Luboš Pick

Dirichletovy šuplíčky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 2, 106–118

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/145762

Dirichletovy šuplíčky

Luboš Pick, Praha

Abstrakt. Článek obsahuje několik příkladů (téměř ze života), jejichž společným jmenovatelem je jednoduchý matematický princip známý jako princip Dirichletův. Hlavním úkolem uvedených příkladů je ilustrovat poněkud překvapivou šíři pole jeho aplikací.

1. Motivační úlohy

Začneme několika úlohami přímo z každodenního života, které nám poslouží jako motivace pro naše matematické spády. První z nich je ryze praktického charakteru.

Úloha 1.1 (o ponožkách). Máme 10 bílých, 10 červených a 10 zelených ponožek, kromě barvy zcela identických. Kolik jich nejméně musíme vytáhnout z šuplíku, abychom si byli jisti, že z vytažených kusů bude možné složit alespoň jeden homogenní pár?

Druhá úloha je povahy spíše filozofické. Chceme-li na ni dát odpověď, nevystačíme jako u úlohy první jen s nějakým konkrétním číslem a musíme podat plnohodnotný matematický důkaz.

Úloha 1.2 (o vlasech). Dokažte, že v České republice žije několik osob, které mají stejný nenulový počet vlasů na hlavě.

Co myslíte, je toto tvrzení pravdivé? A máte nějaký nápad, jak byste jej v praxi dokazovali nebo vyvraceli? A ještě je tu jedna zapeklitá otázka: mají obě uvedené úlohy něco společného?

Než se dostaneme k teoretickému podkladu pro řešení uvedených úkolů, položíme si ještě několik dalších otázek. Nenápadně přitom přejdeme od praktických a filozofických problémů k zadáním čistě matematickým.

Úloha 1.3 (o zlomku). Vyjádříme-li zlomek a/b, kde a a b jsou přirozená čísla, v desetinné formě, pak bude vždy desetinný rozvoj výsledného čísla buďto ukončený, nebo periodický s periodou kratší než b. Dokažte nebo vyvraťte.

Následující úloha je též ryze matematická, zadání je navíc tentokrát geometrické povahy, takže si je lze snáze představit nebo dokonce nakreslit.

Úloha 1.4 (o mřížce). Máme pět bodů na pravidelné čtvercové mřížce, které spojíme úsečkami. Dokažte, že pak alespoň na jedné z nich leží některý další bod z mřížky.

A do úchvatného světa geometrie se vydáme ještě jednou.

Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: pick@karlin.mff.cuni.cz

Úloha 1.5 (o trojúhelníku). Umístíme libovolně pět bodů do rovnostranného trojúhelníku o straně délky 1. Dokažte, že se pak mezi nimi najdou alespoň dva, jejichž vzdálenost nepřesáhne $1/2$.

A úplně nakonec tu máme ještě o něco jednodušší variantu předcházejícího úkolu.

Úloha 1.6 (o čtverci). Umístíme libovolně pět bodů do čtverce o straně délky 1. Dokažte, že se pak mezi nimi najdou alespoň dva, jejichž vzdálenost nepřesáhne $1/\sqrt{2}$.

Uvedené úlohy nejsou těžké a čtenář si většinu z nich jistě snadno sám vyřeší. Pro nás je v tomto okamžiku podstatná jiná otázka, a sice: co mají všechny tyto úlohy společného?

Společným jmenovatelem všech těchto úloh je jednoduchý, ale překvapivě silný matematický princip, který je znám pod různými názvy, například

- Dirichletův princip,
- zásuvkový princip,
- přihrádkový princip,
- princip holubníku

a podobně. My jej zde budeme označovat slovním spojením *Dirichletovy šuplíčky*. Je pojmenován po německém matematikovi Johannu Peteru Gustavu Lejeune Dirichletovi (1805–1859).

Přesné znění Dirichletova principu je vskutku velice intuitivní. V jeho nejjednodušší formě jej můžeme zformulovat například takto:

Věta 1.7 (Dirichletův princip). *Umístíme-li $n+1$ (nebo více) předmětů do n přihrádek, pak alespoň jedna přihrádka musí obsahovat alespoň dva předměty. Zde jest n přirozené číslo, tedy alespoň 1.*

V zamyšlení uvedeném v tomto článku postupujeme volně podle knížek [2], [3], [4], [5], [6] kanadského matematika Rosse Honsbergera (*1929), který diskusi o Dirichletově principu uvádí provokativním bonmotem: „Co myslíte, je možné, že by něco tak jednoduchého mohlo být k něčemu dobré?“ No, co myslíte?

Obecnější verze Dirichletova principu je zformulována v následující větě.

Věta 1.8 (Dirichletův princip). *Umístíme-li $kn+1$ (nebo více) předmětů do n přihrádek, pak alespoň jedna přihrádka musí obsahovat alespoň $k+1$ předmětů. Zde jest n přirozené číslo, tedy alespoň 1.*

Je pravda, že toto tvrzení vlastně neříká nic jiného než nanejvýš zřejmý fakt, že v žádném konečném souboru nějakých kvantifikovatelných položek nemohou být všechny hodnoty podprůměrné (nebo všechny nadprůměrné). A přesto …

V následujícím textu se pokusíme čtenáře přesvědčit, že Dirichletův princip představuje velice důležitý a nečekaně všestranný matematický nástroj s velmi rozmanitými aplikacemi v matematice i mimo ni. Naším nejbližším cílem bude uvést některé z jeho nejkrásnějších aplikací.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Na závěr úvodního oddílu uveďme ještě pro úplnost českou verzi Dirichletova principu, jejímž autorem je Emil Calda.

Věta 1.9 (Dirichletův princip — česká verze). *Uložíme-li večer do n zásuvek $n+1$ nebo více předmětů a ráno tam nemáme nic, pak nám někdo ukradl alespoň z jedné zásuvky alespoň dva předměty.*

2. Mnohostěn

Posuďme následující smělé tvrzení.

Tvrzení 2.1. *Na každém mnohostěnu se najdou alespoň dvě stěny, které mají stejný počet hran.*

Tak za prvé, co to vůbec je mnohostěn? Řečeno slovy básníka, mnohostěn je, když … Tedy přesněji: mnohostěn je, když to má mnoho stěn a pak ještě také nějaké hrany a vrcholy. Před námi stojí nyní několik otázek:

- Je uvedené tvrzení pravdivé?
- Pokud ano, plyne nějak z Dirichletova principu?
- Pokud ano, jak máme správně zvolit šuplíčky?

Třetí otázka je samozřejmě nejtěžší a nejzajímavější. Než si přečtete řešení, zamyslete se nad ní. Stejné otázky nás budou provázet i u následujících úloh.

Důkaz tvrzení 2.1. Každá stěna daného mnohostěnu má určitý počet hran. Stěn je konečně mnoho, takže mezi nimi existuje alespoň jedna s největším počtem hran. Může jich pochopitelně existovat více, v takovém případě prostě jednu z nich zvolíme. Označíme symbolem n počet jejích hran. Vytvoříme n Dirichletových šuplíčků. Do šuplíčku s číslem k vložíme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran. Každá stěna, ke které přísluší n hran, má n různých sousedních stěn. Alespoň jednu takovou stěnu máme. Náš mnohostěn tedy musí mít alespoň $n + 1$ stěn. Z Dirichletova principu pak vyplývá, že alespoň v jednom šuplíčku jsou alespoň dvě stěny. Tím je tvrzení dokázáno. □

3. Deset malých čísloušků

Následující úlohou můžete pobavit společnost na intelektuálském mejdanu (za předpokladu, že se tam moc nehulí). Nejprve si vyjasníme některé nezbytné pojmy.

Definice 3.1. *Čísloušekem* nazýváme libovolné přirozené číslo menší než 100. *Výběrem z čísloušků* nazýváme každou množinu S deseti čísloušků. *Podvýběrem* nazveme jakoukoli neprázdnou podmnožinu daného výběru. A konečně řekneme, že dva podvýběry jsou *disjunktní*, jestliže jejich průnikem je prázdná množina.

Příkladem výběru z čísloušků je množina $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$. Příkladem dvou disjunktních podvýběrů z daného výběru jsou pak množiny $\{3, 26, 35, 76\}$ a $\{9, 14, 59\}$.

Pokuste se nyní v našem výběru $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$ (a nebo v nějakém jiném, vlastním) najít takové dva podvýběry, aby součet jejich prvků byl stejný. Po chvilce počítání nalezneme například podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ se společným součtem 77, případně ještě dva podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ se společným součtem 26. Je velmi pravděpodobné, že jste našli ještě nějaké další. Je tato situace zcela náhodná, nebo je v pozadí nějaký matematický zákon?

Samozřejmě, že zde platí zákon, Dougu Badmane, jde jen o to, jaký. Zkuste si tipnout, které z následujících tvrzení platí.

Tvrzení 3.2.

- *Každý výběr z čísloušků nutně obsahuje alespoň dva disjunktní podvýběry se stejným součtem.*
- *Každý výběr z čísloušků nutně obsahuje alespoň dvě dvojice disjunktních podvýběrů se stejným součtem.*
- *Každý výběr z čísloušků nutně obsahuje* ***strašnou spoustu*** *dvojic disjunktních podvýběrů se stejným součtem.*

Doufám, že Vás následující informace potěší: uvedená tvrzení platí **všechna**. Formulace třetího tvrzení může, pravda, působit poněkud matematicky nepřesně, ale když se na to podíváme z druhé stránky, tak jako bonus z důkazu zjistíme, kolik je „strašná spousta“.

Důkaz tvrzení 3.2. Ať zvolíme výběr a následné podvýběry jakkoli, součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v takzvaném „maximálním výběru“

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\},$$

a tento součet samozřejmě snadno určíme. Jeho hodnota činí 945. Vytvoříme nyní 945 Dirichletových šuplíčků. Do šuplíčku označeného číslem n pak vložíme všechny podvýběry, jejichž součet je roven n. Všech možných neprázdných podvýběrů je přesně $2^{10} - 1$ (jednička reprezentuje ne právě příliš zajímavý prázdný podvýběr), tedy 1023. Z Dirichletova principu tudíž vyplývá, že alespoň v jednom šuplíčku se musí nacházet alespoň dva různé podvýběry se stejným součtem. Vyhodíme z nich čísla, která jsou oběma podvýběrům společná, a dostáváme první dvojici. Protože 1023 je přesně o 78 více než 945, najdeme snadno další takovou dvojici, a hned vidíme, že jich ve skutečnosti musí být „strašná spousta“. $\square$

4. Farmacie

Nyní se dostáváme k aplikacím Dirichletova principu ve skutečném životě kolem nás. V tomto oddíle budeme studovat zajímavý problém z oblasti užívání léčiv. Úlohu jsem nalezl v knize Martina Gardnera [1], ten zde ale uvádí, že mu ji poslal Kenneth R. Rebman z California State University v Haywardu. Já jsem ji pro naše účely mírně domestikoval.

Úloha 4.1 (o užívání prášků). Pan Ondra Hypoch tak dlouho obtěžoval lékaře, až mu lékař předepsal prášky. Balení obsahuje 48 tabletek, které má Ondra spotřebovat během třiceti dnů. Může si jejich konzumaci rozvrhnout dle libosti, ale musí přitom dodržet jedno zásadní pravidlo: každý den musí spolknout alespoň jednu tabletku, přičemž ta poslední mu musí vyjít na třicátý den. V příbalovém letáku si pak doma Ondra přečetl toto: pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient právě 18 prášků, vypadají mu zuby. A pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient právě 11 prášků, upadnou mu palce u rukou.

Otázka: Bude se Ondra na konci terapie schopen kousnout do palce?

Při řešení této úlohy (která je mimochodem o poznání těžší než úlohy uvedené v prvních dvou aplikacích) nejprve využijeme Dirichletova principu k odvození následujících dvou poznatků.

Tvrzení 4.2.

(a) *V rámci pravidel Ondrovy terapie existuje způsob, jak se vyhnout posloupnosti po sobě jdoucích dní, během nichž by Ondra spotřeboval právě 18 prášků.*

(b) *Z pravidel Ondrovy terapie ale bohužel vyplývá, že při jakémkoli legálním užívání léků vždy bude existovat posloupnost po sobě jdoucích dní, během nichž spotřebuje právě 11 prášků.*

Jakmile dokážeme toto tvrzení, budeme schopni dát následující odpověď na výše uvedenou otázku: Ondra se sice bude schopen po skončení své terapie kousnout do palce, ale jedině do palce u nohy. Z tvrzení totiž vyplývá, že zuby se dají zachránit (viz (a)), ale palce na rukou nikoli (viz (b)).

Důkaz tvrzení 4.2. Tvrzení (a) dokážeme jednoduše: prostě necháme našeho pacienta užívat právě jeden prášek každý den po prvních patnáct dnů terapie, šestnáctý den do něj nacpeme devatenáct pilulek, a pokud tento výkon přežije, necháme jej po zbývajících čtrnáct dní opět užívat právě jeden prášek každý den tak, jak je to uvedeno v následujícím schématu.

$$\underbrace{11\ldots1}_{15}\,19\,\underbrace{11\ldots1}_{14}$$

Nyní dokážeme (podstatně těžší) tvrzení (b). Nejprve pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ označíme symbolem p_i celkový počet pilulek spotřebovaný od začátku terapie až po konec i-tého dne. Potom zřejmě platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Přičteme-li ke každému členu v této sadě nerovností číslo 11, dostaneme vztahy

$$11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59.$$

Obdrželi jsme dvě posloupnosti celých čísel, z nichž každá má třicet členů. To je celkem šedesát čísel. Obě posloupnosti jsou rostoucí, a tedy se v žádné z nich žádná dvě čísla neopakují. Protože $60 > 59$, plyne z Dirichletova principu, že nutně musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech. To znamená, řečeno jinými slovy, že existují $i, j \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ taková, že $p_j = p_i + 11$. Povšimněme si, že navíc musí platit $i < j$. Tedy

$$p_j - p_i = 11.$$

Tudíž ve dnech $i+1, i+2, \ldots, j$ spotřebuje Ondra právě 11 pilulek (a palce jsou v háji).

$\square$

Vzniká přirozená otázka, jestli lze uvedené tvrzení zobecnit, a pokud ano, tak pro které hodnoty. Laskavý čtenář si může zkusit s využitím právě nabytých vědomostí samostatně dokázat následující obecný výsledek.

Věta 4.3. (a) *Pro každé $k \in \{1, \ldots, 30, 48\}$ kromě* 16, 17 *a* 18 *vyplývá z pravidel Ondrovy terapie, že existuje posloupnost po sobě jdoucích dní, během nichž nutně spotřebuje právě k prášků.*

(b) *Pro $k \in \{16, 17, 18, 31, 32, \ldots, 47\}$ tvrzení (a) neplatí, tedy těmto hodnotám se lze při vhodné distribuci pilulek vyhnout.*

Jak už bylo řečeno, podrobný důkaz necháváme na čtenáři, uvedeme ale několik návodných poznámek. Za prvé: verze Dirichletova principu, který jsme použili k důkazu tvrzení (b) pro $k = 11$, funguje víceméně beze změny pro každé $k = 1, 2, \ldots, 11$ a za druhé: protipříklad, který jsme použili k důkazu tvrzení (a) s hodnotou $k = 18$, funguje s triviálními změnami také pro $k = 16$ a $k = 17$ (ověřte si podrobně, není to těžké). Pro důkaz analogie tvrzení (a) s hodnotami $k = 31, 32, \ldots, 47$ je ale třeba zkonstruovat jiný typ protipříkladu. Následující diagram obsahuje jistý návod, a to pro konkrétní speciální případ $k = 37$.

$$12\,\underbrace{11\ldots 1}_{18}\,8\,\underbrace{11\ldots 1}_{10}$$

Naleznete obecný vzorec? Jeden můžeme nabídnout.

$$(19-n)\,\underbrace{11\ldots 1}_{n+11}\,(n+1)\,\underbrace{11\ldots 1}_{17-n}$$

5. Neuvěřitelná dobrodružství žáků Matlafouska a Ňufafuly

V tomto oddílu se budeme věnovat další z nepřeberných aplikací šuplíčkového principu. Tentokrát zamíříme do záludného prostředí školních škamen.

Žák Matlafousek má rád čísla. Do školy chodil ve městě Plzni, kde se dá vystudovat velmi rychle. Žák Matlafousek byl ve škole pouhý jeden den. Stihl se tak naučit pouze číslici 1. Nedalo se nic dělat, musel si s touto číslicí vystačit.

Definice 5.1. *Matlafouskovým číslem* nazýváme každé přirozené číslo, zapsané pouze pomocí jedniček.

Příklady Matlafouskových čísel jsou tedy 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 a tak dále. Žák Ňufafula ze stejné třídy má také moc rád čísla. Ve škole ale pobýval celkem dva dny a stihl se tam naučit číslice 1 a 0.

Definice 5.2. *Ňufafulovým číslem* nazýváme každé přirozené číslo, zapsané pomocí neprázdné posloupnosti jedniček následované neprázdnou posloupností nul. Množinu Ňufafulových čísel označíme symbolem $\check{\mathbb{N}}$.

Příklady Ňufafulových čísel jsou tedy 10, 110000, 1110, 111100, 111110000000 a podobně. Žák Buližník (opět ze stejné třídy) má rád matematiku a lumpárny. Jednoho dne řekl Ňufafulovi: „Nic si z toho nedělej, že umíš jenom dvě číslice, a to ještě jenom v tomhle pořadí. Stejně pro každé přirozené číslo je nějaký jeho násobek Ňufafulovým číslem.“

Otázka: Má žák Buližník pravdu?

Odpověď si zkuste nejprve tipnout. Následující tvrzení obsahuje matematickou formulaci Buližníkovy poznámky.

Tvrzení 5.3. *Ke každému přirozenému číslu k existuje přirozené číslo m takové, že $km \in \check{\mathbb{N}}$.*

Místo důkazu zkusme nejprve postupné prověřování, jako se to dělá v jiných vědách než v matematice.

$$\begin{array}{lll}
k = 2: & m = 5, & km = 10 \in \check{\mathbb{N}};\\
k = 3: & m = 370, & km = 1110 \in \check{\mathbb{N}};\\
k = 4: & m = 25, & km = 100 \in \check{\mathbb{N}};\\
k = 5: & m = 2, & km = 10 \in \check{\mathbb{N}};\\
k = 6: & m = 185, & km = 1110 \in \check{\mathbb{N}};\\
k = 8: & m = 125, & km = 1000 \in \check{\mathbb{N}}.
\end{array}$$

Pozoruhodné je, jak velké číslo m potřebujeme na trojku. Ovšem prvním opravdu zajímavějším číslem v této úloze je nepochybně sedmička.

Důkaz tvrzení 5.3. Nechť k je zadané číslo. Vezmeme $k+1$ libovolných Matlafouskových čísel (těch je zřejmě k dispozici nekonečná zásoba, takže s tím nebude problém). Z Dirichletova principu ihned vyplývá, že alespoň dvě z nich musí dávat stejný zbytek při dělení číslem k. Odečteme tedy to menší z nich od toho většího. Výsledné číslo je zřejmě prvkem $\check{\mathbb{N}}$ a navíc je dělitelné číslem k. $\square$

Vraťme se nyní k výše zmíněné sedmičce. V souladu s návodem v důkazu vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.$$

Při dělení číslem 7 dávají tato čísla po řadě zbytky

$$1,\ 4,\ 6,\ 5,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4.$$

To znamená, že nejmenší dvě Matlafouskova čísla, která při dělení sedmi dávají stejný zbytek, jsou 1 a 1111111. Jejich rozdíl pak splňuje vztah

$$1111110 = 7 \times 158730.$$

Je pozoruhodné, k jak vysokému číslu nás zavedla celkem nevinně vyhlížející sedmička.

6. Sto plus jedna dyadických zajímavostí

V naší již páté aplikaci šuplíčkové metody nejprve zvolíme nějakou množinu obsahující 101 přirozených čísel menších než 200 a označíme ji symbolem M.

Tvrzení 6.1. *Bez ohledu na to, jak jsme zvolili množinu M, tato množina obsahuje alespoň dvě čísla, z nichž jedno dělí druhé.*

Zkuste si nejprve cvičně projít několik příkladů!

Důkaz tvrzení 6.1. K řešení úlohy použijeme metodu, kterou pracovně nazýváme *princip zlišení a rozlišení*. Nechť je dáno přirozené číslo n. Pak jej můžeme vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je nezáporné celé číslo a q je liché. Utvoříme nyní Dirichletovy šuplíčky očíslované lichými čísly menšími než 200, tedy $1, 3, 5, \ldots, 195, 197, 199$. Číslo n pak uložíme do šuplíčku s číslem q, jestliže $n = 2^r q$.

Malá inventura prokáže, že máme k dispozici 101 čísel a 100 šuplíčků. Z Dirichletova principu tedy plyne, že pro alespoň jedno q nutně existují alespoň dvě čísla m, n a alespoň dvě čísla r, s taková, že $m = 2^r q$ a $n = 2^s q$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r \leq s$. To ale znamená, že m dělí n. $\square$

7. Pohlreichův problém příšerně přepepřené pizzy

Dostáváme se do významné oblasti kulinářství, konkrétně k tématu, které má, jak vidno, všech pět p. Následující problém (a jeho řešení) ukazuje překvapivý fakt, že Dirichletův princip, který se samozřejmě jinak tváří jako bašta diskrétní matematiky, má i svou nečekaně nádhernou „spojitou“ verzi, takže i srdce milovníka matematické analýzy zaplesá.

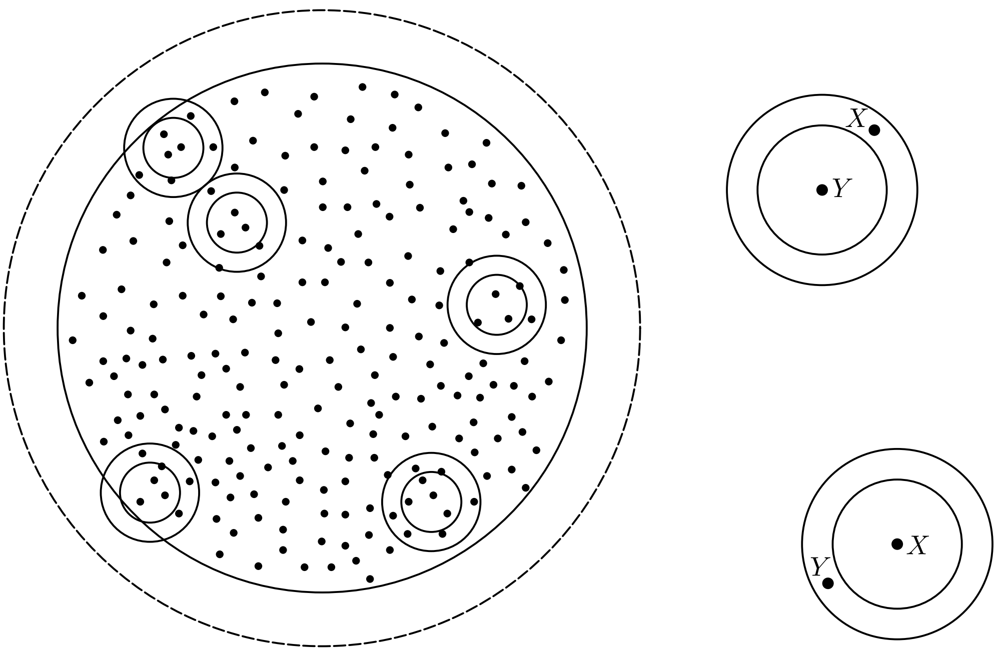
Jednoho dne pravil šéfkuchař svým kuchtíkům: „Dnes se naučíme kořenit pizzu. Avšak běda každému, kdo naši pizzu přepepří!“

Definice 7.1. *Pizza* je předmět kruhového tvaru o poloměru 16 cm. Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 cm a vnějším poloměru 3 cm. Pizza se nazývá *přepepřená*, jestliže je možno na ni někde položit testovací mezikruží tak, aby se do něj vešlo deset nebo více zrníček pepře.

Nervózní kuchtík ovšem nechtěně upustil pepřenku a vysypal na pizzu celý její obsah, který činil 650 zrníček pepře.

Otázka: Je pizza přepepřená?

Na následující ilustraci vidíme, jak takové testovací mezikruží vypadá.



Tvrzení 7.2. *Pizza je přepepřená.*

Důkaz tvrzení 7.2. Mějme kruh o poloměru 16 cm a mezikruží o vnějším poloměru 3 cm a vnitřním poloměru 2 cm. Položíme 650 kopií testovacího mezikruží na kruh tak, aby střed každé z kopií splýval s některým zrníčkem pepře. Jednotlivá mezikruží se mohou překrývat. Je třeba si uvědomit, že pro zrníčka ležící blízko okraje kruhu se část mezikruží může dostat mimo daný kruh s šestnácticentimetrovým poloměrem, každopádně ale zůstane v kruhu o stejném středu a o poloměru 19 cm. Tento zvětšený kruh obsahuje všechny kopie, které jsme umístili na kruh původní. Povšimněme si, že obsah zvětšeného kruhu činí $19^2\pi = 361\pi\,\mathrm{cm}^2$. Obsah jednoho testovacího mezikruží činí $3^2\pi - 2^2\pi = 5\pi\,\mathrm{cm}^2$. Tedy 650 kopií tohoto mezikruží má celkový obsah $3\,250\pi\,\mathrm{cm}^2$.

A nyní se ke slovu dostává slíbená „spojitá“ varianta Dirichetova principu. Předpokládejme, že žádný bod zvětšeného kruhu neleží ve více než devíti kopiích testovacího mezikruží. To znamená, že celkový obsah všech kopií mezikruží nemůže přesáhnout devítinásobek obsahu zvětšeného kruhu. Jenomže tento devítinásobek činí $9 \times 361\pi = 3\,249\pi$, zatímco jejich celkový obsah, jak již víme, činí $3\,250\pi$, takže tato situace nemůže nastat. To ale znamená, že na zvětšeném kruhu nezbytně musí existovat nějaký bod, označme jej symbolem X, který se nachází alespoň v desíti kopiích testovacího mezikruží.

Nyní předpokládejme, že bod Y leží ve středu jedné z těchto desíti kopií (je to tedy nejen bod, ale také zrníčko pepře). Potom je vzdálenost bodu X od bodu Y menší než 3 cm a větší než 2 cm. Jestliže tedy položíme jinou kopii testovacího mezikruží tak, aby jeho střed ležel v bodě X, pak bude bod Y v tomto mezikruží ležet. Takových bodů je ale k dispozici alespoň deset. Takže testovací mezikruží položeno tak, aby jeho střed ležel v bodě X, obsahuje alespoň deset zrníček pepře. Nedá se nic dělat, pizza je přepepřená. □

8. Paradox kapelníka dechovky

Důsledek Dirichletova principu, který uvedeme v tomto oddílu, patří k těm nejpřekvapivějším. Zkusil jsem při mnoha různých příležitostech nechat posluchače tipovat odpověď a výsledky jasně ukazují, že jde o mimořádně kontraintuitivní úlohu. Výsledek je považován za natolik šokující, že na něm kabaretní mágové založili jeden pěkný karetní trik. Je to zkrátka kouzelný výsledek. Popišme nejprve celou situaci.

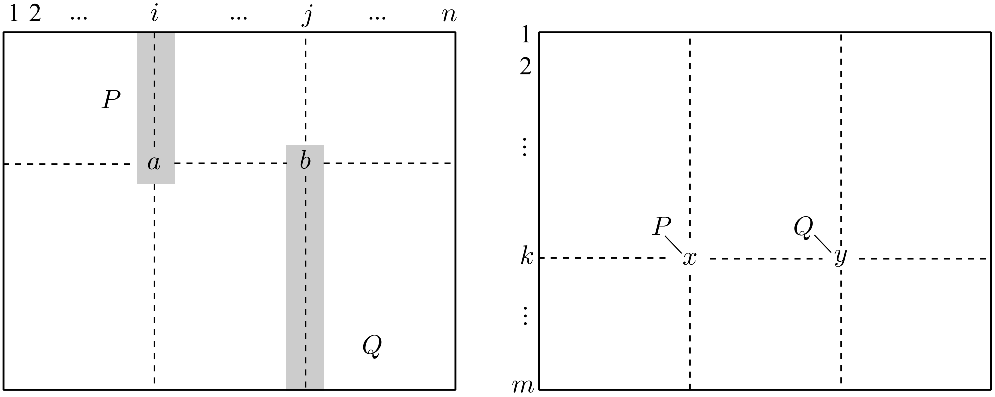
Kapelník dechovky připravuje svoji kapelu na slavnostní pochod po promenádě. Kapela je seřazena do obdélníkového tvaru o m řadách a n sloupcích. Na zkoušce si kapelník všimne, že při pohledu zleva (kde je hlavní tribuna) jsou někteří menší hudebníci zakryti svými vyššími kolegy, a není na ně tedy vidět. To považuje kapelník za nepřípustné, protože při slavnosti budou na tribuně sedět jejich blízcí a budou je chtít vidět. Kapelník tudíž provede v každé řadě takzvané *nerostoucí přerovnání*, tj. seřadí hudebníky zleva doprava od nejmenších po největší. Když se však potom postaví před kapelu, s hrůzou zjistí, že teď pro změnu někteří menší hudebníci nejsou vidět z čelního pohledu. Co se dá dělat, kapelník tedy provede analogický úkon (nerostoucí přerovnání) ještě také v rámci každého sloupce, menší hudebníci vpřed, větší dozadu. A nyní se chudák pan kapelník bojí vrátit na tribunu, protože se obává, že novým uspořádáním ve sloupcích zničil své předchozí dílo, tedy pečlivé uspořádání v rámci řad.

Otázka: Bojí se kapelník oprávněně?

Tipněte si, většina tázaných před vámi odpověď neuhodla.

Tvrzení 8.1. *Kapelník se nemá čeho bát.*

Důkaz tvrzení 8.1. Tento stěží uvěřitelný fakt dokážeme sporem. Nechť tvrzení neplatí. Jinými slovy tedy předpokládáme, že po sloupcovém přerovnání existuje nějaká řada, ve které vyšší muzikant, označme jej a, zastiňuje zleva nějakého pinďu, kterého označíme b. Označme dále symbolem i ten sloupec, ve kterém se nachází pan a, a symbolem j ten sloupec, v němž najdeme jeho kolegu b, viz následující diagram.



Protože právě proběhlo uspořádání ve sloupcích, musí být každý hudebník nacházející se v segmentu P za panem a alespoň tak velký jako a. Podobně žádný hráč v segmentu Q stojící před panem b nemůže být vyšší než b. Protože navíc a je vyšší než b, plyne z transitivity uspořádání, že každý člen P je vyšší než kdokoli, koho najdete v Q.

Nyní se vraťme do okamžiku, kdy byly již uspořádány řady, ale ještě ne sloupce. Kde se v té době nacházeli hudebníci, kteří nyní stojí v segmentu P? To sice přesně nevíme, ale je jisté, že byli roztroušeni někde po sloupci i. Podobně se v této fázi museli mistři tvořící nyní segment Q nacházet někde v rámci sloupce j. Každý z členů P a Q v tom okamžiku stál v některé z řad $1, \dots, m$. Jenomže členů P a Q je dohromady přesně $m+1$. Utvoříme-li tedy m Dirichletových šuplíčků, vyplyne z našeho oblíbeného principu, že musela existovat alespoň jedna řada, ve které se sešel jeden člen z P s jedním členem z Q. Samozřejmě nemohli pocházet oba ze stejného segmentu, a tedy v této řadě musela existovat pozice x a pozice y tak, že x leží nalevo od y a pozici x okupuje muzikant vyšší než jeho kolega na pozici y (viz opět výše uvedený diagram). Taková situace ale po uspořádání po řadách nemohla nastat, takže dostáváme kýžený spor. Náš předpoklad musel být tudíž nesprávný, a tedy tvrzení platí. □

9. Podposloupnosti v permutacích

Tvrzení 9.1. *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *obsahuje jakákoli permutace čísel* $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ *monotónní podposloupnost délky alespoň* $n + 1$.

Než se pustíme do důkazu, zkusíme zase jednou nějaký příklad. Vezměme třeba $n = 3$, pak tedy $n^2+1 = 10$. Zvolíme nějakou permutaci prvních deseti čísel, kupříkladu

$$6,\ 5,\ 9,\ 3,\ 7,\ 1,\ 2,\ 8,\ 4,\ 10.$$

Hned vidíme, že tato permutace obsahuje klesající podposloupnosti délky 4, například

$$\mathbf{6},\ \mathbf{5},\ 9,\ \mathbf{3},\ 7,\ \mathbf{1},\ 2,\ 8,\ 4,\ 10,$$

a také nějaké rostoucí posloupnosti délky 4, například

$$6,\ 5,\ 9,\ \mathbf{3},\ \mathbf{7},\ 1,\ 2,\ \mathbf{8},\ 4,\ \mathbf{10}.$$

Důkaz je nečekaně „dvourozměrný“.

Důkaz tvrzení 9.1. Označme pro každé číslo i symbolem x délku nejdelší možné rostoucí podposloupnosti naší permutace, která začíná číslem i, a symbolem y délku nejdelší možné analogické klesající podposloupnosti.

Získáme tak pro svoji posloupnost čísel celkem $n^2 + 1$ dvojic „souřadnic“ $[x, y]$. Dokážeme-li, že některá ze souřadnic je rovna alespoň $n + 1$, bude tvrzení ověřeno. Předpokládejme tedy, že každá ze souřadnic x a y je menší než $n + 1$. Pak z Dirichletova principu vyplývá, že se alespoň jedna uspořádaná dvojice $[x, y]$ musí vyskytovat alespoň dvakrát, tedy alespoň dvě různá čísla i, j mají stejné souřadnice (vezmeme n^2 šuplíčků, neboť právě tolik máme k dispozici různých uspořádaných dvojic souřadnic, a umísťujeme do nich n^2+1 souřadnic příslušejících jednotlivým číslům). Jenomže $i \neq j$. Je-li $i < j$, pak by souřadnice x čísla i musela být vyšší než stejná souřadnice čísla j, a podobně je-li $i > j$, pak by zase souřadnice y čísla i musela být vyšší než stejná souřadnice čísla j. V obou z těchto případů přicházíme ke sporu. Tvrzení tedy platí. □

10. Kruhy v rovině

Náš poslední příklad ukazuje vskutku překrásnou aplikaci Dirichletova principu, a to navíc na poli, kde bychom jej věru nečekali, a sice v geometrii.

Tvrzení 10.1. *V rovině je dáno šest kruhů, přičemž žádný z nich neobsahuje střed jiného kruhu. Potom mají prázdný průnik.*

Důkaz tvrzení 10.1. Předpokládejme pro spor, že tvrzení neplatí, tedy že existuje bod O, který náleží každému ze zadaných šesti kruhů. Spojme bod O s každým ze šesti středů. Žádné dva středy nemohou ležet na stejné polopřímce vycházející z bodu O, protože ani jeden kruh neobsahuje střed jiného a všechny obsahují O. Takže dostáváme šest různých úseček rozbíhajících se z bodu O. Tento útvar nazveme *větrníkem*.

Nechť OA a OB jsou dva vedle sebe ležící segmenty větrníku. Protože bod O leží ve všech kruzích, nemohou být délky úseček OA a OB delší než poloměry odpovídajících kruhů, ve kterých leží. Avšak protože žádný kruh neobsahuje žádný ze středů ostatních kruhů, musí být délka úsečky AB větší než kterýkoli z těchto poloměrů. To znamená, že v trojúhelníku AOB je strana AB nejdelší. Tedy je úhel AOB větší než kterýkoli ze zbývajících dvou úhlů. Odtud ale vyplývá, že je tento úhel větší než 60 stupňů. To však není možné, protože pro náš větrník nemáme k dispozici více než 360 stupňů. Dostáváme kýžený spor, tvrzení platí. □

11. Závěr

Na závěr uveďme jeden jednoduchý problém, který si ctěný čtenář na základě právě získaných dovedností jistě rád vyřeší sám, stejně jako šest jednoduchých problémků z prvního oddílu. Úlohu mi poradila Háňa Krulišová, které touto cestou děkuji. Zadání nás zavede do nám důvěrně známého vysokoškolského prostředí. Dalo by se říci, že jde téměř o osobní zkušenost.

Úloha 11.1. Nudný profesor vede tak nudnou přednášku, že studentům se chce spát už od jejího začátku. Téměř neustále alespoň jeden posluchač spí. Profesor ovšem důsledně dodržuje následující pravidlo: jestliže v některém okamžiku usne více než polovina přítomných studentů, bude se příště psát obzvláště zapeklitá písemka. V inkriminovaný den přišlo na přednášku pět studentů. Přednáška byla tak strašlivě nudná, že každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech). Navíc, a tuto informaci prosím interpretujte správně, každý spal s každým. Otázka zní: Bude se příště psát písemka?

Výhrůžka: Jestli tuhle úlohu nevyřešíte, tak vám při příštím setkání napařím písemku z Dirichletových šuplíčků.

A to už je úplný závěr. Až snad na jedno nezbytné

Čestné prohlášení. Při přípravě tohoto článku nebylo zbůhdarma utraceno žádné zvíře.

Poděkování. Za cenné připomínky k článku děkuji Michalu Křížkovi, Antonínu Slavíkovi a mně neznámé recenzentce.

Literatura

[1] Gardner, M.: *The last recreations. Hydras, eggs, and other mathematical mystifications.* Copernicus, New York, 1997.

[2] Honsberger, R.: *Ingenuity in mathematics.* New Mathematical Library, 23. Random House, New York, 1970.

[3] Honsberger, R.: *Mathematical gems from elementary combinatorics, number theory, and geometry.* The Dolciani Mathematical Expositions, 1. Mathematical Association of America, Buffalo, NY, 1973.

[4] Honsberger, R.: *Mathematical gems II.* The Dolciani Mathematical Expositions, 2. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1976.

[5] Honsberger, R.: *Mathematical gems III.* The Dolciani Mathematical Expositions, 9. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1985.

[6] Honsberger, R.: *More mathematical morsels.* The Dolciani Mathematical Expositions, 10. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1991.