

# Rozhledy matematicko-fyzikální

---

Stanislav Trávníček  
Maticové hry

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 84 (2009), No. 3, 24–29

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146314>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2009

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## Maticové hry

*Stanislav Trávníček, Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc*

**Abstract.** The article gives an introduction into the game theory. It deals with simple matrix games. The optimal mixed strategy for a game with no saddle point is calculated. Then a programme which organizes this type of games with the use of an optimal strategy is presented.

Jistě znáte hru pro dva partnery: *kámen – papír – nůžky*. V dohodnutém okamžiku každý z obou hráčů naznačí rukou jeden z těchto předmětů a podle pravidel hry papír přemůže kámen, nůžky přemohou papír a kámen přemůže nůžky a vítězný hráč získá bod – nebo nezíská bod žádný z nich, ukáží-li náhodou týž předmět. Tuto hru lze schematicky znázornit maticí:

$$\begin{matrix} & k & p & n \\ \begin{matrix} k \\ p \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Při hře tedy první hráč volí řádek matice, druhý hráč sloupec a příslušný prvek matice ukazuje výhru 1. hráče, resp. výhru 2. hráče, je-li zvoleným prvkem  $-1$ ; nula říká, že nikdo nezískal bod. Tato hra je příkladem maticové hry.

Vykonáme dnes drobnou exkurzi do teorie her [1]. Budeme se zabývat maticovou hrou dvou partnerů, kterými budou *hráč I* (my) a *hráč II* (kterého bude v konečné fázi představovat počítač).

Uvažujme číselnou matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a hráče I a II. *Maticová hra* ( $A$ ) spočívá v tom, že hráč I volí číslo řádku  $i$  (tj. jedničku nebo dvojku) a současně hráč II volí číslo sloupce  $k$ , oba aniž by věděli, jaké číslo zvolil soupeř. Výsledek spočívá v tom, že zisk (výplata) hráče I (a tedy prohra hráče II) je  $a_{ik}$ ,  $i, k \in \{1, 2\}$ . Proto se

matici  $A$  říká také *výplatní matice*. Uvažujeme-li konkrétní hru s výplatní maticí

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

pak např. když hráč I volí  $i = 2$  a hráč II volí  $k = 2$ , hráč I „vyhrává“  $-1$  bod (tedy prohrává 1) a hráč II prohrává  $-1$  bod (tedy vyhrává 1 bod). Hrají se zpravidla celé série her (např. 10) a body z každé hry se postupně akumulují, dokud se nedostane konečný výsledek, tedy: kolik jeden hráč vyhrál, tolik druhý prohrál. Takové hry se nazývají *hry s nulovým součtem*, resp. *hry antagonistické*, resp. *hry konkurenční*.

Při těchto hrách používají hráči různé strategie. *Strategie hráče* je určitá funkce, která na základě informací o matici hry a o průběhu hry napovídá hráči, jak má dále hrát. Zvláštním případem jsou tzv. *ryzí strategie*. U hry s maticí  $A_1$  má hráč I možnost si vybrat ze dvou ryzích strategií:  $\sigma_1$  (vol 1. řádek) a  $\sigma_2$  (vol 2. řádek) a podobně hráč II má k dispozici dvě ryzí strategie  $\tau_1$  (vol 1. sloupec) a  $\tau_2$  (vol 2. sloupec).

Podívejme se na hru ( $A_1$ ) blíže. Hráč I si chce zabezpečit jistotu, že vždy vyhraje alespoň nějakou „částku“  $\nu$ , a uvažuje tedy takto: když zvolím 1. řádek, mám jistotu alespoň výhry 2, při volbě 2. řádku je nejhorší výsledek  $-1$ , nejlepším z těchto nejhorších možností je volba 1. řádku; volí tedy řádek, v němž je maximum z řádkových minim, a to dvojka. Této strategii se říká *strategie maximinová*, a v tomto případě je to tedy strategie  $\sigma_1$ , která je z hlediska teorie her pro hráče I optimální:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{2} \\ -1 \end{matrix}$$

Hráč II uvažuje takto: při volbě 1. sloupce mohu prohrát až 4, při volbě 2. sloupce prohrají nanejvýš 2, což je pro mne výhodnější; volí tedy ten sloupec, v němž je minimum ze sloupcových maxim, což je opět (táž) dvojka. Toto je *strategie minimaxová* a v našem případě to je strategie  $\tau_2$ , která je optimální z hlediska teorie her pro hráče II:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{2} \\ -1 \end{matrix}$$

Prvek 2, který je společným prvkem pro obě strategie, je tzv. *sedlový bod*. Všimněme si, že hodnota 2 je ve svém řádku nejmenší a ve svém

sloupci největší (tak poznáme sedlový bod na první pohled). Hry se sedlovým bodem vedou tedy u obou hráčů k trvalému používání optimálních ryzích strategií, a patří tak mezi hry, které nám jistě nepřipadají nějak zajímavé.

Mnohem zajímavější jsou hry bez sedlového bodu. Uvažujme dále např. hru s maticí

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kdyby u takové hry chtěl hráč I používat jen jednu ryzí strategii, např.  $\sigma_1$ , pak soupeř II, který by to zaregistroval, by zcela jistě brzy přešel na ryzí strategii  $\tau_2$  a hráč I by v každém kole ztrácel 2 body. Proto je zřejmě třeba ryzí strategie nějakým způsobem střídat, tj. přejít na *smíšenou strategii* tak, aby žádný z hráčů nemohl s jistotou předpovědět tah svého soupeře.

Upřesněme nyní pojem strategie. Strategii hráče I nazýváme dvojicí  $\sigma = (x_1, x_2)$  čísel  $x_1, x_2$  takových, že

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_2 = 1.$$

Např. strategie  $\sigma = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$  znamená, že první řádek (tj. strategii  $\sigma_1$ ) volíme nahodile s pravděpodobností  $\frac{3}{4}$  a 2. řádek (strategii  $\sigma_2$ ) volíme nahodile s pravděpodobností  $\frac{1}{4}$ . V tomto značení je  $\sigma_1 = (1, 0)$  a  $\sigma_2 = (0, 1)$ . Podobně je třeba chápat strategii  $\tau = (y_1, y_2)$ , kde opět  $0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1, y_1 + y_2 = 1$ .

Nyní jde o to, jaké strategie obou hráčů považuje teorie her za optimální a jak je získáme. Pravidlo je jednoduché: Smíšenou strategii považujeme za optimální, zaručuje-li proti oběma ryzím strategiím protihráče stejnou průměrnou výhru, zvanou *cena hry* ( $\nu$ ). Při hře s výplatní maticí  $A_2$  to pro hráče I znamená, že má platit vztah

$$3x_1 - 3x_2 = -2x_1 + 2x_2 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2, \quad \text{tj.} \quad x_1 = x_2,$$

a protože  $x_1 + x_2 = 1$ , máme  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ . Strategie hráče I je tedy  $\sigma = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Při stejné hře pro hráče II dostáváme

$$3y_1 - 2y_2 = -3y_1 + 2y_2 \Rightarrow 6y_1 = 4y_2, \quad \text{tj.} \quad y_1 : y_2 = 2 : 3,$$

takže  $y_1 = \frac{2}{5}$  a  $y_2 = \frac{3}{5}$ . Strategie hráče II je tedy  $\tau = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ .

Cena hry je

$$\nu = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5} = -3 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = 0.$$

Hru, která má cenu rovnu 0, považujeme za *korektní*, na počátku série her mají oba hráči *stejně teoretické možnosti vyhrát*. Pokud nějaká hra není korektní a má např. cenu  $\nu = 2$ , můžeme ji na korektní přeměnit např. tak, že po každé hře bez ohledu na její výsledek přidá hráč I hráči II 2 body.

Projděme si předvedený postup znovu pro hru s výplatní maticí  $A$  bez *sedlového bodu*. Optimální strategii hráče I stanovíme z rovnosti

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} = x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \Rightarrow (a_{11} - a_{12})x_1 = (a_{22} - a_{21})x_2$$

a z vlastnosti  $x_1 + x_2 = 1$ , takže

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Podobně optimální strategii hráče II stanovíme z rovnosti

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{12} = y_1 a_{21} + y_2 a_{22} \Rightarrow (a_{11} - a_{21})y_1 = (a_{22} - a_{12})y_2$$

a z vlastnosti  $y_1 + y_2 = 1$ , takže

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Cena hry je pak

$$\begin{aligned} \nu &= x_1 a_{11} + x_2 a_{21} = \\ &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} a_{11} + \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} a_{22}. \end{aligned}$$

Dále přinášíme ukázkou programu, který umožňuje hru, při níž hráčem I je člověk a hráčem II je počítač. Program nabízí sehrání „hry“ s volitelným počtem kol (což je vlastně série jednokolových her), výplatní matice si program sám vytváří. Vypočítává cenu hry a změní hru na hru korektní tím, že výhru přiznává hráči, když počet jeho bodů přesáhne součin počtu kol a ceny hry.

## INFORMATIKA

```
program MatiHra;
uses Crt;
var J, PocKol, PocetBodu, TahH, TahP: Integer;
    Vaha1, Vaha2: Integer;
    A: array [1..2,1..2] of Integer;
    X, V1, V2, CenaHry, TeorHod: Real;
    CoDal: Char;
begin
    Randomize;
    repeat
        A[1,1] := Random(9)+1; A[1,2] := -(Random(9)+1);
        A[2,1] := -(Random(9)+1); A[2,2] := Random(9)+1;
        Vaha1 := A[2,2] - A[1,2];
        Vaha2 := A[1,1] - A[2,1];
        X := Vaha1 + Vaha2
        V1 := Vaha1 / X;
        V2 := Vaha2 / X;
        CenaHry := V1 * A[1,1] + V2 * A[1,2];
        repeat
            ClrScr;
            PocetBodu := 0;
            Write('Maticova hra - pocet kol: ');
            ReadLn(PocKol);
            TeorHod := CenaHry * PocKol;
            WriteLn;
            WriteLn('1 ... ',A[1,1]:3,A[1,2]:4);
            WriteLn('2 ... ',A[2,1]:3,A[2,2]:4);
            WriteLn;
            WriteLn('Vyhrajes v pripade, ze ziskas vice nez ',
                TeorHod:3:2,' bodu.');
```

WriteLn;

```
for J := 1 to PocKol do
begin
    GotoXY(1,8);
    WriteLn(J,'. kolo'); WriteLn;
    repeat
        GotoXY(1,10); Write('Volim: ');
        GotoXY(8,10); ReadLn(TahH)
    until TahH in [1..2];
    X := Random(1000)/1000;
    if X <= V1 then TahP := 1
    else TahP := 2;
    GotoXY(12,10);
    Write('Pocitac: ',TahP);
    Inc(PocetBodu,A[TahH,TahP]);
    GotoXY(1,12); Write('CelkemBodu: ');
```

```

    GotoXY(13,12); WriteLn(PocetBodu)
end;
WriteLn;
X := PocetBodu;
if X > TeorHod then WriteLn('Blahopreji k vitezstvi.')
else WriteLn('Toto ovsem neni vitezstvi.');
```

```

WriteLn;
Write('Chces hrat znovu tutez hru (A/N)? ');
CoDal := ReadKey;
CoDal := UpCase(CoDal)
until CoDal <> 'A';
Write('Novou hru (A/N)?');
CoDal := ReadKey;
CoDal := UpCase(CoDal);
until CoDal <> 'A'
end. program
```

Program vykonává dvě funkce, je současně hráčem i organizátorem hry. Tyto dvě jeho funkce nejsou však propojeny, tj. program jako hráč při své volbě tahu nezná tah hráče, nehraje tedy falešně. Program si pro sebe vypočte svou optimální strategii a při hře ji používá.

Uvedený program *MatiHra* může začínajícím programátorům sloužit jako východisko pro různé úpravy a vylepšení.

## Literatura

[1] Owen, G.: *Game Theory (Teorija igr)*. Mir, Moskva, 1971, ruské vydání.

\* \* \* \* \*

### *Matematizace reálné situace*

*Situace už vás mate,  
a musíte taktizovat?  
Začněte ji rychle  
matematizovat!*

*Emil Calda\**

---

\*) *Úvod do obecné teorie prostoru*, Karolinum, Praha, 2003