

Aktuárské vědy

E. J. Gumbel
L'âge limite. II

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 2, 79–86

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144658>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



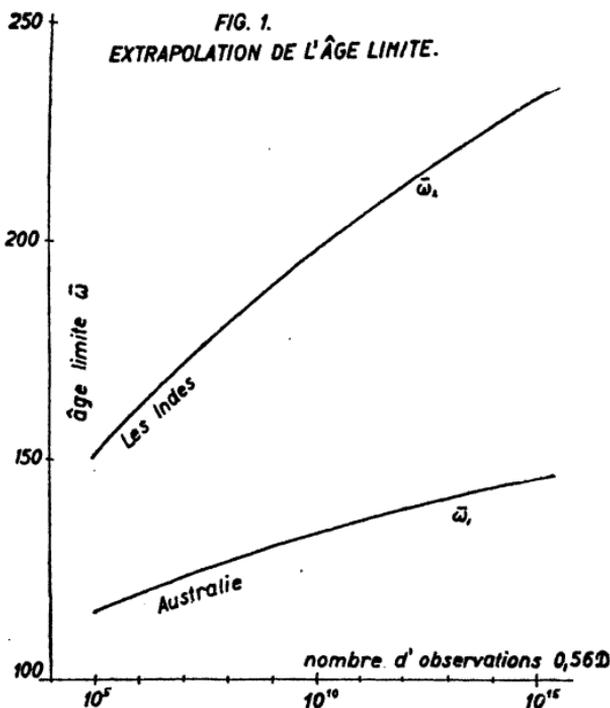
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

L'âge limite.

E. J. Gumbel Université de Lyon.

(La suite.)

La figure (1) représente le cours de ces valeurs. Nous ne mettons aucun poids sur les nombres eux-mêmes, puisque dans la pratique les différences entre les tables favorables et défavorables seront de beaucoup moindres. Ce qui importe, c'est de donner un exemple numérique qui prouve, que c'est extrêmement lentement que l'âge limite s'accroît avec une augmentation, même énorme, du nombre d'observations et que la supériorité du point de vue de la longévité des tables défavorables est vraiment remarquable. Le fait que l'écart type est plus que le double



pour les tables défavorables n'y change rien. Le nombre nécessaire pour qu'on puisse attendre un âge limite donné est moindre de quelques puissances de 10 pour la table défavorable.

Ce paradoxe est vite éclairci lorsqu'on retourne aux sources de notre théorie. Le plus grand écart à attendre pour une distribution quelconque et pour un nombre d'observations donné est un multiple de l'écart type. Or, la table de survie favorable a une grande valeur de l'âge normal mais une petite valeur de la vie normale correspondant à un écart type petit, tandis que la table défavorable a une petite valeur de l'âge normal mais une grande valeur de la de vie normale, corre-

spondant à un grand écart type de la distribution des décès. Donc il n'y a rien d'étonnant qu'une table défavorable ait pour le même nombre d'observations un âge limite plus élevé.

D'ailleurs on peut se rendre compte de cette supériorité aussi du point de vue biométrique. Considérons les deux cas extrêmes pour la distribution des décès. Dans le cas le plus défavorable l'âge normal serait zéro, et la vie normale, égale à l'espérance de vie d'un nouveau-né, aurait une valeur assez élevée, disons $E(\xi) = 20$. Dans le cas le plus favorable supposons que l'âge normal soit 100 ans et que tous les hommes arrivent à cet âge. Mais pour rester dans les limites de la raison, il faudrait ajouter que la vie normale soit assez petite, disons $E(\xi) = 1$. Alors l'âge limite restera assez proche de 100, et sera surpassé pour un nombre d'observations suffisant par l'âge limite de la distribution la plus défavorable.

Si la probabilité d'atteindre l'âge normal reste la même, l'accroissement de l'âge normal accompagné d'une diminution de l'espérance de vie à cet âge fait diminuer l'âge limite virtuel. L'effet est contraire si la diminution de la mortalité est telle que la vie normale augmente pour des valeurs croissantes de l'âge normal. C'est le cas, quand on compare les deux sexes pour la même population. Alors l'âge normal des femmes est en général supérieur à celui des hommes. Mais la même propriété vaut souvent pour la vie normale. Si les deux conditions sont vérifiées il en résulte que l'âge limite des femmes est supérieur à celui des hommes. Les observations montrent en effet que le dernier survivant est en général une femme.

Dans les temps passés et dans les pays arriérés les tables de survie étaient défavorables. Ceci pourrait expliquer qu'il y ait eu des hommes qui ont atteint des âges supérieurs aux nôtres et les mauvais renseignements ne seraient pas l'unique explication des âges élevés qu'on trouverait pour de telles populations.

Pour juger une table de mortalité il y a deux points de vue contraires l'un de l'autre. L'usuel est de considérer l'accroissement de l'espérance de vie d'un nouveau-né et de même l'accroissement de l'âge normal comme signe du progrès. L'autre point de vue c'est l'âge du dernier survivant. L'accroissement de l'un peut entraîner la réduction de l'autre. Il n'y a pas de doute que c'est le premier point de vue qui est légitime. L'accroissement de l'âge normal est préférable, même s'il entraîne une mort „prématurée“ du dernier survivant.

3. Exemples numériques.

Après ces considérations théoriques il faut vérifier notre théorie en l'appliquant à une population donnée. Pour cela on n'a qu'à déterminer l'âge normal, la probabilité de l'atteindre et son espérance de vie. De plus il faut tirer des registres le nombre des décès qui a été employé pour la construction de la table. On comparera le résultat avec l'âge ω'

observé après lequel l'individu le plus âgé est décédé, valeur qu'on trouve dans quelques statistiques de mortalité. Toutes ces valeurs sont données d'une façon systématique dans la publication de Glover¹⁰⁾ pour les tables américaines.

Traisons d'abord un exemple dans tous les détails. Pour la table United States Males 1910 (U. S. A. m. 10) les fonctions biométriques ont au voisinage de l'âge normal les valeurs données dans le tableau III.

III. Table de mortalité, U. S. A. m. 10 au voisinage de l'âge normal.

Age	Fonction de survie	Morts	Différences absolues	Espérance de vie	Différence
x	$l(x) \cdot 10^5$	$D(x) \cdot 10^5$	$D(x) \cdot 10^5$	$E(x)$	$\Delta E(x)$
72	27134	1969			
73	25165	1977	8	7,53062	0,40060
74	23188	1975	2	7,13002	
75	21213				

On en tire l'âge normal

$$\xi = 73,8.$$

L'interpolation linéaire donne la probabilité de l'atteindre

$$l(\xi) = 0,23583$$

et la vie normale

$$E(\xi) = 7,21014.$$

Pour la construction de la table, 586 051 décès ont été utilisés. Par conséquent le nombre d'observations sera d'après (16)

$$\frac{1}{2}N \cdot 10^{-6} = 0,13821.$$

La table I de notre travail précédent nous mène à

$$\tau = 3,17247.$$

Alors le dernier âge sera d'après (18)

$$\tilde{\omega} = 114,34 \text{ ans}$$

et l'écart type d'après (20)

$$\sigma = 2,58 \text{ ans.}$$

Comparons ce résultat aux observations: Les cinq hommes les plus âgés de cette population sont morts entre l'âge 110 et 111 ans. Supposons qu'ils soient morts l'un après l'autre proportionnellement aux âges, mais, vu la mortalité extrême des vieillards, tous avant l'âge 110,5. Alors on peut admettre comme âge observé au moment de la mort du dernier survivant $\omega' = 110,45$. Donc notre calcul nous a mené à un âge supérieur de 3,89 ans aux observations. Cette différence est $1\frac{1}{2}$ fois plus grande que l'écart type, ce qui signifie un accord suffisant entre la théorie et l'observation.

Ces calculs n'ont pas pu être faits pour toutes les tables construites par Glover. Il faut d'abord laisser de côté les tables pour lesquelles le nombre d'observations est insuffisant d'après (17).

Pour d'autres tables une difficulté provenait du fait que l'âge le plus élevé avait été atteint par un noir. Or, on ne peut pas prêter une grande confiance aux registres démographiques des noirs. Par exemple le noir le plus âgé pour l'année 1901 serait mort à l'âge de 129 ans, cependant que le blanc le plus âgé a atteint l'âge de 119 ans. C'est pourquoi on n'a employé pour l'année 1901 que les nombres

IV. Constantes biométriques pour quelques tables américaines.

Population	Age	Probabilité	Nombre	Nombre d'ob-	Dernier	Vie nor-
	normal	normale	des	servations	âge	male
	ξ	$l(\xi)$	décès D	$\frac{1}{2}N \cdot 10^{-6}$	réduit τ	$E(\xi)$
	1	2	3	4	5	6
White native f. 01	78,07407	0,22378	336967	0,075406	3,07996	6,32099
White native m. 01	76,23529	0,21556	374181	0,080658	3,09040	6,48993
White native f. 10	77,16667	0,24728	359086	0,088795	3,10510	6,52473
White native m. 10	75,79310	0,22002	408658	0,089913	3,10705	6,56310
Wh. foreign born f. 10	71,22581	0,35075	137292	0,048155	3,00981	8,18286
Wh. foreign born m. 10	70,27273	0,32934	159003	0,052366	3,02298	8,29823
White f. 01	75,76923	0,23797	456660	0,10867	3,13602	7,02408
White m. 01	75,05263	0,21287	506648	0,10785	3,13486	6,82205
White rural f. 10	76,50000	0,29020	182947	0,053091	3,02806	6,75055
White rural m. 10	76,20454	0,26416	208360	0,055040	3,03083	6,54395
White cities f. 10	71,57143	0,29443	313431	0,092283	3,11108	8,33816
White cities m. 10	68,40000	0,28287	359301	0,10164	3,12581	8,79057
White f. 10	73,80000	0,29218	496378	0,145031	3,17981	7,69357
White m. 10	74,00000	0,23590	567661	0,13391	3,16771	7,13013
Female 01	75,60000	0,23786	471534	0,11216	3,14088	7,09815
Male 10	73,80000	0,23583	586051	0,13821	3,17247	7,21014
New York f. 10	72,08333	0,29691	199907	0,059354	3,04264	8,21853
New York m. 10	70,85714	0,25377	233498	0,059255	3,04238	8,22562

obtenus pour la population blanche. Pour l'année 1910 et le sexe masculin on peut encore tenir compte des nombres obtenus pour les noirs, car les trois blancs et les deux noirs les plus âgés sont morts après avoir atteint l'âge de 110 ans. Il serait intéressant de vérifier la théorie énoncée plus haut pour les nègres dont les tables de survie sont assez défavorables. Malheureusement les nombres d'observations ne suffisaient pas. Pour plus de sûreté nous avons éliminé toutes les tables dans lesquelles le dernier survivant était un nègre.

Après ces discriminations sont restées 18 tables pour lesquelles toutes les données nécessaires pour le calcul et la comparaison étaient connues. Le tableau IV donne ces valeurs. La première colonne contient

l'âge normal, la deuxième la probabilité d'un nouveau-né de mourir après cet âge, la troisième le nombre des décès employé pour la construction de la table. En multipliant les deux dernières valeurs on obtient le nombre d'observations (colonne 4) par la formule (16). A l'aide de la table I du travail précédent on obtient par interpolation le dernier âge réduit (colonne 5). Enfin la colonne 6 contient l'espérance de vie normale, calculée d'après les valeurs des temps vécus par le procédé usuel. Les calculs nécessaires pour l'interpolation ont été effectués à l'aide de la règle à calcul.

Donc, nous connaissons toutes les valeurs nécessaires pour le calcul des derniers âges. En effet, on l'obtient selon (18) en faisant la somme des produits des colonnes 5, 6 et $\sqrt{\pi}$ avec l'âge normal donné dans la colonne 1.

Le tableau V contient cette valeur dans la colonne 2. En divisant l'espérance de vie (tableau IV col. 6) par l'âge réduit (tableau IV, col. 5), on obtient l'écart type d'après (20). Cette valeur est portée dans la colonne 3 du tableau V. La première colonne donne l'âge observé après lequel un seul individu est mort. La dernière enfin contient les déviations entre la théorie et l'observation rapportées à l'écart type.

Quant aux plus grands âges observés ils ont été fixés par la manière décrite plus haut: Nous distribuons les décès de la dernière année proportionnellement à l'intervalle de six mois. La critique de ces observations ne nous regarde pas. Nous acceptons ces valeurs comme données et laissons la responsabilité au statisticien américain. Pourtant nous ne pouvons pas supprimer le doute que ces valeurs nous semblent être un peu élevées.

Pour la comparaison entre les valeurs théoriques et observées il se présente encore une difficulté. Les différentes tables ne sont pas indépendentes les unes des autres. Ainsi la femme la plus âgée, morte à New York en 1910, est en même temps la femme citadine la plus âgée de l'année 1910, et la femme la plus âgée née à l'étranger. Elle pourrait être également la femme la plus âgée de l'année 1910. Bref, les individus les plus âgés des différentes tables sont les mêmes. Pour corriger ce fait troublant on a rangé les tables par cinq groupes de sorte que dans chacun toutes les tables sont indépendentes l'une de l'autre, tandis que les différentes tables dans différents groupes ont des populations communes.

Puisque les observations sont assez incertaines, on doit s'attendre seulement à un accord pour l'ordre de grandeur des valeurs calculées et observées. Si, comme il est peut-être légitime de supposer, les valeurs observées sont excessives, ce serait notre théorie qui en profiterait. Car les écarts absolus, de même que les écarts relatifs à l'écart type seraient diminués.

Le premier groupe du tableau V contient six observations indépendentes. Dans deux cas, le calcul donne une valeur trop petite. La

grandeur des déviations est satisfaisante, sauf celle qui atteint 3,12 et qui représente la plus grande de toutes les déviations. En moyenne prise par valeur absolue, la déviation est égale à l'écart type. Le second groupe n'a qu'une déviation positive. En moyenne la déviation ici et dans le groupe suivant est un peu moindre que l'écart type. Dans les groupes suivants elle atteint 0,9 fois l'écart type.

V. Le dernier âge, théorie et observation.

Table	1	2	3	4
	Observation ω'	Calcul $\hat{\omega}$	Ecart type σ	Déviation entre 1 et 2 divisé par (3) $\frac{\omega' - \hat{\omega}}{\sigma}$
Population blanche d'après le sexe et l'origine 1901 et 1910.				
White native f. 01	112,25	112,58	2,33	— 0,14
White native m. 01	119,25	111,78	2,39	3,12
White native f. 10	111,25	113,08	2,38	— 0,77
White native m. 10	109,25	111,94	2,40	— 1,12
Wh. foreign born f. 10	117,25	114,88	3,09	0,76
Wh. foreign born m. 10	110,42	114,74	3,12	— 1,38

Population blanche d'après le sexe 1901, citadine et rurale 1910.

White f. 1901	114,25	114,81	2,55	— 0,22
White m. 1901	119,25	112,96	2,47	2,55
White rural f. 10	111,38	112,73	2,53	— 0,53
White rural m. 10	110,38	111,36	2,45	— 0,40
White cities f. 10	117,25	117,55	3,05	— 0,10
White cities m. 10	110,25	117,10	3,20	— 2,14

Population blanche 1910.

Female 10	117,25	117,14	2,75	0,03
Male 10	110,42	114,03	2,56	— 1,41

Population totale 1901 et 1910.

Female 01	114,25	115,11	2,57	— 0,33
Male 10	110,45	114,34	2,58	— 1,51

Ville de New York 1910.

Female	117,25	116,41	3,07	0,27
Male	110,25	115,21	3,08	— 1,61

On pourrait être tenté de comparer la distribution des valeurs $\frac{\omega' - \bar{\omega}}{\sigma}$ avec la distribution théorique (8), en y introduisant la transformation linéaire correspondante. Mais ce procédé ne serait pas correct, étant donné que les dix-huit valeurs observées ne sont pas indépendentes.

Pour la critique du résultat obtenu il faut donc se borner aux faits suivants: Les déviations dépassent seulement dans un cas trois fois l'écart type et sont en général de l'ordre de cette valeur. La plus grande déviation observée est positive, comme cela convient à une telle distribution. Aussi la distribution du signe est satisfaisante. Cet ensemble nous permet la conclusion que, vu la difficulté inhérente du problème et vu l'insécurité des observations, l'accord entre la théorie et les observations est satisfaisant.

D'ailleurs cette application de notre théorie sur l'âge limite vaut ce que vaut l'outil que nous avons employé: la théorie de Lexis. Dans le cas où cette approximation donne aux âges élevés des valeurs trop grandes pour la table de survie, le dernier âge calculé sera forcément trop grand, reproche qu'on doit faire à la formule spéciale employée et non à la théorie de l'âge limite. Dans ce cas il faudra améliorer la fonction de survie et reprendre le calcul. Mais on pourrait considérer notre résultat comme une première approximation.

4. Une distribution observée des plus grands âges.

Notre raisonnement était basé jusqu'ici sur la théorie de Lexis dont nous avons tiré les conséquences pour le calcul du dernier âge. Il s'agit maintenant de libérer notre théorie de la supposition spéciale que la distribution des décès pour les âges élevés soit Gaussienne, et de l'appliquer pourtant aux observations. Malheureusement les renseignements exacts sur les âges élevés sont assez rares. Mais le Bureau fédéral statistique de la Suisse a mis généreusement à ma disposition ses observations sur les plus grands âges.

La figure (2) contient pour les deux sexes et pour chaque année de l'intervalle 1879—1933 l'âge après lequel de dernier survivant est mort. Chacun de ces 110 chiffres est une valeur observée du plus grand âge. D'après notre théorie les distributions correspondantes à cette série doivent suivre la loi finale (8) des plus grandes valeurs. Le nombre d'observations est suffisant. En effet, pendant ces 55 années le nombre des morts en Suisse était de l'ordre de grandeur $1,6 \cdot 10^6$ pour chaque sexe.

Les observations classées en distributions se trouvent dans le tableau VI. La première colonne contient l'âge, les quatre autres le

nombre absolu des années dans lesquelles cet âge était le plus grand. La deuxième et la troisième colonne traitent le plus grand âge pour chaque sexe, la quatrième pour les deux sexes réunis, la dernière pour le plus vieux des deux sexes.

VI. Distribution des plus grands âges Suisse 1879—1933.

Ages	Hommes	Femmes	Ensemble	Le plus âgé des deux sexes
96	1	—	1	—
97	8	3	11	1
98	9	6	15	3
99	10	9	19	6
100	11	13	24	14
101	5	12	17	12
102	2	8	10	7
103	7	1	8	7
104	1	2	3	3
105	1	0	1	1
106	0	1	1	1
<hr/> <i>n</i>	55	55	110	55

Il s'agit maintenant de comparer les observations pour les deux sexes et pour l'ensemble avec les distributions théoriques du plus grand âge. La distribution du plus âgé des deux sexes sera traitée plus tard.

Il faut d'abord déterminer les deux constantes $\tilde{\omega}$ et $\mu(\tilde{\omega})$ par les équations (10) et (12). Les parties gauches sont les valeurs observées de la moyenne arithmétique et de l'écart type. On obtient la valeur inverse de l'intensité de mortalité pour le dernier âge par

$$\frac{1}{\mu(\tilde{\omega})} = 0,77970 \sigma. \quad (21)$$

(A suivre.)

LITERATURA.

Soukromé životní pojištění v roce 1935. Státní úřad statistický vydal v srpnu 1936 statistiku o soukromých pojišťovnách za rok 1935 ve svých „Zprávách“. Rozsah a forma statistického šetření pohybuje se v obvyklých mezích; o zprávách samotných bylo v časopise již několikrát referováno, naposledy v ročníku V., č. 2. Proto zde se omezuje jen na několik poznámek o životním soukromém pojištění.

Výsledky soukromého životního pojištění stojí stále pod vlivem hospodářské krise; rok 1935 přináší další pokles jak v příjmu na pojistném, tak