Úlohy domácího kola 67. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 1, 37–39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146737

Úlohy domácího kola 67. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Kategorie A

1. Pavel střídavě vpisuje křížky a kolečka do políček tabulky (začíná křížkem). Když je tabulka celá vyplněná, výsledné skóre spočítá jako rozdíl $O-X$, kde O je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více koleček než křížků a X je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více křížků než koleček.
   a) Dokažte, že pro tabulku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.
   b) Určete nejvyšší možné skóre dosažitelné pro tabulku $(2n+1)\times$ $\times(2n+1)$ v závislosti na n. (*Josef Tkadlec*)

2. Dokažte, že pokud je součet dvou daných reálných čísel a, b větší než 2, má soustava nerovnic
$$(a-1)x + b < x^2 < ax + (b-1)$$
nekonečně mnoho řešení x v oboru reálných čísel. (*Jaromír Šimša*)

3. V rovině jsou dány dvě shodné kružnice o poloměru 1, které mají vnější dotyk. Uvažujme pravoúhelník obsahující obě kružnice, jehož každá strana se dotýká aspoň jedné z nich. Určete největší a nejmenší možný obsah takového pravoúhelníku. (*Jaroslav Švrček*)

4. Najděte největší přirozené číslo n takové, že hodnota součtu
$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$
je prvočíslo. Zápis $\lfloor x\rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než x. (*Patrik Bak*)

5. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý. (*Patrik Bak*)

6. Najděte největší možný počet prvků množiny M celých čísel, která má následující vlastnost: Z každé trojice různých čísel z M lze vybrat některá dvě, jejichž součet je mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem. (*Ján Mazák*)

Kategorie B

1. Najděte všechny mnohočleny tvaru ax^3+bx^2+cx+d, které při dělení dvojčlenem $2x^2+1$ dávají zbytek $x+2$ a při dělení dvojčlenem x^2+2 dávají zbytek $2x+1$. (*Pavel Calábek*)

2. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo t platí nerovnosti

$$0 \leq \frac{t^2+1}{t+1} - \sqrt{t} \leq |t-1|.$$

(*Tomáš Jurík*)

3. Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A, mají-li kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod. (*Jaroslav Švrček*)

4. Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí

$$a + ab + abc + ac + c = 2017.$$

(*Patrik Bak*)

5. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Uvažujme obě přímky, z nichž každá dělí daný lichoběžník na dvě části stejného obsahu a je přitom rovnoběžná s jeho úhlopříčkou AC, resp. BD. Dokažte, že průsečík těchto dvou přímek leží na úsečce, která spojuje středy obou základen AB a CD. (*Jaromír Šimša*)

6. Najděte největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ tak, aby mezi nimi nebyla žádná dvě, která se liší o 2 nebo o 5. (*Pavel Calábek*)

Kategorie C

1. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl $\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi.
(Patrik Bak, Mária Dományová)

2. Určete největší možný počet neprázdných po dvou disjunktních množin se stejnými součty prvků, na které lze rozdělit množinu

   a) $\{1, 2, \ldots, 2017\}$, b) $\{1, 2, \ldots, 2018\}$.

   Je-li množina tvořena jedním číslem, považujeme ho za součet jejích prvků. *(Patrik Bak)*

3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, v němž D značí patu výšky z vrcholu C. V polorovině s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C uvažujme body E, F takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímky AE a BF se protínají na úsečce CD. *(Jaroslav Švrček)*

4. Určete největší celé číslo n, při kterém lze čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé její čtvercové části 3×3 byla zapsána aspoň jedna druhá mocnina celého čísla.
(Jaromír Šimša)

5. Je dána kružnice $k(O, r)$ a bod A, kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C. Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice. Vyjádřete její poloměr ρ pomocí daných délek d a r.
(Šárka Gergelitsová)

6. Na kruhovém opevnění hradu je několik věží. Do nich se rozmístí pět černých a pět rudých rytířů (v každé věži jich může být více i různých barev) a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny přejdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Dokažte následující tvrzení:

   a) Je-li věží osm, mohou se rytíři na počátku rozmístit tak, že během každé hodiny bude v každé věži aspoň jeden rytíř.

   b) Je-li věží sedm, některou hodinu zůstane aspoň jedna věž neobsazená, ať se na počátku rytíři rozmístí jakkoliv.

(Pavel Calábek)