Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 4, 83–87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146389

NAŠE SOUTĚŽ

V předchozím ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika *Naše soutěž*. V každém čísle byly vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

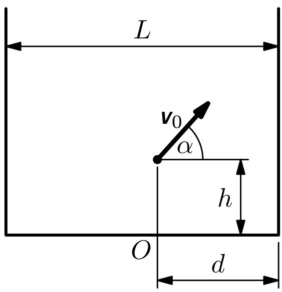
V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulý i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána matematická literatura.

Nyní tedy předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *28. února 2011* na adresu redakce.

Úloha 15. Rozhodněte, zda lze najít množinu obsahující 2 010 různých přirozených čísel, jejichž každá neprázdná podmnožina má a) součin, b) součet nedělitelný číslem 2 010. Součin, resp. součet, čísel v jednoprvkové podmnožině je to číslo samo. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 16. *Házení míčkem.* Chlapec stojí mezi bočními stěnami dvou panelových domů (nejsou v nich okna), jejichž vzájemná vzdálenost je $L = 12$ m. Chlapec vyhodil míček rukou ve výšce $h = 1{,}8$ m proti stěně prvního domu (obr. 1), po odrazu od druhé stěny míček dopadl k jeho nohám.



Obr. 1

a) Nakreslete jednoduchý náčrt situace.
b) Odvoďte vztah pro výpočet velikosti počáteční rychlosti v_0 jako funkci úhlu α. Pod jakým úhlem byl míček vržen, aby nastala popsaná situace? Proveďte diskusi výsledku vzhledem k poloze chlapce v okamžiku vrhu.
c) Odvoďte obecné vztahy pro výšky míst odrazů na obou stěnách od povrchu země v závislosti na poloze chlapce při daném úhlu vrhu míčku.
d) Uvažujte, že chlapec hodil míček z místa uprostřed mezi stěnami paneláků pod úhlem $\alpha = 30°$. Vypočtěte velikost počáteční rychlosti v_0, jakou musel chlapec míček hodit, a výšky h_1 a h_2 od povrchu země, ve kterých se míček odrazí od paneláků.

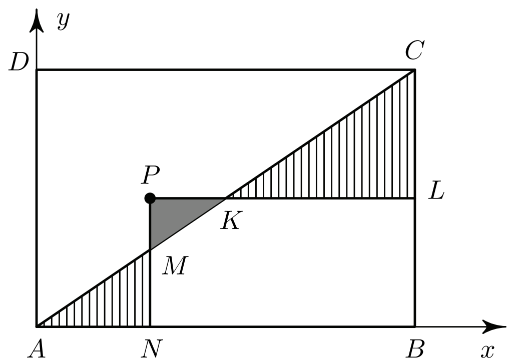
Předpokládejte, že odrazy míčku od stěny jsou dokonale pružné. Odpor prostředí při pohybu míčku neuvažujte, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

(*Ivo Volf, Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 2/2010

Úloha 11. Je dán obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = a$, $|BC| = b$. Zvolíme libovolně bod P uvnitř trojúhelníku ACD a vedeme jím rovnoběžky se stranami obdélníku $ABCD$. Rovnoběžka se stranou AB protne úhlopříčku AC v bodě K a stranu BC v bodě L, rovnoběžka se stranou BC protne úhlopříčku AC v bodě M a stranu AB v bodě N. Najděte množinu všech bodů P, pro něž je součet obsahů trojúhelníků ANM a KLC roven obsahu trojúhelníku MKP. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Označme $|AN| = ka$, $|MN| = kb$, $|KL| = la$, $|LC| = lb$, $|PK| = ma$, $|MP| = mb$, kde $k, l, m \in (0; 1)$ a $k + l + m = 1$. Položme obdélník $ABCD$ do soustavy souřadnic Oxy podle obr. 1.



Obr. 1

Má-li bod P souřadnice x, y, je

$$x = ka, \qquad y = (k+m)b. \tag{1}$$

Podle zadání úlohy má platit

$$\frac{1}{2} \cdot ka \cdot kb + \frac{1}{2} \cdot la \cdot lb = \frac{1}{2} \cdot ma \cdot mb,$$

neboli $k^2 + l^2 = m^2$. Přidáme-li podmínku $k + l + m = 1$, dostaneme postupně

$$\begin{aligned} k^2 + l^2 = (1-k-l)^2 &= 1 + k^2 + l^2 - 2k - 2l + 2kl, \\ l &= \frac{2k-1}{2k-2} = 1 + \frac{1}{2k-2}, \\ m + k &= -\frac{1}{2k-2}. \end{aligned} \tag{2}$$

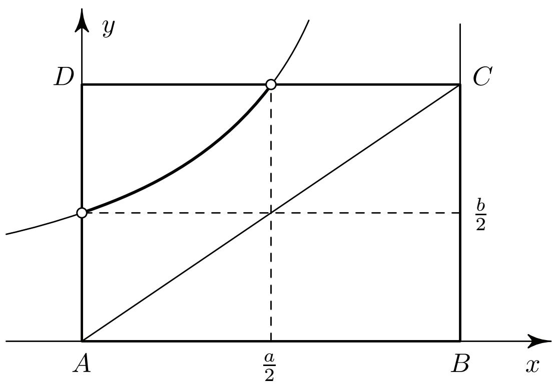
Díky těmto rovnostem se podmínky $k, l, m \in (0; 1)$ upřesní na podmínky $k, l, m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Z rovností (1) a (2) plyne

$$y = (k+m)b = \frac{b}{2-2k} = \frac{b}{2 - 2 \cdot \dfrac{x}{a}} = \frac{\dfrac{ab}{2}}{a-x}.$$

Jelikož $k \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, je $x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$, $y \in \left(\frac{b}{2}; b\right)$.

Všechny body P tedy leží na oblouku hyperboly, jak ukazuje obr. 2.



Obr. 2

Úloha 12. *Posunutí pístu.* Ve svislé válcové nádobě se pod pístem o hmotnosti $m_1 = 50$ kg a plošném obsahu $S = 100\ \mathrm{cm}^2$ nachází vzduch o teplotě $t_1 = 7\ °\mathrm{C}$. Na počátku se píst nachází ve výšce $h_0 = 60$ cm od dna nádoby. Vzduch v nádobě zahřejeme na teplotu t_2 a na píst položíme závaží o hmotnosti m_2. Hodnota atmosférického tlaku je $p_0 = 100$ kPa. Určete, o kolik centimetrů se posune píst vzhledem k původní poloze. Vzduch považujte za ideální plyn, tření pístu o stěny nádoby zanedbejte. Úlohu řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty ($g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$)
a) $t_2 = 47\ °\mathrm{C}$, $m_2 = 100$ kg; b) $t_2 = 67\ °\mathrm{C}$, $m_2 = 10$ kg.

(*Lubomír Konrád*)

Autorské řešení: Na začátku děje platí

$$m_1 g + p_0 S = p_1 S, \tag{1}$$

kde p_1 je tlak vzduchu uvnitř nádoby. Poté, co vzduch uvnitř nádoby zahřejeme na teplotu t_2 a na píst položíme závaží o hmotnosti m_2, změní se hodnota tlaku uvnitř nádoby na p_2 a platí

$$m_1 g + m_2 g + p_0 S = p_2 S. \tag{2}$$

Po vydělení rovnice (1) rovnicí (2) dostaneme

$$\frac{m_1 g + p_0 S}{m_1 g + m_2 g + p_0 S} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{3}$$

Vztah mezi tlaky p_1 a p_2 je možno popsat také užitím stavové rovnice ideálního plynu

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

přičemž pro počáteční objem V_1 a konečný objem V_2 vzduchu platí

$$V_1 = S h_0, \qquad V_2 = S(h_0 + \Delta h),$$

kde Δh je posunutí pístu vzhledem k původní poloze. Po dosazení do stavové rovnice určíme podíl tlaků

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_0 + \Delta h}{h_0} \cdot \frac{T_1}{T_2}.$$

Tento podíl nyní dosadíme do rovnice (3) a po úpravě dostaneme hledané posunutí pístu

$$\Delta h = \left(\frac{m_1 g + p_0 S}{m_1 g + m_2 g + p_0 S} \cdot \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) h_0.$$

Pro dané hodnoty dostaneme:
a) $\Delta h = -19$ cm, tj. píst klesne o 19 cm;
b) $\Delta h = 8$ cm, což znamená, že píst o 8 cm stoupne.

Stav soutěže po 12 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (Gymnázium Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů

Oprava zadání úlohy 1. kola 52. ročníku Fyzikální olympiády, kategorie D

1. Petr a Pavel

Petr a Pavel bydleli ve Lhotě. Petr potřeboval vrátit kolo kamarádovi do sousední vesnice Rovná. Pavel si chtěl zaběhat. Domluvili se, že oba vyrazí ve stejném okamžiku. Petr jel na kole ze Lhoty do Rovné rychlostí $27\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Tam sesedl z kola a okamžitě se vracel zpět pěšky stálou rychlostí $5\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Pavel stejnou trasu ze Lhoty do Rovné a zpět proběhl stálou rychlostí $9\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Kdo se vrátil do Lhoty dříve? Zdůvodněte.
b) Sestrojte graf závislosti vzdálenosti d každého chlapce od Lhoty na čase t za předpokladu, že Petrova jízda na kole trvala 10 minut. Z grafu určete časy a vzdálenosti od Lhoty, kde se míjeli.