + \sin^2 \varphi) \right). \quad (31)$$

Všimněme si, že nejbližší bod je oproti newtonovskému případu blíže k počátku souřadnic, ale protože typicky pro průchod fotonů v blízkosti povrchu hvězd $M/b \ll 1$, můžeme tento posun zanedbat. Například pro Slunce $M/b = r_s/(2R_\odot) = 2 \times 10^{-6}$, kde $R_\odot = 6,96 \times 10^8$ m je poloměr Slunce a $r_s = 3 \times 10^3$ m je Schwarzschildův poloměr Slunce.

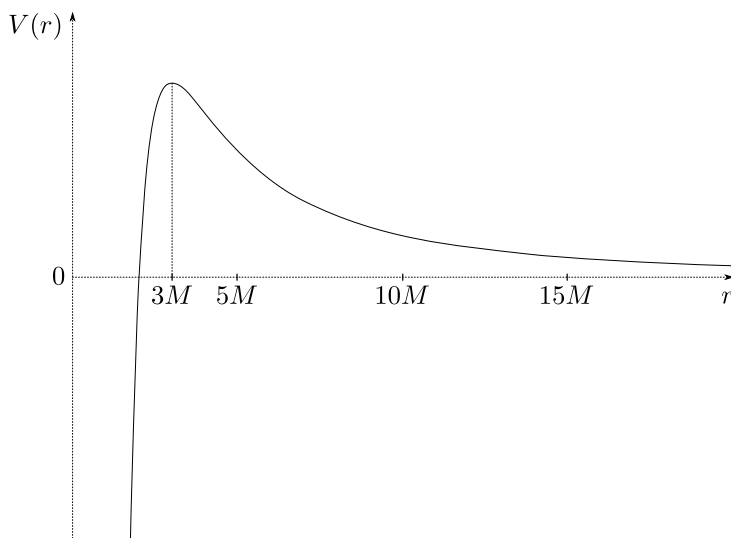
Fotony přicházejí z nekonečna a odcházejí do nekonečna ($r \rightarrow \infty$), což odpovídá úhlům $\pm\varphi_\infty$ splňujícím $u(\pm\varphi_\infty) = 0$. Jak je patrné z obrázku 3, úhel ohybu trajektorie fotonu od původního směru $\Delta\varphi$ získáme z rovnice

$$u \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = 0. \quad (32)$$

¹¹Nulové geodetiky jsou geodetiky, jejichž tečný vektor má nulovou normu.



Obr. 3. Ohyb trajektorie fotonů v gravitačním poli popsaném Schwarzschildovou metrikou. Čerchovaná čára představuje newtonovskou trajektorii.



Obr. 4. Průběh efektivního potenciálu pro nulové geodetiky v ekvatoriální rovině Schwarzschildova prostoročasu

Provedeme-li rozvoj v bodě $\pi/2$, dostáváme

$$\Delta\varphi \approx \frac{4M}{b}. \quad (33)$$

Pro fotony prolétávající těsně nad povrchem Slunce je ohyb roven

$$\Delta\varphi = 1,75''. \quad (34)$$

Tento zdánlivý posun pozice hvězd při jejich průchodech v blízkosti slunečního kotouče během úplného zatmění Slunce v roce 1919 byl skutečně naměřen při expedici vedené Arthurem Eddingtonem. Přestože bylo měření zatíženo poměrně velkou chybou, potvrdilo platnost obecné teorie relativity.

Ohyb trajektorie fotonů jsme studovali v přiblížení slabého gravitačního pole za podmínky $M/b \ll 1$. Pokud tato podmínka není splněna (např. u černých děr), tj. impaktní faktor překročí určitou kritickou hodnotu, fotony již neuniknou a jsou

zachyceny. K odvození této kritické hodnoty využijeme efektivní potenciál (12) pro nulové geodetiky

$$V(r) = \frac{\ell^2}{2r^3}(r - 2M), \quad (35)$$

jehož průběh je znázorněn na obrázku 4. Vyšetřením efektivního potenciálu zjistíme, že v bodě $r = 3M$ se nachází maximum odpovídající nestabilní kruhové orbitě fotonů. Minimální energii fotonů potřebnou na překonání této potenciálové bariéry získáme z rovnice (11),

$$\frac{1}{2}c^2\mathcal{E}^2 = V(3M), \quad (36)$$

odkud dostáváme

$$b^2 = \frac{\ell^2}{c^2\mathcal{E}^2} = 27M^2. \quad (37)$$

Schwarzschildova geometrie tedy zachytí všechny fotony pohybující se po trajektoriích s impaktním parametrem b menším než kritická hodnota

$$b_c = 3^{\frac{3}{2}}M. \quad (38)$$

Pro objekty o hmotnosti Slunce vychází kritická hodnota impaktního parametru $b_c = 7,7 \times 10^3$ m.

4.3. Gravitační rudý posuv

Gravitační rudý posuv je dalším z důsledků Einsteinových rovnic. Budeme jej nyní studovat ve statickém¹² Schwarzschildově prostoročase (3). Mějme dva pozorovatele, V (vysílající) a P (přijímající), kteří (s pomocí motorů) zůstávají na pevných souřadnicích $(r_v, \theta_v, \varphi_v)$ a $(r_p, \theta_p, \varphi_p)$. Pozorovatel V vysílá v pravidelných intervalech $\Delta\tau_v$ krátké světelné pulsy. Pro čtyřinterval mezi dvěma následujícími pulsy platí

$$-c^2\Delta\tau_v^2 \equiv \Delta s^2 = g_{ab}\Delta x_v^a\Delta x_v^b = -f(r_v)c^2\Delta t_v^2. \quad (39)$$

Pozorovatel P přijímá tyto pulsy v intervalech $\Delta\tau_p$

$$-c^2\Delta\tau_p^2 \equiv \Delta s^2 = g_{ab}\Delta x_p^a\Delta x_p^b = -f(r_p)c^2\Delta t_p^2. \quad (40)$$

Ve statickém gravitačním poli nedošlo mezi dvěma pulsy k žádné změně. Dráha obou pulsů bude tedy identická, pouze posunutá o pevný čas Δt . Platí tedy

$$\Delta t_v = \Delta t_p. \quad (41)$$

Odtud dostáváme pro poměr intervalů a frekvencí

$$\frac{\Delta\tau_p}{\Delta\tau_v} = \sqrt{\frac{f(r_p)}{f(r_v)}}, \quad \frac{\Delta\nu_p}{\Delta\nu_v} = \sqrt{\frac{f(r_v)}{f(r_p)}}. \quad (42)$$

Stejný výsledek samozřejmě platí i pro poměr vlnových délek a frekvencí elektromagnetického záření.

¹²Ve statickém prostoročase lze zvolit časovou souřadnici t tak, že metrika na této souřadnici nezávisí.

Pro parametr rudého posuvu z tak dostáváme

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_v} = \frac{\Delta\tau_p}{\Delta\tau_v} - 1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_p}}{1 - \frac{2M}{r_v}}} - 1, \quad (43)$$

kde $\Delta\lambda$ je změna vlnové délky.

Pokud se tedy šíří elektromagnetická vlna z oblasti se silnějším gravitačním polem do oblasti se slabším gravitačním polem (tj. $r_p > r_v$), dochází k prodlužování její vlnové délky, a tudíž v případě spektrální čáry k jejímu posuvu k rudé části spektra ($z > 0$).

Poděkování. Práce na článku byla podpořena prostředky RVO 67985840.

L i t e r a t u r a

- [1] GRYGAR, J.: *Prolínání astronomie a relativity (1919–2014)*. PMFA 3 (2015), 189–202.
- [2] NOVOTNÝ, J.: *100 let obecné teorie relativity*. PMFA 3 (2015), 177–188.
- [3] RINDLER, W.: *Relativity, special, general and cosmological*. Oxford University Press, 2001.
- [4] SCHUTZ, B.: *A first course in general relativity*. 2nd edition, Cambridge University Press, 2009.
- [5] STEPHANI, H., KRAMER, D., MACCALLUM, M., HOENSELAERS, C., HERLT, E.: *Exact solutions of Einstein's field equations*. 2nd edition, Cambridge University Press, 2003.
- [6] WILL, C. M.: *Theory and experiment in gravitational physics*. 2nd edition, Cambridge University Press, 1993.
- [7] WILL, C. M.: *The confrontation between general relativity and experiment*. Living Rev. Relativity 17 (2014), 4. Dostupné z: www.livingreviews.org/lrr-2014-4