

Jakub Benda; Benjamín Mareček

Pád a vodorovný vrh ve vzduchu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 1, 20–24

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146128>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2006

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



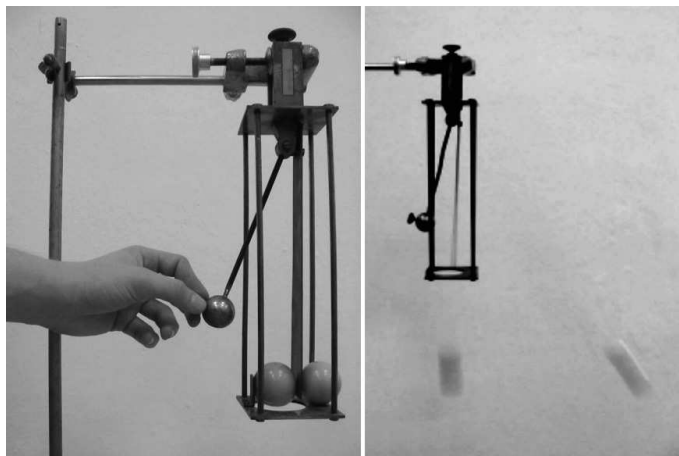
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

FYZIKA

Pád a vodorovný vrh ve vzduchu

Jakub Benda, Benjamín Mareček, Gymnázium Jana Nerudy Praha

V kroužku experimentální fyziky jsme se vrátili k pokusu, kterým jsme při výuce fyziky demonstrovali princip nezávislosti pohybů. Na fotografii (obr. 1) je stoletá pomůcka, která k tomu slouží.



Obr. 1

Ve stojánku jsou dvě kuličky, jedna leží na vodorovné destičce, druhá je ve stejné výšce přidržovaná pružným ocelovým páskem nad otvorem u svislé destičky. Třetí, kovová kulička, kterou drží na vychýlené tyčce ruka, je „kladívkem“, jež po nárazu do svislého pásku uvolní levou kuličku a současně vodorovně vystřelí pravou kuličku.

Sluchem jsme registrovali současný dopad obou kuliček na zem – pravé kuličky, padající svislým pádem, i levé kuličky, která vykonávala vodorovný vrh. Otázka, kterou jsme si v kroužku položili, byla: Je současný dopad obou kuliček ve vzduchu reálný, nebo nejsme schopni sluchem zaregistrovat málo rozdílné okamžiky dopadu?

Pustili jsme se do rozboru pokusu pomocí Excelu, ve kterém jsme mohli problém řešit numericky s přihlédnutím k odporu vzduchu.

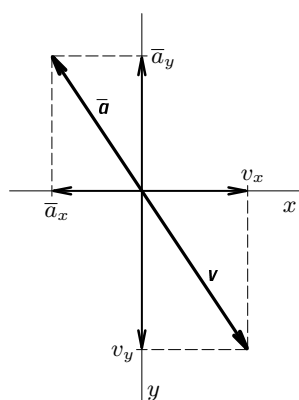
Při výpočtu jsme vycházeli z matematického modelu zkoumaného děje, který odporovou sílu počítá z Newtonova vztahu pro odporovou aerodynamickou sílu

$$F = \frac{1}{2} CS \rho v^2, \quad (1)$$

kde F je velikost odporové aerodynamické síly, ρ hustota vzduchu ($\rho = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), S obsah průřezu kuličky (průměr 38,6 mm, hmotnost $m = 35,3 \text{ g}$), C součinitel odporu kuličky (pro kouli 0,48) a v velikost rychlosti kuličky. Tato síla působí zrychlení o velikosti

$$\bar{a} = \frac{SC\rho}{2m} v^2 = kv^2 \quad (2)$$

orientované proti směru rychlosti. Konstanta k byla při našem pokusu rovna $0,021 \text{ m}^{-1}$. Použitý matematický model sice nepopisuje vyšetřovaný děj zcela přesně, ale pro situace, které jeho pomocí řešíme, se od reálného průběhu odchyluje jen velmi málo.



Obr. 2

Pohyby jsme rozložili do dvou směrů. Svisle dolů jsme orientovali osu y , vpravo ve směru letu vodorovně vržené kuličky pak osu x . Vektor rychlosti \mathbf{v} a vektor zrychlení $\bar{\mathbf{a}}$ vodorovně vržené kuličky způsobeného odporovou silou jsou opačně orientovány (obr. 2). Pro velikosti obou vektorů platí

$$\frac{|v_x|}{v} = \frac{|\bar{a}_x|}{\bar{a}},$$

po dosazení z (2)

$$\frac{|v_x|}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{|\bar{a}_x|}{k(v_x^2 + v_y^2)}.$$

S ohledem na orientaci

$$\bar{a}_x = -kv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Podobně

$$\bar{a}_y = -kv_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Po zahrnutí tíhového zrychlení dostaneme pro vektor zrychlení \mathbf{a} vodorovného vrhu:

$$a_x = \bar{a}_x = -kv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3a)$$

$$a_y = g + \bar{a}_y = g - kv_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3b)$$

Při numerickém výpočtu průběhu rychlosti rozdělíme čas t na intervaly délky dt a budeme předpokládat, že v každém takovém intervalu se kulička pohybuje rovnoměrně přímočaře. Vektor rychlosti $\mathbf{v}(t + dt)$ i polohu $[x(t + dt), y(t + dt)]$ kuličky v čase $t + dt$ vypočteme z vektoru rychlosti $\mathbf{v}(t)$ a z polohy $[x(t), y(t)]$ kuličky v čase t :

$$\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t) dt$$

$$v_x(t + dt) = v_x(t) - \left[kv_x(t) \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} \right] dt \quad (4a)$$

$$v_y(t + dt) = v_y(t) - \left[g - kv_y(t) \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} \right] dt \quad (4b)$$

$$x(t + dt) = x(t) + v_x(t) dt \quad (5a)$$

$$y(t + dt) = y(t) + v_y(t) dt \quad (5b)$$

Podobně pro vektor zrychlení $\mathbf{a}' = (0, a'_y)$, vektor rychlosti $\mathbf{v}' = (0, v'_y)$ a polohu $[0, y']$ svisle padající kuličky dostaneme s přihlédnutím k odporu vzduchu:

$$a'_y = g - k(v'_y)^2 \quad (6)$$

$$v'_y(t + dt) = v'_y(t) + a'_y(t) dt \quad (7)$$

$$y'(t + dt) = y'(t) + v'_y(t) dt \quad (8)$$

Jak už bylo řečeno, výpočet jsme provedli v Excelu. V tabulce 1 jsme zadali výpočet tak, že do prvního řádku jsme zapsali značky veličin a do druhého řádku jejich počáteční hodnoty, tj. s výjimkou velikosti počáteční rychlosti vodorovného vrhu $v_x = v_0$ samé nuly. V sloupci L byla v L3 vložena hodnota časového kroku $dt = 0,001$ s, v L4 velikost tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, v L5 velikost počáteční rychlosti vodorovného vrhu $v_0 = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a v L6 konstanta $k = 0,021 \text{ m}^{-1}$ ze vztahu (2).

| | A | B | C | D |
|---|------------|--|--|---------------|
| 1 | t | a_x | a_y | v_x |
| 2 | 0 | 0 | 0 | \$L\$5 |
| 3 | =A2+\$L\$3 | =-\$L\$6*D2* ODMOCNINA (D2*D2+E2*E2) | =\$L\$4-\$L\$6*E2* ODMOCNINA (D2*D2+E2*E2) | =D2+B3*\$L\$3 |

| | E | F | G | H |
|---|---------------|---------------|---------------|----------------------|
| 1 | v_y | x | y | a'_y |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | =E2+C3*\$L\$3 | =F2+D3*\$L\$3 | =G2+E2*\$L\$3 | =\$L\$4-\$L\$6*I2*I2 |

| | I | J | K | L |
|---|---------------|---------------|-------------------|-----------|
| 1 | v'_y | y' | yy | parametry |
| 2 | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | =I2+H3*\$L\$3 | =J2+I3*\$L\$3 | =0,5*\$L\$4*A3*A3 | |

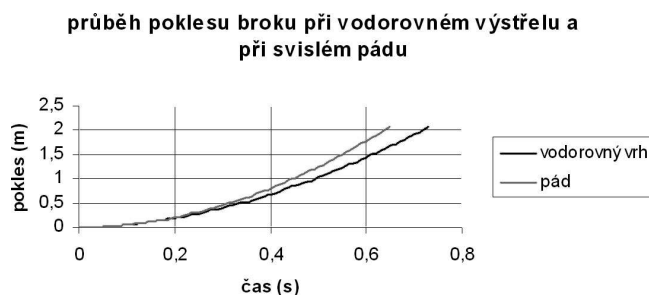
TABULKA 1

Až třetí řádek tabulky je prvním krokem numerického výpočtu. V A3 k času $t = 0$ s (A2) přičítáme konstantní přírůstek času $dt = 0,001$ s (\$L\$3). V B3 je složka zrychlení a_x daná odporem vzduchu počítaná podle vztahu (3a). Podobně v C3 je složka zrychlení a_y počítaná podle vztahu (3b). Analogicky jsou naplněny buňky třetího řádku sloupců D, E, F a G podle vztahů (4a), (4b), (5a) a (5b). Sloupce H, I a J přísluší čárkovaným veličinám odpovídajícím svislému pádu ve vzduchu, jak popisují vztahy (6), (7) a (8). Pro úplnost jsme do sloupce K zadali průběh souřadnice yy volného pádu, tj. pádu ve vakuu.

Když jsme třetí řádek s výpočtem zkopírovali až k hloubce pádu 2 m, ukázaly výsledky, že se vypočtené doby volného pádu τ_0 , pádu ve vzduchu τ_1 a vodorovného vrhu ve vzduchu τ_2 sice liší ($\tau_0 < \tau_1 < \tau_2$), ale jen v řádu tisícín sekundy. To je hluboko pod rozlišovacími možnostmi měření, která jsme byli schopni ve škole realizovat. Výšku startu kuliček nelze zcela přesně nastavit a ani okamžik jejich startu není přesně

identický. Zjišťování okamžiku dopadu, které jsme chtěli realizovat mikrofonom, rovněž nedosahuje dostatečné rozlišení. Proto je při školním pokusu nesoučasný dopad kuliček nerozlišitelný.

Dále nás zajímalo, jak se rozdíl vypočtených časů změní, jestliže budeme náš výpočet aplikovat na brok o průměru 3,5 mm a hmotnosti 0,25 g padající ve vzduchu a na stejný brok ve vzduchu vodorovně vystřelený ze vzduchovky počáteční rychlostí $v_0 = 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Výpočet jsme opět stejným způsobem zadali do Excelu, ve srovnání se školním pokusem se změnil pouze parametr v_0 a konstanta k , jejíž hodnota pro uvažovaný brok podle (2) vychází $0,012 \text{ m}^{-1}$. Vypočtené výsledky ukazuje dvojice grafů na obr. 3.



Obr. 3

Vypočtené výsledky pro svislý pád broku ve vakuu a ve vzduchu se téměř neliší. Ve vzduchu ale pro vodorovně vystřelený brok (graf vpravo) vychází, že o 2 metry poklesne za čas zhruba o desetinu sekundy delší než brok svisle padající (graf vlevo). Vypočtené výsledky jsou sice ovlivněny použitým matematickým modelem a rovněž chybou numerického výpočtu, jsou však natolik průkazné, že z nich můžeme učinit závěr:

Těleso vržené vodorovně klesá v odporujícím prostředí pomaleji než při svislém pádu.

Důvodem je narušená nezávislost pohybů v odporujícím prostředí – při vodorovném vrhu ovlivňuje vodorovná složka rychlosti svislou složku zrychlení, jak je při použití matematického modelu vidět ze vztahu (3b).