Josef Tkadlec

58. mezinárodní matematická olympiáda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 4, 36–41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147012`

ZPRÁVY

58. mezinárodní matematická olympiáda

Josef Tkadlec, IST Austria, Vídeň

Výrazných úspěchů dosáhli reprezentanti České republiky na Mezinárodní matematické olympiádě (IMO), jejíž 58. ročník se letos konal od 13. do 23. července v brazilské metropoli Rio de Janeiro. Olympiády se zúčastnil rekordní počet 615 soutěžících ze 111 zemí (historicky poprvé se zapojil Nepál). Organizací byl pověřen ústav IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Ti samí organizátoři budou za rok ve „městě bohů“ pořádat i prestižní Mezinárodní matematický kongres (ICM).

Jako první na místo přijeli vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo ze 32 připravených návrhů rozdělených do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel) vybrat šestici úloh pro soutěž a shodnout se na bodovacích schématech k jednotlivým úlohám. Zadání vybraných úloh naleznete na konci této zprávy.

Soutěžící s pedagogickými vedoucími dorazili do Ria o tři dny později. Ubytováni byli u pláže Barra de Tijuca v pětihvězdičkovém hotelu, kde proběhlo i slavnostní zahájení a zakončení.

Soutěž se konala 18. a 19. července v prostorách hotelu. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tří úloh. Za každou úlohu mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády odveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3.

Českou republiku reprezentovali *Filip Bialas* z G Opatov v Praze, *Pavel Hudec* z G Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze, *Danil Koževnikov* a *Jan Petr*, oba z G Jana Keplera v Praze, *Martin Raška* z Wichterlova G v Ostravě-Porubě a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně. Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z IST Austria, pedagogickým vedoucím *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.*

Tým složený z ostřílených matadorů i perspektivních mladíků dosáhl několika mimořádných úspěchů. Pavel Turek zužitkoval rozsáhlé zkušenosti a po třech bronzových medailích získal zlato, pro Českou republiku první po čtyřech letech. Jeho dělené 14. místo v pořadí jednotlivců navíc znamená nejlepší individuální výsledek od vzniku ČR. Stříbrné medaile vybojovali Pavel Hudec a Filip Bialas; Filipovi stejně jako loni zlatá medaile unikla o jediný bod. Danil Koževnikov a Jan Petr získali bronzové medaile a Martin Raška dosáhl na čestné uznání (HM), které se uděluje za úplné řešení alespoň jedné úlohy.

V neoficiálním pořadí týmů jsme skončili na skvělém 14.–15. místě, což je nejlepší výsledek od roku 1993. V celkovém pořadí jsme kromě všech sousedů porazili i řadu tradičně silných států včetně Kanady, Maďarska nebo Rumunska. Za zmínku stojí, že po prvním dni jsme dokonce měli více bodů než USA či Čína. Přehled výsledků našich soutěžících uvádíme v tabulce:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
49.–63.	Filip Bialas	7	3	0	7	7	0	24	S
72.–81.	Pavel Hudec	7	3	4	7	1	0	22	S
139.–187.	Danil Koževnikov	7	7	0	3	1	0	18	B
188.–264.	Jan Petr	7	3	0	7	0	0	17	B
390.–415.	Martin Raška	7	3	0	3	0	0	13	HM
14.–28.	Pavel Turek	7	7	0	7	7	0	28	G
	Celkem	42	26	4	34	16	0	122	

Pro srovnání uvádíme i výsledky slovenských soutěžících, kterým se letos tolik nedařilo:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
390.–415.	Martin Melicher	7	3	0	2	1	0	13	HM
188.–264.	Marián Poturnay	7	1	0	7	2	0	17	B
471.–496.	Peter Ralbovský	7	0	0	1	1	0	9	HM
390.–415.	Tomáš Sásik	5	0	0	7	1	0	13	HM
342.–389.	Laura Vištanová	7	0	0	7	0	0	14	HM
471.–496.	Ákos Záhorský	7	0	0	2	0	0	9	HM
	Celkem	40	4	0	26	5	0	75	

Letošní šestice úloh se ukázala být nezvykle obtížná. O tom svědčí hned několik faktů: (i) zlatá medaile se poprvé v historii udělovala již za 25 bodů ze 42 možných, (ii) i ti nejúspěšnější soutěžící (po jednom z Íránu, Japonska a Vietnamu) získali „jen“ 35 bodů, (iii) za třetí úlohu bylo všeho všudy uděleno jen 26 bodů, což je méně než za jakoukoli jinou úlohu v historii IMO; přitom čtyři z těchto bodů získal za částečné řešení Pavel Hudec.

Obr. 1: Pavel Turek se zlatou medailí a Victor Bitaraes, průvodce českého týmu

Doplňme ještě několik zajímavostí. Rusko poprvé v historii vypadlo z elitní desítky a propadlo se na jedenáctou příčku, částečně vinou nečekaně slabého výkonu v úloze číslo 5, navržené právě Ruskem. Na čele se naopak po pěti letech opět objevila Jižní Korea, která odsunula favorizované státy Čínu a USA na druhou, resp. čtvrtou příčku. Mezi ně se ještě vměstnal Vietnam, který se pravidelně objevuje v elitní desítce, ale třetí místo je pro něj vyrovnáním historicky nejlepšího výsledku. Z dalších překvapení jmenujme Gruzii a Řecko na sdílené dvanácté příčce – pro oba státy se jedná o jednoznačně nejlepší výsledek v historii. Kompletní výsledky jsou dostupné na

`https://www.imo-official.org/year_country_r.aspx?year=2017`

Příští, 59. ročník Mezinárodní matematické olympiády proběhne v Cluji-Napoce v Rumunsku.

Letošní (neoficiální) pořadí zúčastněných států naleznete v tabulce:

	I	II	III	body		I	II	III	body
Jižní Korea	6	0	0	170	Velká Británie	3	0	2	130
ČLR	5	1	0	159	Rusko	1	3	2	128
Vietnam	4	1	1	155	Gruzie	1	2	3	127
USA	3	3	0	148	Řecko	1	4	1	127
Írán	2	3	1	142	Bělorusko	1	1	4	122
Japonsko	2	2	2	134	Česká republika	1	2	2	122
Singapur	2	1	2	131	Ukrajina	1	2	2	122
Thajsko	3	0	2	131	Filipíny	0	3	3	120
Tchaj-wan	1	4	1	130	Bulharsko	0	4	2	116

	I	II	III	body
Itálie	2	1	1	116
Nizozemsko	1	2	1	116
Srbsko	0	4	2	116
Maďarsko	2	1	1	115
Polsko	1	0	5	115
Rumunsko	0	3	2	115
Kazachstán	1	2	1	113
Bangladéš	0	2	2	111
Hongkong	1	1	3	111
Kanada	1	2	2	110
Peru	0	2	3	109
Indonésie	0	2	3	108
Izrael	0	3	2	107
Německo	0	1	3	106
Austrálie	0	3	2	103
Chorvatsko	0	2	3	102
Turecko	0	1	3	102
Brazílie	0	2	1	101
Malajsie	0	2	2	101
Francie	0	2	2	100
Saudská Arábie	0	2	2	100
Arménie	0	2	2	99
Ázerbájdžán	0	0	4	98
Mexiko	0	1	2	96
Bosna a Hercegovina	0	0	4	95
Tádžikistán	0	0	3	95
Makao	1	0	0	94
Nový Zéland	0	0	3	94
Kypr	0	0	5	93
Mongolsko	0	1	2	93
Turkmenistán	0	0	2	93
Švédsko	0	1	2	91
Indie	0	0	3	90
Slovinsko	0	0	2	90
Portugalsko	0	0	2	89
Španělsko	0	0	3	86
Sýrie	0	1	0	85
Lotyšsko	0	0	3	84
Moldavsko	0	1	0	83
Švýcarsko	0	0	1	83
Kolumbie	0	0	1	81
JAR	0	0	2	81
Belgie	0	1	2	80
Irsko	0	0	2	80
Srí Lanka	0	0	3	80
Dánsko	0	0	1	77
Makedonie	0	0	1	77
Kyrgyzstán	0	0	2	75
Maroko	0	0	1	75
Slovensko	0	0	1	75
Rakousko	0	2	0	74
Estonsko	0	1	0	72
Norsko	0	0	2	71
Alžírsko	0	0	1	70
Litva	0	0	2	69
Uzbekistán (5)	0	1	0	69
Albánie	0	0	1	67
Chile	0	0	1	67
Ekvádor	0	0	1	66
Tunisko (5)	0	0	1	59
Venezuela (5)	0	0	2	59
Kostarika	0	0	0	58
Pákistán	0	0	1	58
Salvádor(4)	0	0	1	57
Finsko	0	0	0	56
Kosovo (5)	0	0	1	55
Portoriko (5)	0	0	0	55
Nigérie (4)	0	0	0	51
Paraguay	0	0	0	48
Island	0	0	0	45
Lucembursko	0	0	1	45
Nikaragua (4)	0	0	1	44
Uruguay	0	0	0	43
Černá Hora (4)	0	0	1	42
Bolívie	0	0	0	41
Lichtenštejnsko (3)	0	0	0	22
Uganda	0	0	0	22
Guatemala (4)	0	0	0	20
Botswana	0	0	0	19
Myanmar	0	0	0	15
Panama (1)	0	0	0	15
Trinidad a Tobago (1)	0	0	0	15
Kuba (1)	0	0	0	13
Irák (4)	0	0	0	13
Honduras (2)	0	0	0	12
Kambodža	0	0	0	11
Pobřeží slonoviny	0	0	0	11
Keňa	0	0	0	8
Ghana (1)	0	0	0	6
Tanzánie (2)	0	0	0	5
Egypt (3)	0	0	0	3
Nepál	0	0	0	3

Texty soutěžních úloh
(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Úloha 1. Pro dané celé číslo $a_0 > 1$ definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pro každé $n \geq 0$ předpisem

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{pokud } \sqrt{a_n} \text{ je celé číslo,} \\ a_n + 3 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete všechny hodnoty a_0, pro které existuje číslo A takové, že rovnost $a_n = A$ platí pro nekonečně mnoho indexů n.
(Jihoafrická republika)

Úloha 2. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x + y) = f(xy).$$

(Albánie)

Úloha 3. Lovec a neviditelný zajíc hrají hru v eukleidovské rovině. Zajícova počáteční poloha A_0 a lovcova počáteční poloha B_0 jsou stejné. Po $n - 1$ kolech hry se zajíc nachází v bodě A_{n-1} a lovec v bodě B_{n-1}. V n-tém kole postupně proběhnou tři věci:

(i) Zajíc se neviděn přesune do bodu A_n takového, že vzdálenost mezi A_{n-1} a A_n je přesně 1.
(ii) Sledovací zařízení nahlásí lovci bod P_n. Jediná záruka poskytnutá sledovacím zařízením je, že vzdálenost mezi P_n a A_n je nejvýše 1.
(iii) Lovec se viditelně přesune do bodu B_n takového, že vzdálenost mezi B_{n-1} a B_n je přesně 1.

Může lovec vždy (tj. bez ohledu na to, jak se hýbe zajíc, a na to, jaké body hlásí sledovací zařízení) volit své pohyby tak, aby měl jistotu, že po 10^9 kolech bude vzdálenost mezi ním a zajícem nejvýše 100?
(Rakousko)

Úloha 4. Je dána kružnice Ω a na ní různé body R, S takové, že RS není průměr Ω. Označme ℓ tečnu kružnice Ω vedenou bodem R. Nechť T je takový bod, že S je střed úsečky RT. Bod J je zvolen na kratším oblouku RS kružnice Ω tak, že kružnice Γ opsaná trojúhelníku JST protíná přímku ℓ ve dvou různých bodech. Označme A ten průsečík kružnice Γ a přímky ℓ, který leží blíže bodu R. Přímka AJ protíná kružnici Ω podruhé v bodě K. Dokažte, že přímka KT je tečna kružnice Γ.
(Lucembursko)

Úloha 5. Je dáno celé číslo $N \geq 2$. V řadě stojí $N(N+1)$ navzájem různě vysokých fotbalistů. Trenér Vrba chce vyřadit některých $N(N-1)$ z nich tak, aby nová řada sestávající ze zbylých $2N$ fotbalistů splňovala následujících N podmínek:

(1) nikdo nestojí mezi dvěma nejvyššími fotbalisty,

(2) nikdo nestojí mezi třetím a čtvrtým nejvyšším fotbalistou,

$\vdots$

(N) nikdo nestojí mezi dvěma nejnižšími fotbalisty.

Dokažte, že je to vždy možné.

(Rusko)

Úloha 6. Uspořádaná dvojice (x, y) celých čísel je *primitivní mřížový bod*, jestliže největší společný dělitel čísel x a y je 1. Dokažte, že pro libovolnou konečnou množinu S primitivních mřížových bodů existuje kladné celé číslo n a celá čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ taková, že pro každou dvojici (x, y) z S platí

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(USA)

Obr. 2: Zleva Pavel Hudec, Danil Koževnikov, Victor Bitaraes (průvodce českého týmu), Filip Bialas, Martin Raška, Pavel Turek, Jan Petr