Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 3, 60–64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146540

NAŠE SOUTĚŽ

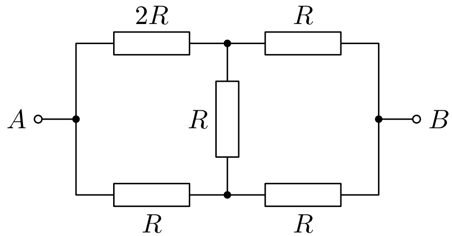
Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. prosince 2013* na adresu redakce.

Úloha 35. Je dán lichoběžník $ABCD$, bod P je střed základny AB, bod Q střed základny CD, bod U průsečík úhlopříček a bod R průsečík ramen lichoběžníku. Dokažte, že v každém lichoběžníku $KLMN$, pro který je P střed základny KL, Q střed základny MN a pro který je $|KL| : |MN| = |AB| : |CD|$, se úhlopříčky KM a LN protínají v daném bodě U a ramena v daném bodě R. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 36. Na obr. 1 je znázorněno zapojení 5 rezistorů o odporech R, resp. $2R$. Po určité době provozu dojde k přepálení jednoho z těchto rezistorů, což způsobí změnu celkového odporu mezi body A a B.



Obr. 1

a) Určete velikost odporu mezi body A a B pro všechny možné situace, které mohou nastat.

b) Na základě řešení části a) stanovte, který z rezistorů je poškozen, jestliže je celkový odpor odvodu (1) co nejmenší, (2) co největší.

c) Určete, jaký byl odpor R_{AB} obvodu, než došlo k poškození rezistoru.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 4/2012

Úloha 31. Určete všechna přirozená čísla $n \geq 2$ a přirozená čísla x_1, x_2, ..., x_n, pro která platí

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n \qquad \text{a} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Díky zadaným nerovnostem platí jednak

$$nx_n > x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n,$$
$$n > x_1 x_2 \ldots x_{n-1},$$

jednak

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \geq 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!,$$

odkud plyne

$$n > (n-1)!.$$

Tato nerovnost je splněna pouze pro $n = 2$ a $n = 3$ (je možné to ověřit např. pomocí matematické indukce).

Rozeberme nejprve případ $n = 2$. Zde musí podle výše získaných nerovností platit nerovnost $2 > x_1$, což dává jedině možnost $x_1 = 1$. Řešíme tedy rovnici

$$1 + x_2 = 1 \cdot x_2,$$

která však nemá žádné řešení.

Ještě rozebereme případ $n = 3$. Zde musí podle výše získaných nerovností platit nerovnost $3 > x_1 x_2$, což dává jedině možnost $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Řešíme tedy rovnici

$$1 + 2 + x_3 = 1 \cdot 2 \cdot x_3,$$

která má jediné řešení $x_3 = 3$.

Vidíme, že jediné řešení úlohy může být $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ a $x_3 = 3$. Zkouška skutečně toto řešení potvrzuje.

Úloha 32. *Cesta spěšným vlakem*

Cestující vyjel v 17:31 spěšným vlakem Sp 1992 Chrudimka ze železniční stanice Chrast u Chrudimi a v 17:43 dorazil po ujetí 12 km za dobu t do Chrudimi. Uvažujte, že se spěšný vlak ze stanice Chrast nejprve rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem po dobu $t_1 = \frac{t}{4}$, pak se po dobu $t_2 = \frac{t}{2}$ pohybuje rovnoměrným pohybem a před stanicí Chrudim začne rovnoměrně zpomaleně brzdit tak, aby ve stanici Chrudim právě zastavil.

a) Určete průměrnou rychlost vlaku, zrychlení (zpomalení) vlaku na začátku (konci) jízdy, délky jednotlivých úseků a maximální rychlost pohybu.

b) Nakreslete ve sledovaném úseku (ve vhodném měřítku) graf závislosti rychlosti pohybu na čase. (*Miroslava Jarešová*)

Autorské řešení:

a) Průměrná rychlost vlaku byla

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{12\ \text{km}}{12\ \text{min}} = 60\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} \doteq 16{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Dále určíme dobu jízdy vlaku ve 3. úseku:

$$t_3 = t - t_1 - t_2 = \frac{t}{4} = t_1$$

Délky jednotlivých úseků pak jsou

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{4}\right)^2 = \frac{1}{32}at^2,$$
$$s_2 = v_{\max} t_2 = at_1 \cdot t_2 = a\frac{t}{4}\cdot\frac{t}{2} = \frac{1}{8}at^2,$$
$$s_3 = v_{\max} t_3 - \frac{1}{2}at_3^2 = at_1^2 - \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}at_1^2 = s_1.$$

Celková dráha je

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{32}at^2 + \frac{1}{8}at^2 + \frac{1}{32}at^2 = \frac{3}{16}at^2,$$

z čehož

$$a = \frac{16}{3}\frac{s}{t^2} = 1\ 600\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} \doteq 0{,}12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

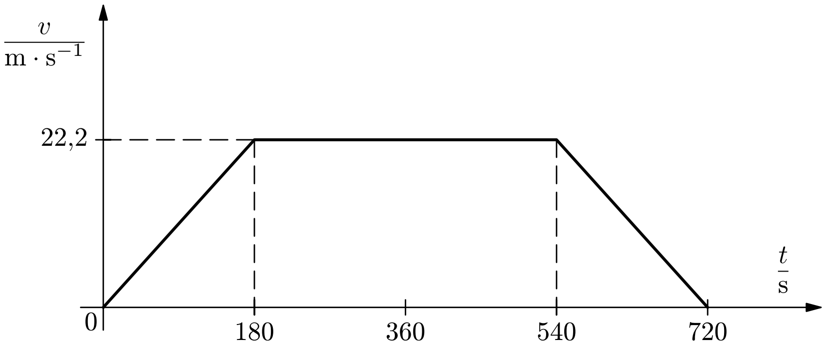
Po dosazení za a dostaneme, že délky jednotlivých úseků jsou

$$s_1 = \frac{1}{6}s = 2\ \mathrm{km},\quad s_2 = \frac{2}{3}s = 8\ \mathrm{km},\quad s_3 = s_1 = 2\ \mathrm{km}.$$

Maximální rychlost pohybu je

$$v_{\max} = a\frac{t}{4} = \frac{4}{3}\frac{s}{t} = 80\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} \doteq 22{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

b) Graf závislosti rychlosti na čase je znázorněn na obr. 2.



Obr. 2

Stav soutěže po 24 soutěžních úlohách

Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Libor Drozdek (G, Holešov) – 9 bodů
David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (G Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů

Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod

* * * * *

(dokončení recenze)

Svá *Principia* (Matematické základy přírodních věd) podle vlastních slov napsal úmyslně složitěji a matematicky náročněji, aby tím odvrátil všetečnou pozornost nevzdělanců. Když prý jakýsi student zahlédl Newtona na ulici, poznamenal, že je to ten pán, co napsal tu knihu, které on ani nikdo jiný nerozumí. Naštěstí se našli učenci, kteří obtížný text doplnili vysvětlujícími poznámkami; u nás to byl v druhé polovině osmnáctého století jezuitský filozof Jan Tesánek, působící jako profesor matematiky a fyziky na univerzitách v Praze a v Olomouci.

Peter Ackroyd patří k současným úspěšným britským spisovatelům. Kromě řady beletristických děl je také autorem jak obsáhlých, tak kratších biografií, především anglických básníků, umělců a filozofů. *Newton*, vydaný ve Velké Británii poprvé v roce 2006, je poutavě vyprávěným životním příběhem jednoho z největších přírodovědců evropské historie. Devatenáct krátkých kapitol nemůže být samozřejmě vyčerpávajícím zdrojem údajů o rozsahu nebo vědeckém významu Newtonova díla, přesto je v nich řada informací, které překvapí i čtenáře, kteří si zvolili za svou profesi exaktní vědy. A ostatní si knížku jistě se zájmem přečtou od začátku až do konce, protože je ani na jediném místě nezastaví překážka matematických vzorců nebo složitých fyzikálních zákonů.

Ivo Kraus