Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Dvě úlohy z planimetrie

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 4, 35–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147574

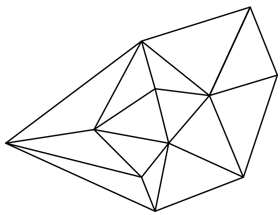
Dvě úlohy z planimetrie

Emil Calda, MFF UK, Praha

Abstract. The first example deals with the following question: In how many nonintersecting triangles whose vertices are in the vertices of convex n-gon and in m given points inside the n-gon is the n-gon cut? In the second the set of all points X with the following property is found: If you go from X to given point B in a straight line, the distance to another given point A increases.

Následující dvě úlohy se nejprve pokuste vyřešit sami. K jejich vyřešení potřebujete pouze dobře známé planimetrické poznatky.

Příklad 1. Uvnitř daného konvexního n-úhelníku je zvoleno m různých bodů, které společně s vrcholy tohoto n-úhelníku jsou vrcholy neprotínajících se trojúhelníků pokrývajících celý n-úhelník. Určete počet takto určených trojúhelníků. (Na obr. 1 je pro ilustraci znázorněn případ pro $n = 6$, $m = 5$; trojúhelníků je celkem 14).



Obr. 1

Řešení. Označíme-li x počet těchto trojúhelníků, pro součet S velikostí všech jejich vnitřních úhlů platí zřejmě

$$S = x \cdot 180^\circ.$$

Tento součet S však můžeme vyjádřit i ve tvaru $S_1 + S_2$, kde S_1 je součet velikostí všech plných úhlů s vrcholy v daných m bodech a S_2 je součet velikostí vnitřních úhlů daného n-úhelníku. Je tedy

$$S_1 = m \cdot 360^\circ,$$
$$S_2 = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Z rovnosti $S = S_1 + S_2$ tak získáváme rovnici

$$x \cdot 180^\circ = m \cdot 360^\circ + (n-2) \cdot 180^\circ,$$

z níž snadno vypočteme

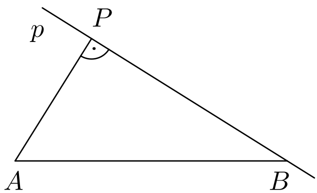
$$x = 2m + n - 2.$$

Všimněte si, že počet trojúhelníků závisí pouze na m a n a ne na tom, jakým způsobem je m bodů uvnitř daného n-úhelníku rozmístěno.

Přesvědčte se, že tento výsledek souhlasí s výše uvedeným počtem trojúhelníků na obr. 1, tj. pro případ $n = 6$, $m = 5$.

Příklad 2. V rovině jsou dány dva různé body A, B. Určete množinu všech bodů X této roviny, pro něž při pohybu z bodu X po přímce do bodu B vzdálenost mezi body X, A stále vzrůstá.

Řešení. Veďme bodem B libovolnou přímku p, na které neleží bod A, a sestrojme patu P kolmice vedené bodem A k přímce p (obr. 2).



Obr. 2

Pohybuje-li se po přímce p do bodu B libovolný bod X ležící na polopřímce opačné k polopřímce PB, jeho vzdálenost od bodu A se stále zmenšuje a je nejmenší, když bod X bude v bodě P; při dalším pohybu z bodu P do bodu B se vzdálenost mezi body X a A zvětšuje.

Jestliže se po přímce p pohybuje do bodu B libovolný bod X ležící na polopřímce opačné k polopřímce BP, jeho vzdálenost od bodu A se stále zmenšuje. Zjistili jsme tak, že z bodů ležících na přímce p splňují daný požadavek pouze všechny body úsečky PB bez krajního bodu B.

Tímto způsobem lze postupovat u každé přímky procházející bodem B, na níž neleží bod A. Uvědomíme-li si nyní, že paty kolmic spuštěných k těmto přímkám z bodu A leží na Thaletově kružnici s průměrem AB a dále že z bodů ležících na přímce AB vyhovují všechny body úsečky AB bez bodu B, docházíme k závěru:

Hledaná množina je kruh s průměrem AB bez bodu B.

Literatura

[1] Bušek, I., Kubínová, M., Novotná, J.: *Matematika pro 9. ročník základní školy.* Prometheus, Praha, 1994.