Lucie Růžičková

9. středoevropská matematická olympiáda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 1, 41–46

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146656

6. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ celých čísel vyhovuje následujícím podmínkám:
(i) $1 \le a_j \le 2\,015$ pro každé $j \ge 1$;
(ii) $k + a_k \ne l + a_l$ pro všechna k a l taková, že $1 \le k < l$.

Dokažte, že existují dvě kladná celá čísla b a N taková, že

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \le 1\,007^2$$

pro všechna celá čísla m a n splňující $n > m \ge N$. (*USA*)

9. středoevropská matematická olympiáda

Lucie Růžičková, Gymnázium Christiana Dopplera, Praha

Ve dnech 25.–31. srpna 2015 se ve slovinském Koperu konal devátý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO). Soutěže se zúčastnilo celkem 60 soutěžících z deseti zemí (Rakousko, Chorvatsko, Česká republika, Německo, Maďarsko, Litva, Polsko, Slovensko, Slovinsko, Švýcarsko).

Šestičlenný český tým, který byl vybrán na základě výsledků ústředního kola 64. ročníku MO a výběrového soustředění v Kostelci nad Černými Lesy, tvořili: *Filip Bialas* (6/8 G Opatov, Praha 4), *Vojtěch Lukeš* (7/8 G Luďka Pika, Plzeň), *Jan Petr* (6/8 G Jana Keplera, Praha 6), *Daniel Pišťák* (7/8 G Christiana Dopplera, Praha 5), *Lucien Šíma* (7/8 PORG, Praha 8), *Jan Šorm* (7/8 G Brno, třída Kapitána Jaroše 14). Vedoucími českého týmu byli *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.*, z FIT ČVUT v Praze a *PhDr. Lucie Růžičková, Ph.D.*, z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze.

V rámci individuální soutěže, která se konala ve čtvrtek 27. srpna v prostorách Pedagogické fakulty Univerzity na Primorskem, řešili soutěžící v průběhu pěti hodin celkem čtyři úlohy z oblastí algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel. V pátek 28. srpna pak proběhla v učebnách koperské základní školy týmová soutěž, kde každý tým společně řešil celkem osm úloh. Za každou z úloh mohli soutěžící získat nejvýše 8 bodů. Zatímco týmoví vedoucí opravovali řešení svých soutěžících a účastnili se koordinace úloh v mezinárodní porotě, soutěžící vyrazili na výlet do hlavního města Lublaně a našli si čas i na koupání v moři. V neděli navštívili všichni účastníci soutěže jeskyně v Postojné, kde si nenechali uniknout ani typickou projížďku vláčkem po této slovinské přírodní zajímavosti.

Obr. 1: Na fotografii zleva doprava: Jaroslav Zhouf a Lucie Růžičková (vedoucí českého týmu), Vojtěch Lukeš, Lucien Šíma, Filip Bialas, Jan Šorm, Jan Petr a Daniel Pišťák

Na nedělním závěrečném slavnostním večeru byli oficiálně vyhlášeny výsledky individuální i týmové soutěže. V individuální soutěži bylo uděleno 6 zlatých, 9 stříbrných a 18 bronzových medailí. Jedním z držitelů zlaté medaile byl také náš soutěžící Filip Bialas, který ztratil pouze jeden bod z maximálního součtu a se ziskem 31 bodů obsadil dělenou třetí příčku. Jan Petr a Jan Šorm byli oceněni čestným uznáním za úplné vyřešení jedné soutěžní úlohy. V týmové soutěži skončil český tým na 7. místě s celkovým ziskem 36 bodů. Pro všechny české reprezentanty byla účast na této prestižní mezinárodní soutěži zajímavou a cennou zkušeností.

Obr. 2: Držitel zlaté medaile Filip Bialas

Na závěr uvádíme zadání všech dvanácti soutěžních úloh. Více informací o soutěži naleznete na adrese `http://memo2015.dmfa.si`.

Individuální soutěž (27. srpna 2015)

Úloha I–1

Najděte všechny surjektivní funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro všechna kladná celá čísla a a b platí právě jedna z následujících rovností:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Poznámka. $\mathbb{N}$ označuje množinu všech kladných celých čísel. Funkci $f\colon X \to Y$ nazýváme surjektivní, jestliže pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$.

Úloha I–2

Nechť $n \geq 3$ je celé číslo. *Vnitřní úhlopříčka jednoduchého n-úhelníku* je úhlopříčka, která celá leží v tomto n-úhelníku. Označme $D(P)$ počet všech vnitřních úhlopříček jednoduchého n-úhelníku P a označme $D(n)$ nejmenší možnou hodnotu $D(Q)$, kde Q je libovolný jednoduchý n-úhelník. Dokažte, že žádné dvě vnitřní úhlopříčky jednoduchého n-úhelníku P se neprotínají (případně se protínají pouze ve společném krajním bodě), právě tehdy když $D(P) = D(n)$.

Poznámka. Jednoduchý n-úhelník je mnohoúhelník s n vrcholy, který sám sebe neprotíná. Mnohoúhelník není nutně konvexní.

Úloha I–3

Nechť čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový. Nechť bod E je průsečíkem přímek rovnoběžných s AC a BD procházejících po řadě body B a A. Přímky EC a ED se protínají s kružnicí opsanou trojúhelníku AEB dále po řadě v bodech F a G. Dokažte, že body C, D, F a G leží na jedné kružnici.

Úloha I–4

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel $[m, n]$, pro která existují vzájemně nesoudělná celá čísla a a b větší než 1 taková, že

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

je celé číslo.

Týmová soutěž (28. srpna 2015)

Úloha T–1

Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c taková, že $abc = 1$, platí následující nerovnost:

$$\frac{a}{2b + c^2} + \frac{b}{2c + a^2} + \frac{c}{2a + b^2} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Úloha T–2

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že

$$f(x^2 y f(x)) + f(1) = x^2 f(x) + f(y)$$

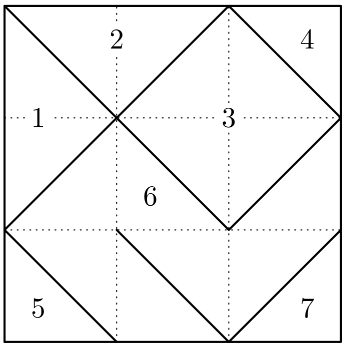
platí pro všechna nenulová reálná čísla x a y.

Úloha T–3

V řadě stojí n studentů na pozicích od 1 do n. Zatímco se učitel dívá jinam, někteří studenti změní své pozice. Když se učitel podívá zpět, studenti opět stojí v řadě. Jestliže student, který byl původně na pozici i, je teď na pozici j, řekneme, že se tento student přemístil o $|i - j|$ kroků. Určete největší možný součet kroků, kterého mohou všichni studenti dosáhnout.

Úloha T–4

Nechť N je kladné celé číslo. V každém z N^2 jednotkových čtverců tabulky $N \times N$ je zakreslena jedna z jeho dvou úhlopříček. Zakreslené úhlopříčky rozdělují tabulku $N \times N$ na K oblastí. Pro každé N určete nejmenší a největší možnou hodnotu K.



Příklad pro $N = 3$, $K = 7$

Úloha T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| > |AC|$. Dokažte, že existuje bod D s následující vlastností: jestliže dva různé body X a Y leží ve vnitřní oblasti trojúhelníku ABC tak, že body B, C, X a Y leží na jedné kružnici a platí

$$|\angle AXB| - |\angle ACB| = |\angle CYA| - |\angle CBA|,$$

pak přímka XY prochází bodem D.

Úloha T–6

Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, kde platí $|AB| > |AC|$, a nechť přímka AI protíná stranu BC v bodě D. Předpokládejme, že bod P leží na úsečce BC a platí $|PI| = |PD|$. Dále nechť bod J je obrazem bodu I v osové souměrnosti určené osou úsečky BC a nechť Q je další průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a APD. Dokažte, že $|\angle BAQ| = |\angle CAJ|$.

Úloha T–7

Najděte všechny uspořádané dvojice kladných celých čísel $[a, b]$ tak, že

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Úloha T–8

Nechť $n \geq 2$ je celé číslo. Určete počet kladných celých čísel m takových, že $m \leq n$ a $m^2 + 1$ je dělitelné číslem n.

Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2015

Pavel Töpfer, MFF UK Praha

V roce 2015 se naši nejlepší středoškoláci jako každoročně zúčastnili dvou tradičních mezinárodních soutěží v informatice a programování. Nejprve se na přelomu června a července konal v Brně 22. ročník Středoevropské olympiády v informatice CEOI 2015 (Central Eurpean Olympiad in Informatics), o měsíc později proběhl v Kazachstánu ve městě Almaty 27. ročník vrcholné celosvětové Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2015 (International Olympiad in Informatics).

Reprezentanti pro mezinárodní informatické olympiády jsou u nás vybíráni na základě výsledků dosažených v příslušném ročníku Matematické olympiády – kategorie P (programování). Zatímco na celosvětovou olympiádu IOI vysíláme družstvo sestavené ze čtyř nejlepších řešitelů aktuálního ročníku MO-P, na středoevropskou CEOI jezdí soutěžit další čtyři studenti, kteří ještě nejsou v maturitním ročníku a navíc splňují nižší věkový limit určený pravidly soutěže. Těmto mladším reprezentantům se tak účast na CEOI stává významným zdrojem zkušeností, které často využijí při své účasti v dalších ročnících národních i mezinárodních programátorských soutěží. Studenti vybraní k účasti na IOI se každoročně připravují společně s některými soutěžícími z CEOI na týdenním soustředění. Letošní přípravné soustředění proběhlo v červnu na východním Slovensku v obci Danišovce a bylo jako obvykle společné pro studenty z Čech, Polska a Slovenska.