Pavel Provinský

Fraktály a neceločíselné dimenze

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 4, 1–6

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146542`

Fraktály a neceločíselné dimenze

Pavel Provinský, ČVUT Praha

Abstract. This article reveals some interesting facts about fractals and explains how it is possible that their dimension does not have to be a whole number. We will show that calculating the fractal dimensions can be very simple.

Úvod

Zcela zřetelně se pomatuji na tu šokující hodinu matematiky. Bylo to na základní škole a opakovali jsme obsahy a objemy těles a útvarů. A pak, před zvoněním, naše skvělá matikářka poznamenala, že čtverec je dvourozměrný a jeho obsah je $S = a^2$, krychle je třírozměrná a její objem je $V = a^3$. „A teď si představte," pokračovala, „že matematici umějí počítat i ve více rozměrech. A taková, třeba desetirozměrná, krychle má objem $V = a^{10}$." To tedy bylo něco! Najednou jsem si místo banálních těles snažil představit desetirozměrnou krychli. Tenkrát mě paní učitelka zaujala a nějak mi to vydrželo léta.

O pár let později mi kamarád předváděl svoje Atari. A poznamenal, že krajina v jakési hře je tvořena pomocí fraktálů. „Co to je?" zeptal jsem se. „Ále, to je taková matematická věcička, která má dimenzi třeba dva a půl." „Co je to za nesmysl?! Jak by něco mohlo mít dimenzi dva a půl?" chtěl jsem vědět. Kamarád mi to ale nevysvětlil a odpověď jsem zjistil až po mnoha letech.

Tento příspěvek píši proto, aby ten, kdo si jej přečte, věděl, jak může mít něco dimenzi dva a půl.

Co je to fraktál

Tak nejprve, co je to fraktál. Představme si, že jsme kosmonauti v raketě a přibližujeme se k nějaké křivce. Například k sinusovce. Nejprve vidíme mnoho vlnek, pak jen jednu, pak jen kousek vlnky a při hodně blízkém pohledu je vlastně ten kousek sinusovky k nerozeznání od úplně obyčejné přímky. Křivka se nám při zvětšování stala banální.

Fraktálem nazveme takový objekt, který se při zvětšování banálním nestane. A může to být křivka, plošný obrazec, trojrozměrné těleso nebo také chomáč izolovaných bodů. Představme si např. nějaký ostrov při pohledu z letadla. Zřetelně vidíme jeho obrysy. Jak tak letadlo padá, rozeznáváme najednou nové zálivy a mysy, kterých jsme si předtím nevšimli. Pak zpozorujeme, jak moře obtéká jednotlivé skály, kameny, zrnka písku. Představme si, že toto zvětšování by šlo do nekonečna a obraz, který bychom viděli, by byl pořád zhruba stejně složitý.

Pokud si něco takového dokážete stěží představit, doporučuji shlédnout video [1]. Animace počítá stále detailnější pohled na Mandelbrotovu množinu (asi nejznámější fraktál). Každou sekundu se obraz zvětší zhruba dvakrát. Za deset minut tak dosáhneme zvětšení cca 10^{250}. Pro porovnání – tímto tempem bychom se z pozorování celé viditelné oblasti vesmíru (cca $2{,}5\cdot 10^{26}$ metru) dostali na úroveň kvarku (cca 10^{-18} metru) za zhruba minutu a tři čtvrtě. Animace tak předvádí podstatně „hlubší" pohled a obraz se přitom banálním nestává ani náhodou.

„Termín fraktál použil poprvé matematik Benoît Mandelbrot v roce 1975. Pochází z latinského fractus – rozbitý." [2]

Sám Mandelbrot se vyhnul zavádění obecné definice fraktálu a spíše jen fraktály charakterizoval:

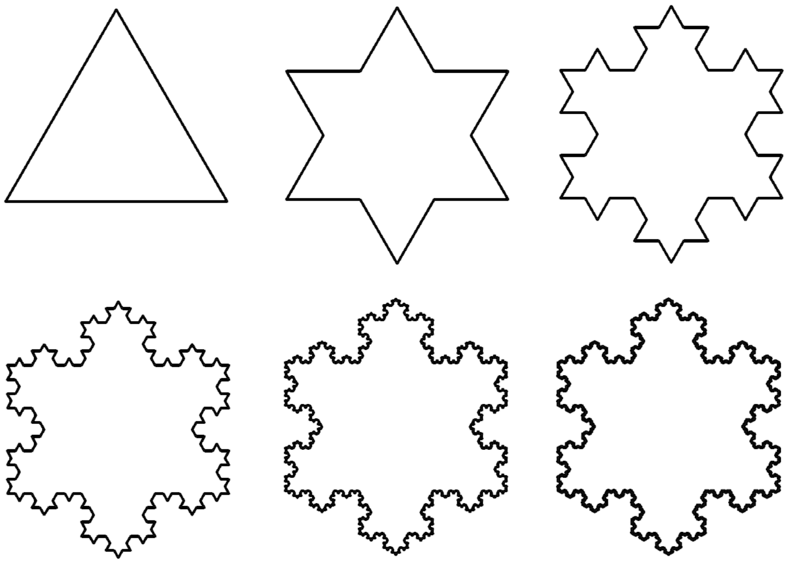
1. Jde o objekty složité, jejichž složitost se významně nemění při libovolném zvětšení.
2. Jde o objekty *soběpodobné*. Při libovolném zvětšování nacházíme podobnost mezi malými detaily, většími detaily a celkem. Tato podobnost může být geometrická či třeba jen statistická.
3. Tyto objekty můžeme charakterizovat neceločíselnou dimenzí nebo dimenzí neodpovídající jejich dimenzi topologické. Dva útvary mají stejnou topologickou dimenzi, je-li možné vzájemně jednoznačné a spojité zobrazení mezi nimi. Křivka, která v nějakém smyslu hustě zaplňuje část roviny, může mít dimenzi mezi jedničkou a dvojkou. Hodně zmačkaná plocha pak může mít dimenzi mezi dvojkou a trojkou. A fraktální prach na přímce může mít dimenzi mezi nulou a jedničkou.

A k čemu mohou být fraktály dobré? Citujme samotného Mandelbrota [3, s. 6]: „Jak měřit hrubost či prchavost burzovních časových řad, byť jen s cílem realisticky vyhodnocovat finanční rizika? Jak změřit pobřeží Bretaně? Jak charakterizovat tvar pobřeží, řeky, povodí či hranice vodní nádrže, ať už v kontextu hydrauliky či dynamických systémů? Jak stanovit rychlost větru za bouře? Jak měřit a srovnávat drsnost a hrubost obyčejných předmětů, jakými jsou například rozbitý kámen, svah, hora nebo kus starého železa? Jaký tvar má oblak, plamen či svár? Jaká je hustota galaxií ve vesmíru? Jak se mění aktivita internetové sítě? Na všechny tyto otázky dala první uspokojivé odpovědi fraktální geometrie.“

Neceločíselné dimenze

Jak vůbec můžeme uvažovat neceločíselnou dimenzi? Představme si nějakou úsečku. Zvětšeme ji nyní dvakrát. Úsečka je jednorozměrná a její délka vzrostla 2^1krát. Zvětšeme nyní dvakrát čtverec. Čtverec je dvourozměrný a jeho obsah vzroste 2^2krát. A když dvakrát zvětšíme trojrozměrnou krychli, zvětší se její objem 2^3krát. O útvaru, jehož míra se zvětší 2^Dkrát, můžeme říci, že má dimenzi D.

Použijme nyní tuto úvahu k výpočtu dimenze našeho prvního fraktálu, von Kochovy vločky (obr. 1, převzat z [4]).

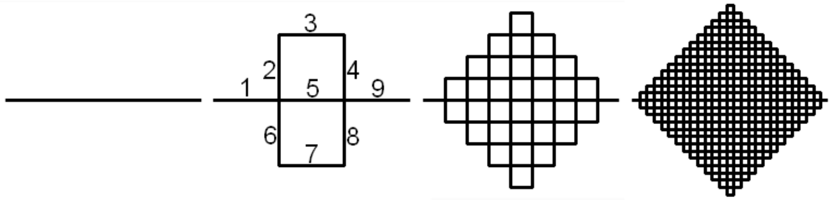


Obr. 1: Prvních šest iterací von Kochovy vločky

Můžeme si to přestavit tak, že jsme schopni vidět trojúhelníky o straně jedna, což je velikost původního trojúhelníku. Při trojnásobném zvětšení pak uvidíme i trojúhelníky druhé generace, pak třetí atd.

Jaká je fraktální dimenze von Kochovy vločky? Každým krokem se obrázek zvětší 3krát. Jeho obvod ale vzroste 4krát. (Objevují se nové trojúhelníky. První obrázek má obvod 3, druhý 12, třetí 48, ...). Fraktální dimenzi von Kochovy vločky tedy spočteme z rovnice $3^D = 4$ a získáme výsledek $D = \log_3 4 = 1{,}261\,86$ [3, s. 30–31].

Pojmem Peanovy křivky se označují křivky, které zcela vyplňují čtverec. Původní Peanova křivka je naznačena na obr. 2 (převzat z [5]). Čísla udávají pořadí obíhání. Vidíme, že křivka má nekonečně mnoho dvojitých bodů.



Obr. 2: První čtyři iterace původní Peanovy křivky

Při každém trojnásobném zvětšení je každá původní úsečka nahrazena devíti novými úsečkami. Tedy $3^D = 9$, tedy $D = 2$. To souvisí s tím, že křivka zcela zaplňuje plošný útvar.

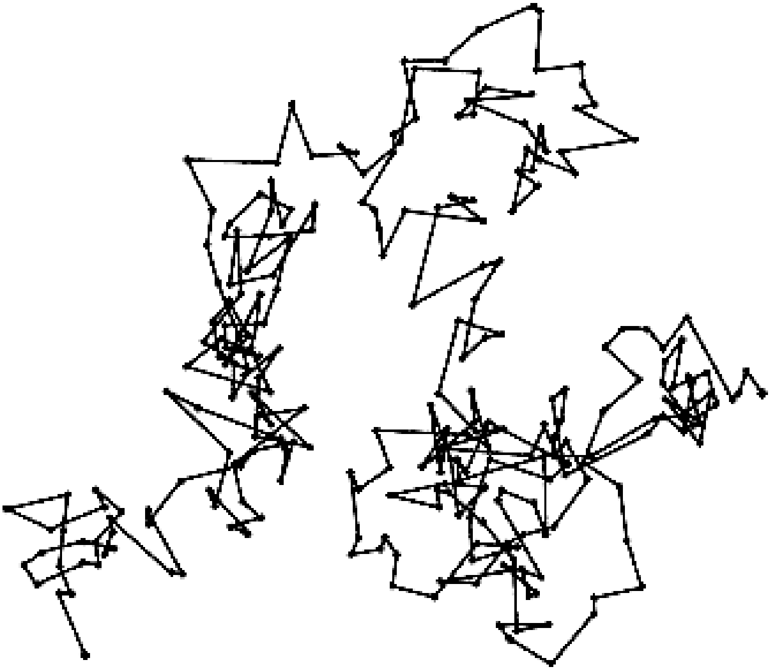
Pojem fraktální dimenze je matematicky precizován několika způsoby. Asi nejznámější je Hausdorffova–Besicovitchova dimenze. Různé fraktální dimenze mohou dávat různé hodnoty.

U přírodních objektů nemůžeme fraktální dimenzi spočítat, můžeme ji pouze přibližně změřit. Například podle map v různých měřítcích (tab. 1, převzata z [6]).

Přírodní objekt	Odhad fraktální dimenze
pobřeží	1,26
povrch mozku člověka	2,76
neerodované skály	2,2–2,3
obvod 2D průmětu oblaku	1,33

Tab 1: Odhad fraktální dimenze přírodních objektů

Fraktálně však můžeme modelovat například i takové věci, jako je Brownův pohyb (obr. 3, převzat z [7]). Obrázek vznikal tak, že se v pravidelných intervalech vynášela poloha částice. Následující polohy pak byly uměle spojeny úsečkou.



Obr. 3: Brownův pohyb

Pokud bychom pozorovací intervaly významně zkrátili, jednotlivé úsečky bychom nahradily opět Brownovým pohybem. Celková délka křivky by tak vzrostla. V matematickém modelu by pak v limitě byla celková délka křivky nekonečná. Po spočtení vychází fraktální dimenze této křivky $D = 2$. I tato křivka v jistém smyslu vyplňuje plochu [3, s. 48].

Jak dimenzi Brownowa pohybu spočítat? Řekněme, že máme Brownův pohyb zaznamenaný po sekundách. My však chceme záznam po půlsekundách. Každá úsečka se tedy změní na dvě menší úsečky. Nechť se tímto zvětšila délka křivky k-krát. Průměrná délka úsečky se tímto $\frac{k}{2}$-krát zmenšila. Pokud chceme, aby průměrná délka úseček byla stejná jako původně, musíme obraz $\frac{2}{k}$-krát zvětšit. Délka křivky tím bude $k \cdot \frac{2}{k} = 2$-krát větší. Tedy

$$\left(\frac{2}{k}\right)^D = 2,$$

čili

$$D = \frac{1}{1 - \log_2 k}.$$

Výpočtem, který přesahuje obtížnost tohoto článku, bylo zjištěno, že $k = \sqrt{2}$. Fraktální dimenze Brownova pohybu je tedy $D = 2$.

Závěr

Prošli jsme si tři příklady výpočtu fraktální dimenze. Fraktály však nabízejí mnohé další potěšení jak intelektuální, tak čistě estetické. Pro zájemce mohu doporučit pozoruhodný seriál Pavla Tišnovského Fraktály v počítačové grafice [8]. Pokud by někdo chtěl tvořit fraktály vlastní, doporučuji freeware program Fractint [9]. Na vytvoření vlastního průletu fraktální množinou je tu program Xaos [10].

Literatura

[1] Nahráno uživatelem fractalzooms: Fractal Zoom (Last Lights On) Mandelbrot (HD) e228 (2^{760}). [online]. Dostupné z `http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=foxD6ZQlnlU`.

[2] Wikipedie – Otevřená encyklopedie. [online]. Dostupné z `http://cs.wikipedia.org/wiki/Fraktál`.

[3] Mandelbrot, B.: *Fraktály: Tvar, náhoda, dimenze.* Mladá fronta, Praha, 2003.

[4] `http://en.wikibooks.org/wiki/Geometry_for_Elementary_School/Fractals`.

[5] Vančura, J.: *Fraktály.* [online]. Dostupné z `http://www.fractals.webz.cz/index.htm`.

[6] Tišnovský, P.: *Fraktály.* [online]. Dostupné z `http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/uvod.html`.

[7] Gregorová, D.: *Změřeno navzdory Einsteinovým předpokladům.* [online]. Dostupné z `http://www.osel.cz/popisek.php?popisek=14774&img=1275117364.jpg`.

[8] Tišnovský, P.: *Fraktály v počítačové grafice.* [online]. Dostupné z `http://www.root.cz/serialy/fraktaly v pocitacove-grafice/`.

[9] `http://www.softpedia.com/get/Multimedia/Graphic/Graphic-Others/Fractint.shtml`.

[10] `http://code.google.com/p/gnuxaos/`.