Ľubomíra Dvořáková; David Ryzák
Antipalindromická čísla

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 1, 2–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147677

Antipalindromická čísla

Ľubomíra Dvořáková, FJFI ČVUT, Praha
David Ryzák, MFF UK, Praha

Abstrakt. Každý zná jistě palindromy: slova, která se čtou stejně zepředu i pozpátku (např. krk, rotor, nepotopen). Palindromická čísla, tj. čísla, která mají palindromický zápis v nějaké přirozené bázi, jsou dobře matematicky prostudovaná. V článku představíme pojem antipalindromická čísla a poznatky o nich a porovnáme je s palindromickými čísly. Zejména vypíchneme překvapivý výsledek týkající se dělitelnosti a prvočísel mezi antipalindromickými čísly.

1. Palindromy pod lupou

Nikoho jistě nepřekvapí, že v přirozených jazycích obzvlášť dlouhé palindromy nenajdeme. Nejdelšími palindromickými slovy v češtině jsou příčestí typu ‚nepochopen', ‚nepotopen', ‚nezasazen', ‚nezařazen'. V angličtině je nejdelším palindromickým slovem ‚tattarrattat'. Jeho vítězství ovšem není zcela zasloužené, protože nejde o běžné slovo, nýbrž o fantazii Jamese Joyce, který ve svém románu Odysseus [1] použil tento neologismus k označení energického poklepání na dveře:

"I was just beginning to yawn with nerves thinking he was trying to make a fool of me when I knew his tattarrattat at the door."

Zajímavější jsou pak palindromické věty. Palindromy z nich vzniknou, pokud zapomeneme na mezery mezi slovy, případně i na diakritiku. V češtině patří mezi nejznámější palindromické věty:

„Bažantu padá za záda putna žab."
„Jelenovi pivo nelej."
„Kobyla má malý bok."

Ale zajímavé jsou i palindromy číselné, zvlášť když se k nim váže nějaké alespoň částečně doložené vysvětlení. Například s položením základního kamene Karlova mostu je spojován palindrom ze samých lichých cifer 135797531. Podle historika astronomie Zdeňka Horského mohl být základní kámen položen 9. července 1357 v 5:31. V tu chvíli prý byla příznivá konstelace Slunce a Saturnu. Palindrom je tedy sestaven z údajů: rok–den–měsíc–hodina–minuty.

2. (Anti)palindromická čísla

Začneme formální definicí palindromického čísla a nově definujeme antipalindromické číslo.

Definice 1. Nechť $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Uvažujme přirozené číslo m, jehož zápis v bázi b má tvar

$$m = i_n b^n + \cdots + i_1 b + i_0,$$

kde $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ a $i_n \neq 0$. Potom m nazveme

1. *palindromickým číslem* v bázi b, pokud cifry splňují podmínku:

$$i_j = i_{n-j} \quad \text{pro každé } j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

2. *antipalindromickým číslem* v bázi b, pokud cifry splňují podmínku:

$$i_j = b - 1 - i_{n-j} \quad \text{pro každé } j \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Říkáme, že přirozené číslo je *palindromické*, resp. *antipalindromické*, pokud existuje báze, v níž má tuto vlastnost.

Příklad 1. Uvažujme nyní různé báze b a podívejme se, jak vypadají antipalindromická čísla v těchto bázích:

- V bázi $b = 10$ je antipalindromickým číslem např. $395\,406$.
- V bázi $b = 3$ je antipalindromickým číslem např. $1\,581 = (2011120)_3$.
- V bázi $b = 2$ je antipalindromickým číslem např. $52 = (110100)_2$.

Věta 1. *Pokud má antipalindromické číslo lichý počet cifer v bázi b, pak je b liché číslo. Navíc prostřední cifra má pak hodnotu $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Označme cifry uvažovaného antipalindromického čísla v bázi b jako $i_0, i_1, \ldots, i_{2n}$. Podle definice antipalindromického čísla splňuje prostřední cifra i_n rovnost $2i_n = b - 1$. Z toho vyplývá, že cifra i_n je celé číslo jen pro b liché. Navíc platí $i_n = \frac{b-1}{2}$. □

Věta 2. *Pokud je antipalindromické číslo v bázi b zároveň palindromickým v bázi b, pak je b liché číslo a všechny cifry jsou rovny $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Mějme antipalindromické číslo v bázi b s ciframi $i_0, i_1, \ldots, i_n$. Aby bylo zároveň palindromickým, musí platit $i_j = i_{n-j}$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Z definice antipalindromického čísla zároveň plyne, že $i_j + i_{n-j} = b - 1$. Dostáváme tedy $i_j = \frac{b-1}{2}$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, a báze b je tudíž nutně lichá. □

2.1. Dělitelnost

V této kapitole připomeneme známý výsledek týkající se dělitelnosti palindromických čísel. Představíme nové výsledky pro dělitelnost antipalindromických čísel. Z těchto poznatků poté odvodíme, jak je to s výskytem prvočísel mezi palindromickými a antipalindromickými čísly.

2.1.1. Dělitelnost palindromických čísel

Věta 3. *Palindromické číslo se sudým počtem cifer v bázi b je dělitelné $b+1$.*

Důkaz. Uvažujme palindromické číslo

$$m = i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \cdots + i_1 b + i_0$$

pro lichá n. Můžeme spárovat jednotlivé dvojice

$$i_{n-j} b^{n-j} + i_j b^j = i_j (b^{n-j} + b^j),$$

protože definice palindromického čísla říká, že $i_{n-j} = i_j$. Díky sudému počtu cifer můžeme tímto způsobem spárovat všechny dvojice $i_{n-j} b^{n-j}$ a $i_j b^j$ pro $j \in \{0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$. Dokažme, že pro palindromické číslo upravené spárováním koeficientů platí

$$m = i_0(b^n + 1) + i_1(b^{n-1} + b) + \cdots + i_k(b^{n-k} + b^k) \equiv 0 \pmod{b+1},$$

kde $k = \frac{n-1}{2}$.

Všechny členy kongruence můžeme zapsat i jako $i_j b^j (b^{n-2j} + 1)$ pro $j \in \{0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$, a protože vždy $2j < n$, tak v každém členu kongruence najdeme člen $b^{n-2j} + 1$, kde $n - 2j \geq 1$. Zbývá tedy ukázat, že

$b^\ell + 1 \equiv 0 \pmod{b+1}$ pro lichá přirozená čísla ℓ, a to plyne ze známého vzorce pro rozklad:

$$b^\ell + 1 = (b+1)(b^{\ell-1} - b^{\ell-2} + \cdots - b + 1) \equiv 0 \pmod{b+1}.$$

Tím je dokázáno, že $b+1$ je dělitelem palindromických čísel se sudým počtem cifer. $\square$

2.1.2. Dělitelnost antipalindromických čísel

V desítkové soustavě známe tvrzení, které říká, že přirozené číslo je dělitelné 9, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 9. Zobecněme nyní toto tvrzení pro soustavy s libovolným přirozeným základem b.

Lemma 4. *Nechť m je přirozené číslo a jeho zápis v bázi b je roven $i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \ldots + i_1 b + i_0$. Potom m je dělitelné $b-1$, právě když jeho ciferný součet v bázi b je dělitelný $b-1$, tj. $(i_n + i_{n-1} + \cdots + i_1 + i_0) \equiv 0 \pmod{b-1}$.*

Důkaz. Jelikož $b^\ell - 1 = (b-1)(b^{\ell-1} + b^{\ell-2} + \ldots + b + 1)$, dostáváme kongruenci $b^\ell \equiv 1 \pmod{b-1}$ pro každé $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Z vlastností kongruencí pak plyne, že $i_\ell b^\ell \equiv i_\ell \pmod{b-1}$, tudíž také platí

$$i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \ldots + i_1 b + i_0 \equiv i_n + i_{n-1} + \ldots + i_1 + i_0 \pmod{b-1}.$$

$\square$

Věta 5. *Antipalindromické číslo se sudým počtem cifer v bázi b je dělitelné číslem $b-1$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindromické číslo

$$m = i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \cdots + i_1 b + i_0$$

pro liché n. Podle lemmatu 4 máme kongruenci

$$i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \ldots + i_1 b + i_0 \equiv i_n + i_{n-1} + \ldots + i_1 + i_0 \pmod{b-1}.$$

Podle definice antipalindromického čísla platí $i_{n-j} + i_j = b-1$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ze sudého počtu cifer pak plyne

$$i_n + i_{n-1} + \cdots + i_1 + i_0 = (b-1)\frac{n+1}{2} \equiv 0 \pmod{b-1},$$

tudíž antipalindromické číslo m je dělitelné číslem $b-1$. $\square$

Věta 6. *Antipalindromické číslo s lichým počtem cifer v bázi b je dělitelné číslem $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindromické číslo

$$m = i_{2n}b^{2n} + i_{2n-1}b^{2n-1} + \cdots + i_1 b + i_0.$$

Z definice antipalindromického čísla s lichým počtem cifer vyplývá, že všechny cifry kromě prostřední i_n lze spárovat $i_{2n} + i_0$, $i_{2n-1} + i_1$, $\ldots$, $i_{n+1} + i_{n-1}$ vždy se součtem $b - 1$. Ciferný součet čísla $m - i_n b^n$ je tedy dělitelný číslem $b - 1$, a tedy podle lemmatu 4 je také přímo $m - i_n b^n$ dělitelné číslem $b-1$, a tudíž samozřejmě i číslem $\frac{b-1}{2}$. Jelikož prostřední cifra podle věty 1 splňuje $i_n = \frac{b-1}{2}$, dozvěděli jsme se zatím, že číslo $m - \frac{b-1}{2}b^n$ je dělitelné $\frac{b-1}{2}$. Tím je dokázáno, že také antipalindromické číslo m je dělitelné číslem $\frac{b-1}{2}$. □

2.1.3. Prvočísla mezi palindromickými a antipalindromickými čísly

Dělitelnost a prvočísla spolu úzce souvisí. Pojďme se tedy podívat, jak to s nimi vypadá mezi palindromickými a antipalindromickými čísly. Z věty 3 víme, že palindromická čísla se sudým počtem cifer v bázi b jsou dělitelná číslem $b + 1$. Proto nejsou prvočísly s výjimkou případu, kdy $b + 1$ je prvočíslo a 11 je pak jeho příslušný palindromický zápis (se sudým počtem cifer) v bázi b.

Palindromických prvočísel můžeme najít spoustu v naší desítkové soustavě, např. $101, 131, 353, 757, \ldots$, viz posloupnost $A002385$ v OEIS [3]. Nejvyšší dosud známé palindromické prvočíslo v bázi 10 je $10^{474500} + 999 \cdot 10^{237249} + 1$. Zda existuje nekonečně mnoho palindromických prvočísel není známé. Ví se ovšem, že např. Mersennova a Fermatova prvočísla[1)] jsou palindromická v bázi 2. Pokud tedy existuje nekonečně mnoho Mersennových či Fermatových prvočísel, pak je i nekonečně mnoho palindromických prvočísel. Ale i v jiných bázích b není složité palindromická prvočísla najít, např.

$$\begin{aligned}(111)_8 &= 73,\\ (212)_3 &= 23,\\ (B222B)_{16} &= 729\,643.\end{aligned}$$

[1)] Mersennova prvočísla jsou tvaru $2^p - 1$, kde p je nutně prvočíslo. Fermatova prvočísla jsou tvaru $2^{2^n} + 1$.

Zatímco palindromická prvočísla existují v různých bázích, antipalindromická prvočísla se vyskytují vzácně. Rozebereme tři případy v závislosti na hodnotě báze b.

Báze $b > 3$

Věta 7. *Nechť je dána báze* $b > 3$.

- *Pak existuje maximálně jedno antipalindromické prvočíslo* p *v bázi* b *splňující* $p < b$, *a to* $p = \frac{b-1}{2}$.
- *Antipalindromické prvočíslo* p *v bázi* b *splňující* $p \geq b$ *neexistuje.*

Důkaz.

- Jelikož cifry v soustavě o základu b mají hodnoty od 0 do $b - 1$, má každé číslo $p < b$ jednociferný zápis v bázi b. Jediné jednociferné antipalindromické číslo v bázi b je číslo $\frac{b-1}{2}$, viz věta 1. Odtud již plyne první tvrzení věty.
- Druhé tvrzení plyne z dělitelnosti antipalindromických čísel (věty 5 a 6). □

Báze $b = 2$

Věta 8. *V bázi* 2 *existuje jediné antipalindromické prvočíslo* p, *a to* $p = 2$ *se zápisem* 10.

Důkaz. Z definice antipalindromického čísla vyplývá, že poslední cifra jeho zápisu v bázi 2 bude 0. Každé antipalindromické číslo má tedy zápis tvaru $2^n + i_{n-1}2^{n-1} + \cdots + i_1 2$, tudíž je dělitelné dvěma. Jediné takové prvočíslo je 2. □

Báze $b = 3$

Věta 9. *V bázi* $b = 3$ *existují antipalindromická prvočísla. Nutně mají lichý počet cifer a navíc minimálně tři cifry. Nejmenším takovým antipalindromickým prvočíslem je číslo* 13.

Důkaz. O bázi 3 víme z věty 5, že antipalindromická čísla se sudým počtem cifer v této bázi jsou dělitelná dvěma. Pro antipalindromická čísla s lichým počtem cifer plyne z věty 6 pouze triviální fakt, že jsou dělitelná číslem 1, a tak všechna antipalindromická prvočísla v bázi 3 mají lichý počet cifer. Jediné jednociferné antipalindromické číslo v bázi 3 je číslo 1. Pro všechna antipalindromická prvočísla v bázi $b = 3$ tak platí, že mají alespoň tři cifry a prostřední cifra je rovna jedné. Nejmenším takovým antipalindromickým prvočíslem v bázi 3 je tudíž číslo 13 se zápisem 111. □

Kolik antipalindromických prvočísel v bázi $b = 3$ existuje? To je otázka, na kterou bohužel neznáme odpověď. Uvedeme alespoň, co bližšího lze říci o jejich tvaru.

Lemma 10. *Antipalindromická čísla v bázi* 3 *začínající cifrou* 2 *jsou dělitelná číslem* 3.

Důkaz. Mějme antipalindromické číslo

$$m = i_n 3^n + i_{n-1} 3^{n-1} + \cdots + i_1 3 + i_0,$$

přičemž $i_n = 2$. Jelikož $i_n + i_0 = 2$, musí být $i_0 = 0$. Odtud již plyne dělitelnost m číslem 3. □

Věta 11. *Všechna antipalindromická prvočísla v bázi* 3 *jsou ve tvaru* $6k + 1$, *kde* $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Uvažujme antipalindromické prvočíslo

$$m = i_{2n} 3^{2n} + i_{2n-1} 3^{2n-1} + \cdots + i_1 3 + i_0$$

(počet cifer je nutně lichý podle věty 9). Podle lemmatu 10 je $i_{2n} = 1$ a $i_0 = 1$ a z věty 1 vyplývá, že $i_n = 1$. Spárujme spolu jednotlivé členy antipalindromického čísla m (kromě i_0, i_n, i_{2n}): $i_{2n-j} 3^{2n-j} + i_j 3^j$, $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Dokažme, že pro každé $j \in \{1, \dots, n-1\}$ existuje $s \in \mathbb{N}$ splňující

$$3^j (i_{2n-j} 3^{2n-2j} + i_j) = 6s.$$

V závorce můžeme předpokládat pouze 3 možnosti pro cifry: $i_{2n-j} = 2$, $i_j = 0$, nebo $i_{2n-j} = i_j = 1$, nebo $i_{2n-j} = 0$, $i_j = 2$. Ve všech těchto případech rovnost platí, protože v závorce bude sudé číslo. Dostáváme proto rovnost

$$\begin{aligned} m &= i_{2n} 3^{2n} + i_n 3^n + i_0 + 6\ell \\ &= 3^{2n} + 3^n + 1 + 6\ell \\ &= 3^n (3^n + 1) + 1 + 6\ell \end{aligned}$$

pro nějaké nezáporné celé číslo ℓ. Odtud je vidět, že m je skutečně tvaru $6k + 1$ pro nějaké přirozené k. □

3. Další vlastnosti antipalindromických čísel

V článku jsme definovali antipalindromická čísla v přirozené bázi a zkoumali jejich dělitelnost. Zajímavý byl výsledek, který říká, že v každé přirozené bázi různé od tří existuje maximálně jedno antipalindromické prvočíslo. Tento výsledek je překvapivý ve srovnání s palindromickými čísly, pro která není těžké nacházet palindromická prvočísla v různých bázích. Tento článek vznikl na základě středoškolské odborné činnosti [2]. Výsledky, které jsme odvodili, ale v článku je neuvádíme, zahrnují počet antipalindromických čísel po nějakou mez, mezery mezi sousedními antipalindromickými čísly, jednoduchý vzorec pro pořadí antipalindromických čísel, výskyty palindromických mezi antipalindromickými čísly a naopak, mocniny mezi antipalindromickými čísly.

4. Úlohy pro čtenáře

Pokud čtenáře naše hrátky se zápisem čísel zaujaly a chtěl by si sám vyzkoušet něco podobného, může dokázat některé vlastnosti duhových čísel. Za nápad zkoumat duhová čísla děkujeme Josefu Tkadlecovi.

Definice 2. Nechť $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Přirozené číslo m, jehož zápis v bázi b obsahuje každou cifru od 1 do $b-1$ právě jednou a neobsahuje cifru 0, nazveme *duhové* v bázi b. Přirozené číslo nazveme *duhové*, pokud existuje báze, v níž je duhové.

Příklad 2. Uvažujme nyní různé báze b a podívejme se, jak vypadají duhová čísla v těchto bázích:

- V bázi $b = 10$ je duhovým číslem např. 123 456 789.
- V bázi $b = 2$ je jediným duhovým číslem 1.
- V bázi $b = 3$ je duhovým číslem např. $5 = (12)_3$ nebo $7 = (21)_3$.

Úlohy pro čtenáře:

1. Najděte všechna duhová prvočísla. Odpověď 5 a 7.

2. Najděte největšího společného dělitele všech duhových čísel v bázi 10. Odpověď 9.

3. Určete nejmenší a největší mezeru mezi sousedními duhovými čísly v bázi 10. (Duhová čísla m a n v bázi 10, $m < n$, jsou sousedy, pokud neexistuje duhové číslo k v bázi 10 splňující $m < k < n$.) Odpověď 9 a 14 691 357.

Chcete-li si své řešení nechat zkontrolovat, pošlete je na emailovou adresu autorky: `lubomira.dvorakova@fjfi.cvut.cz`

Literatura

[1] Joyce, J.: *Ulysses.* Sylvia Beach's Shakespeare and Company, Paris, 1922.

[2] Ryzák:, D.: *Antipalindromy.* SOČ práce, obor Matematika a statistika, roč. 40 (2018),
dostupné z: `http://www.soc.cz/archiv-minulych-rocniku/`

[3] on-line encyclopedia of integer sequences: `https://oeis.org/A002385`

Lékařské testy individuální a skupinové

Jan Vybíral, FJFI ČVUT, Praha

Abstrakt. Lékařské testy zná z běžného života každý z nás. Díky jejich nedokonalosti – vyjádřené pojmy senzitivita a specificita – se jejich vyhodnocení neobejde bez pojmů z elementární statistiky. Metoda skupinových testů (*group testing*), vyvinutá během druhé světové války, je oproti tomu stále aktivní pole vědeckého zájmu; původní článek Roberta Dorfmana z roku 1943 zaznamenává stále přes čtyřicet citací ročně. V této práci se pokusíme seznámit čtenáře se základy tohoto oboru, a to včetně teoretických i praktických cvičení.

1. Klasické lékařské testy

Diagnostika nemocí je prováděna lékařskými testy. Reálné testy ale nejsou ideální – ideální test by každého nemocného označil za nemocného a každého zdravého za zdravého. U každého v praxi používaného testu je tedy možné, že zdravý jedinec bude bohužel označen za nemocného (tzv. falešná pozitivita) nebo že nemocný jedinec bude označen za zdravého (tzv. falešná negativita).

Senzitivitou testu (neboli citlivostí testu) se nazývá pravděpodobnost, že nemocný pacient bude označen jako nemocný. Specificita testu je naopak pravděpodobnost, že zdravý jedinec bude označen za zdravého. Ideální test by tedy měl mít senzitivitu i specificitu rovnu jedné.