Luděk Spíchal

Od řetězovky k číslu π

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 2, 1–11

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148443`

Od řetězovky k číslu π

Luděk Spíchal, Ústav matematiky a statistiky, MU, Brno

Abstrakt. Článek se zabývá alternativním způsobem výpočtu přibližné hodnoty čísla π. Tuto hodnotu získáme aproximací z plochy obrazce omezeného grafem funkce, která počítá harmonický průměr hodnot exponenciálních funkcí e^x a e^{-x}, a osou x.

Číslo π, které je patrně nejznámější matematickou konstantou, poutá pozornost matematiků od starověku až po současnost. Konec konců, která další konstanta si vysloužila sice neoficiální, přesto řadou fanoušků čísla π oslavovaný den. Obdobně důležitou, i když patrně méně známou konstantou je Eulerovo číslo e.

Záměrem článku je poukázat na možnost výpočtu hodnoty čísla π postupem založeným na aproximaci plochy omezené grafem vhodné funkce. K výpočtu použijeme řetězovku, křivku známou zejména v oblasti stavitelství (např. samonosné klenby, lana visutých mostů), jejíž rovnice vychází z aritmetického průměru hodnot funkcí e^x a e^{-x}. Harmonický průměr hodnot uvedených funkcí nás dále přivede ke křivce, která omezuje plochu, kterou budeme aproximovat pomocí lichoběžníků. Postupnou změnou délky intervalu použitého pro aproximaci ukážeme, že velikost plochy se přibližuje číslu π. Na závěr jako doplněk uvedeme možnost provedení výpočtu pomocí softwaru SAS/STAT.

V článku nebudeme zmiňovat historii zkoumání čísla π a tradiční metody jeho výpočtu, neboť toto je podrobně popsáno v článku Terezy Bártlové „Příběh jedné konstanty“ (publikován také v tomto čísle časopisu), naopak krátce zmíníme vlastnosti druhé zmíněné konstanty, tj. Eulerova čísla e.

Eulerovo číslo

S Eulerovým číslem se studenti středních škol setkají poprvé v souvislosti s logaritmy, kde číslo

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\ldots,$$

které je podobně jako číslo π číslem iracionálním, vystupuje v roli *základu přirozených logaritmů*.[1] Ve středoškolské matematice ovšem mnoho pro-

[1] Konstanta byla pojmenována po švýcarském matematikovi Leonhardu Eulerovi (1707–1783), ačkoliv byla objevena již roku 1683 rovněž švýcarským matematikem

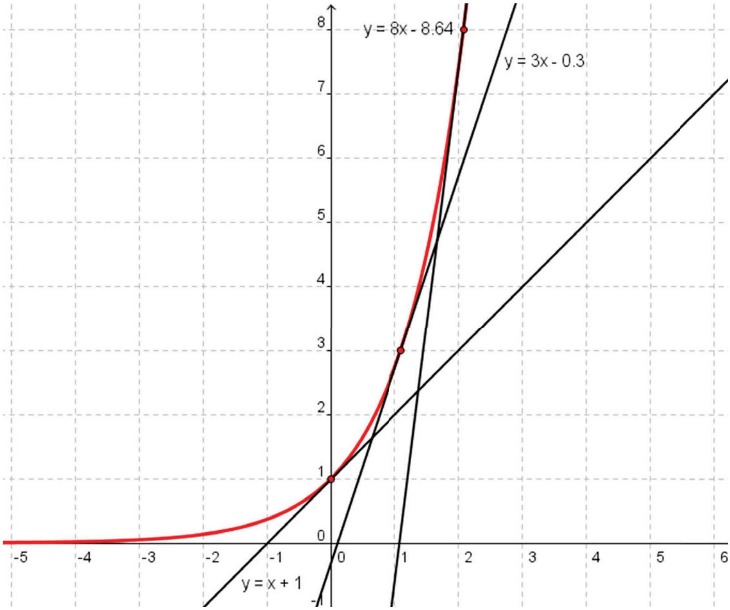
storu tato důležitá konstanta nenaléză. Uveďme proto alespoň některé další aspekty čísla e, které by měly být srozumitelné i v případě, že jsme neprošli kurzy vyšší matematiky.

1. Nejprve zmíníme důležitou souvislost čísla e a principu úročení vkladu označovaného jako *složené úročení*. Můžeme si, podobně jako to učinil ke konci 17. století Jacob Bernoulli, položit celkem jednoduchou otázku. Jak závisí výše úroku z vkladu na délce úrokovacího období? Jestliže bychom uvažovali, že vložená částka (např. 1 Kč) je úročena stoprocentním ročním úrokem, pak výše připsané částky závisí na frekvenci úročení. Je celkem snadné dovodit, že pro střadatele je výhodná co nejkratší délka úrokovacího období. Nekonečně krátkému úrokovacímu období (tzv. spojité úročení) pak odpovídá maximální možná hodnota úroku, která je e násobkem ročního úroku. Na konci roku by střadatel za daných podmínek měl uspořeno 2,718..., tedy e Kč [5].

   Výše uvedené skutečnosti můžeme zapsat jazykem matematiky ve tvaru
   $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

2. Pokud položíme základ exponenciální funkce $y = a^x$ $(a > 0)$ roven číslu e, pak získáme předpis funkce ve tvaru
   $$y = \mathrm{e}^x.$$
   Graf funkce znázorněný na obr. 1 ukazuje, že v daném případě je hodnota směrnice tečny ke grafu funkce v libovolném bodě rovna hodnotě funkce v daném bodě. Jestliže bude např. $C[c, \mathrm{e}^c]$ bod dotyku tečny ke grafu funkce $y = \mathrm{e}^x$, pak pro rovnici tečny platí vztah
   $$y = \mathrm{e}^c x + \mathrm{e}^c(1-c).$$

3. Každou exponenciální funkci zapsanou ve tvaru $y = a^x$ $(a > 0)$ můžeme vyjádřit pomocí čísla e
   $$y = a^x \iff y = \mathrm{e}^{kx},$$
   kde $k = \ln a$. Předpisy exponenciálních funkcí zapsané pomocí čísla e jsou velmi běžné jak v matematice, tak mimo ní, neboť usnadňují další výpočty. Tak např. funkci zdvojování $y = 2^x$ zapíšeme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{0,693x}$, ztrojování $y = 3^x$ ve tvaru $y = \mathrm{e}^{1,099x}$ apod.



Obr. 1: Graf funkce $y = \mathrm{e}^x$ s vyznačenými tečnami; směrnice tečen se rovnají y-ové souřadnici bodu dotyku

V roce 1690 se objevitel čísla e Jacob Bernoulli v časopise *Acta editorum* zamýšlel nad otázkou, jak matematicky definovat tvar, který zaujímá volně visící řetízek. Jinak řečeno, jak matematicky popsat tzv. *řetězovku* [5].

Co je řetězovka

Řetězovka[2)] je ve fyzice a geometrii křivkou, kterou vytvoří volně zavěšený řetěz či kabel (obecně pak dokonale pevné a ohebné vlákno) připevněný pouze na okrajích. Zakřivení je důsledkem výhradního působení gravitačního pole, kde každá část prověšeného vlákna minimalizuje svoji potenciální energii. Tvarem se řetězovka značně blíží tvaru parabolického oblouku, parabolou však není. Přesto jistý vztah k parabole lze zaznamenat v případě, že se parabola valí po přímce. Ohnisko takto se

Jacobem Bernoullim (1655–1705).

2) Název, pocházející z lat. *catenaria* což znamená řetěz, poprvé použil holandský astronom Christiaan Huygens (1629–1695), který současně ukázal, že křivku nelze popsat algebraickou rovnicí.

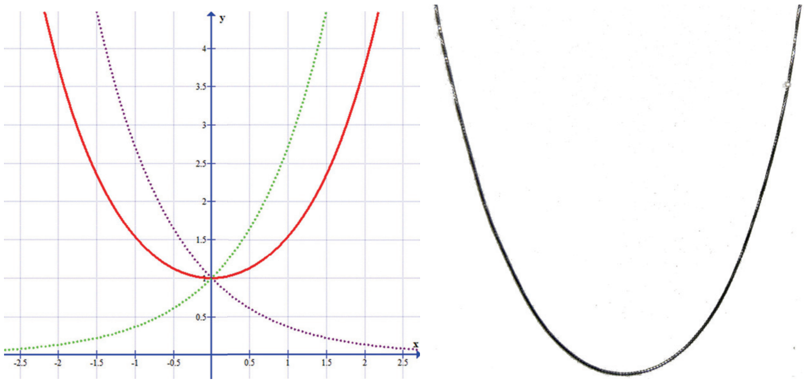
valící paraboly opisuje křivku, která má tvar řetězovky. Řetězovku zaznamenáme rovněž v případě, kdy z mýdlového roztoku vytáhneme dva kruhy tak, aby byly spojeny vrstvou roztoku. Molekuly roztoku vytvoří plochu (tzv. katenoid), jejímž průřezem je rovněž řetězovka [2]. Ideálně samonosné klenby staveb mají tvar "obrácené" řetězovky, neboť oblouk minimalizuje síly, které na něj působí [3]. V kartézské soustavě souřadnic Oxy lze řetězovku vyjádřit ve tvaru [3]

$$y = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right), \tag{1}$$

kde a je kladný parametr určující míru rozevření řetězovky. Pokud dále položíme hodnotu parametru $a = 1$, pak má rovnice (1) tvar

$$y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right), \tag{2}$$

a je tak aritmetickým průměrem hodnot funkcí e^x a e^{-x} (obr. 2).[3)]



Obr. 2: Řetězovka ($a = 1$, plná čára) jako aritmetický průměr hodnot funkcí e^x a e^{-x} (vlevo), řetízek prohnutý do tvaru řetězovky (vpravo)

[3)] V matematice řetězovka odpovídá grafu funkce hyperbolický kosinus

$$y = \cosh\frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right).$$

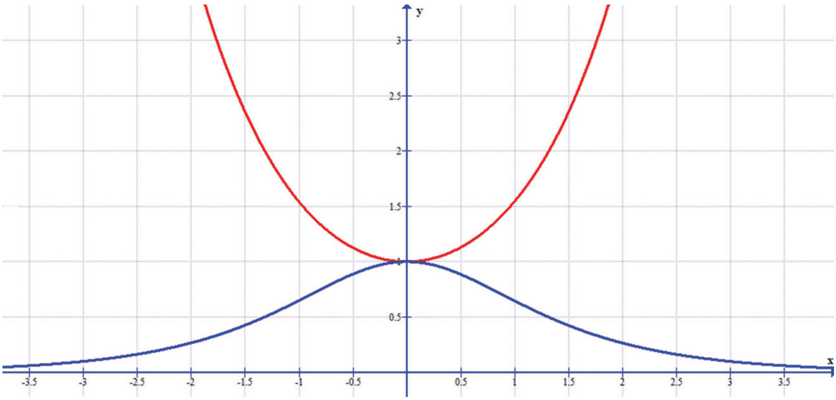
Rovnici nezávisle odvodili Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a Johann Bernoulli (1667–1748). Johann, který byl mladším bratrem Jacoba, problém údajně vyřešil během jediné noci. Vzhledem k nepříliš dobrým vztahům mezi bratry tak vyvolal značnou nelibost u Jacoba, neboť ten se sám problémem bez výsledku zabýval celý rok [5].

Aproximace velikosti plochy omezené grafem funkce

V této části se zaměříme na funkci

$$y = \frac{2}{\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{-x}}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x}, \tag{3}$$

která je harmonickým průměrem funkcí e^x a e^{-x}, tedy funkcí převrácené hodnoty k aritmetickému průměru hodnot funkcí e^x a e^{-x}. Graf funkce harmonického průměru společně s grafem řetězovky je znázorněn na obr. 3. Křivka harmonického průměru má zvonovitý tvar s maximální hodnotou v bodě $x = 0$. Na obou okrajích číselné osy se hodnoty funkce blíží 0.



Obr. 3: Aritmetický (řetězovka) a harmonický průměr hodnot funkcí e^x a e^{-x}

Na obr. 4 je vyznačena oblast, jejíž plochu budeme aproximovat. Křivku při aproximaci nahradíme úsečkami, které se při postupném zmenšování přírůstů hodnot na ose x k tvaru křivky stále více přimykají (obr. 5). Plochy použité k výpočtu mají tvar lichoběžníku s konstantní výškou i závisející na zvoleném dělení intervalu. Vzhledem k tomu, že funkce popsaná rovnicí (3) je sudá (souměrná podle osy y), stačí výpočet provést pro kladné hodnoty.

Postup výpočtu můžeme demonstrovat na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Při výpočtu obsahu plochy omezené funkcí (3) a osou x budeme postupně zkracovat dělení zvoleného intervalu (na polovinu).

$$S_1 = \left(\frac{2\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0+1} + \frac{2\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^2+1}\right)\cdot 1 \doteq 1{,}64805$$

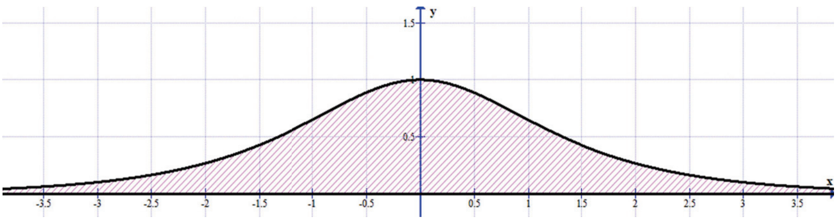
$$S_{0,5} = \left(\frac{2\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,5}}{\mathrm{e}^1+1} + \frac{2\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^2+1}\right)\cdot 0{,}5 \doteq 1{,}71085$$

$$S_{0,25} = \left(\frac{2\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,25}}{\mathrm{e}^{0,5}+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,5}}{\mathrm{e}^1+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,75}}{\mathrm{e}^{1,5}+1} + \frac{2\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^2+1}\right)\cdot 0{,}25 \doteq$$
$$\doteq 1{,}72639$$

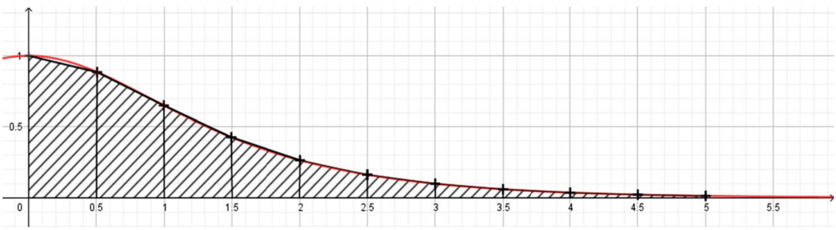
$$S_{0,125} = \left(\frac{2\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,125}}{\mathrm{e}^{0,25}+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,25}}{\mathrm{e}^{0,5}+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,375}}{\mathrm{e}^{0,75}+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,5}}{\mathrm{e}^1+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{4\mathrm{e}^{0,625}}{\mathrm{e}^{1,25}+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,75}}{\mathrm{e}^{1,5}+1} + \frac{4\mathrm{e}^{0,875}}{\mathrm{e}^{1,75}+1} + \frac{2\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^2+1}\right)\cdot 0{,}125 \doteq 1{,}73025$$

$$\vdots$$

$$S_i = i\cdot\left(\sum_{n=ki}^{1}\frac{4\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{2n}+1} - \frac{(\mathrm{e}+1)^2}{\mathrm{e}^2+1}\right),\ k\in\mathbb{Z},\ k\geq 0$$



Obr. 4: Plocha omezená grafem funkce určené rovnicí (3) a osou x



Obr. 5: Aproximace plochy omezené grafem funkce (3), znázorněno pro interval $\langle 0, 5\rangle$

Výpočet velikosti plochy pro interval $\langle -1, 1\rangle$ programem Graph dává hodnotu 1,731 54, tj. relativní chyba výpočtu pro $i = 0{,}125$ je menší než 0,1 %.[4)]

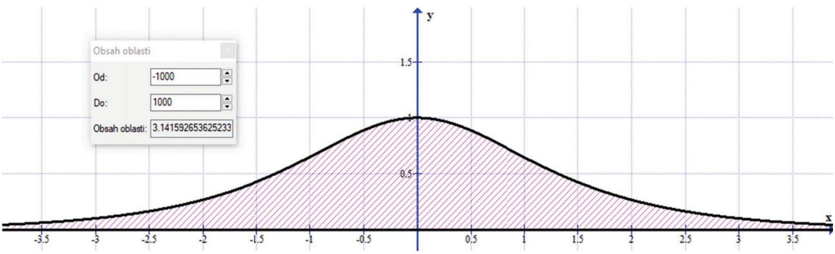
V další části rozšíříme výpočet na interval $\langle -10, 10\rangle$, tj.

$$S_i = i \cdot \Big(\sum_{n=ki}^{10} \frac{4\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{2n}+1} - \frac{(\mathrm{e}^{10}+1)^2}{\mathrm{e}^{20}+1} \Big),$$

kde $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Odpovídající velikosti ploch pro vybraná dělení včetně absolutních a relativních chyb jsou uvedeny v tabulce 1. Výsledky výpočtu uvedené v tabulce 1 se zřetelně blíží hodnotě čísla π (obr. 6), kde pro $i = 0{,}5$ činí relativní odchylka méně než 0,01 % (tab. 1).

Dělení intervalu (i)	**Plocha** (π)	**Absolutní odchylka**	**Relativní odchylka**
2,5	3,38872	+0,24713	+7,866 %
2,0	3,23246	+0,09087	+2,892 %
1,0	3,14212	+0,00053	+0,017 %
0,5	3,14145	−0,00014	−0,004 %

Tabulka 1: Aproximace plochy omezené grafem funkce (3) a osou x na intervalu $\langle -10, 10\rangle$, pro výpočet absolutní a relativní chyby použita hodnota $\pi \doteq 3{,}14159$



Obr. 6: Velikost plochy omezené grafem funkce určené rovnicí (3) a osou x

Jak dál? Další dělení (zjemňování) intervalu znamená na jedné straně postupné zpřesňování odhadu velikosti plochy a další přiblížení se hodnotě čísla π, na straně druhé opakované výpočty velikostí ploch se mohou

[4)] Program Graph je freeware, volně ke stažení např. `www.padowan.dk/download/`

stát časově značně náročnými. Zkusme ukázat možnost výpočtu hodnoty čísla π na intervalu $\langle -m, m\rangle$ pomocí programu SAS/STAT.[5] Pro sestavení programu použijeme rovnici

$$S_i = i \cdot \left(\sum_{n=ki}^{m} \frac{4\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{2n}+1} - \frac{(\mathrm{e}^m+1)^2}{\mathrm{e}^{2m}+1} \right), \; k \in \mathbb{Z},\; k \geq 0. \qquad (4)$$

Kód pro zápis výpočtu je poměrně jednoduchý, při výpočtu můžeme libovolně měnit parametry m, i (tab. 2).

```
data NumberPi;
e = constant("e");
i = 0.1;
m = 20;
r = m/i ;
sum = 0;
do k = 0 to r by 1;
   sum = sum + (4*e**(k*i))/(e**(2*k*i)+1);
   area = (sum - (e**(2*m)+2*e**m + 1)/(e**(2*m) + 1))*i;
output;
end;
run;
proc print data=NumberPi;
```

Pro uvedené hodnoty parametrů $i = 0{,}1$ a $m = 20$ nalezneme v záložce OUTPUT DATA hodnotu $\pi \doteq 3.1415926445$.

m	i	**Odhad** π	m	i	**Odhad** π	m	i	**Odhad** π
10	0,1	3,1414109026	20	0,1	3,1415926445	50	0,1	3,1415926536
	0,05	3,141411016		0,05	3,1415926449		0,05	3,1415926536
	0,01	3,1414110524		0,01	3,1415926453		0,01	3,1415926536

Tabulka 2: Odhad hodnoty čísla π pomocí SAS/STAT využitím rovnice (4)

[5] Oficiální stránky společnosti SAS: `www.sas.com/cs_cz/home.html`. Software lze pro výzkumné a studijní účely používat bezplatně, ke stažení zde: `www.sas.com/cs_cz/software/university-edition/download-software.html`. Na stránkách společnosti je uveden podrobný postup instalace softwaru. Řešení řady problémů softwarem SAS lze nalézt např. zde: `blogs.sas.com/content/iml/`.

Z výše uvedeného lze soudit, že vypočtená hodnota se bude tím více blížit číslu π, čím více se bude $i \to 0$ a $m \to \infty$. Takový výpočet ovšem náleží do sféry vyšší matematiky a vyžaduje znalost integrálního počtu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x = \pi.$$

Pokud učiníme v tomto místě malou historickou odbočku, pak můžeme dodat, že tímto úhelným kamenem obohatili matematickou analýzu dva velikáni matematiky přelomu 17. a 18. století, sir Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz. Tím se však pomyslně vracíme zpět, neboť oba se nikoli nepodstatným způsobem zapsali rovněž do historie zkoumání čísla π. Leibnizův vzorec zmiňuje v článku „Příběh jedné konstanty" T. Bártlová, Newton v roce 1665 objevil nekonečnou řadu

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\Big(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\times 2^5} - \frac{1}{28\times 2^7} - \frac{1}{72\times 2^9} - \dots\Big).$$

Závěr

V článku jsme uvedli možnost výpočtu přibližné hodnoty čísla π, vycházející z použití exponenciálních funkcí a harmonického průměru, tedy s využitím učiva střední školy. Zároveň byly v článku spojeny hned dvě nejdůležitější matematické konstanty – číslo π a Eulerovo číslo e.

Výpočet čísla π navržený Archimédem a rozvíjený dalšími generacemi matematiků vychází z použití opsaných a vepsaných mnohoúhelníků a využití exhaustivní (vyčerpávající) metody. Skutečností je, že takový postup je při grafickém provedení na jedné straně intuitivní (dává výpočet hodnoty čísla π do přímé souvislosti s délkou kružnice) a nabízí velmi dobrou představu podstaty a smyslu prováděných operací, na straně druhé však neposkytuje dostatečnou přesnost. Efektivnější je výpočet, nicméně i v tomto případě platí, že přibližování vypočtené hodnoty k hodnotě čísla π je relativně pomalé.

Aproximace hodnoty čísla π pomocí plochy způsobem uvedeným v článku nabízí postup, kde vypočtené hodnoty konvergují k hodnotě π rychleji a dále nás poměrně jednoduše přibližuje některým důležitým pojmům matematiky, jako je pojem limity funkce (zde reprezentován postupným rozšiřováním intervalu použitého k aproximaci) či přírůstku funkce (zde reprezentován postupným zkracováním dělení intervalu), které matematická analýza využívá v takových oblastech jako je diferenciální a zejména integrální počet. Problém popsaný v článku lze rovněž využít pro počítačové řešení. V článku byl jako příklad použit software SAS/STAT, nicméně nabízí se řada alternativ, např. Matlab, Octave apod.

Nemusíme se záměrně či vědomě zabývat matematikou a přesto můžeme v krajině narazit na objekty, jejichž tvar nám připomene křivku, o kterou jsme opřeli výpočet hodnoty čísla π (obr. 7). Ponecháme na rozvážení čtenáři, zda se jedná o pouhou tvarovou podobnost související s estetickou stránkou objektu, či tvar nejlépe vyhovující charakteru obvyklého využití tedy k přepravě nákladu na hřbetech soumarů, nebo praxí středověkých stavitelů osvědčený tvar mající pozitivní vliv na statiku takových staveb.

Obr. 7: Soumarský most ve Skotsku (The Old Packhorse Bridge) s grafem funkce podle rovnice (3) (upraveno podle [4])

Číslo π jistě nepřestane fascinovat zájemce o matematiku či specialisty v oboru teorie čísel ani v budoucnosti a jak jsme zmínili již v úvodu, každý rok řada příznivců slaví 14. březen jako Den pí.

Literatura

[1] Navarro, J.: *Tajemné π. Lze udělat kvadraturu kruhu?* Dokořán, Praha, 2018.

[2] Gielis, J.: *The Geometrical Beauty of Plants.* Atlantis Press, Paris, 2017.

[3] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Catenary. [online]. c2019 [cit. 9. 11. 2019]. Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary`

[4] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: The Old Packhorse Bridge, Carrbridge by Aviemore. [online]. c2019 [citováno 9. 11. 2019]. Dostupné z: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Old_Packhorse_Bridge,_Carrbridge_by_Aviemore._-_geograph.org.uk_-_58243.jpg`

[5] Bellos, A.: *Alex za zrcadlem. Jak se čísla odrážejí v životě a život v číslech.* Dokořán, Praha, 2016.

Příběh jedné konstanty

Tereza Bártlová, MFF UK Praha

V matematice nepracujeme často s konstantami, rozhodně ne tolik jako ve fyzice, zato však matematické konstanty nezřídka tvoří pilíř nějaké ucelené teorie. Geometrii vévodí jedna ze základních a nejstarších v matematice – konstanta π, jejíž hodnota je přibližně 3,14.

Už dávní myslitelé věděli, že číslo π úzce souvisí s vlastnostmi kruhu. Jeho přesné vyčíslení je však zaměstnávalo po celá tisíciletí, patrně už od doby, kdy se člověk poprvé pokusil nakreslit dokonalý kruh.

První, kdo se skutečně systematicky touto konstantou zabýval, byl *Archimédés ze Syrakus.* Pochopil, že hledaná konstanta souvisí s obvodem kruhu. V dnešním matematickém jazyce bychom tuto vlastnost mohli vyjádřit vztahem

$$o = 2 \cdot \pi \cdot r,$$

kde o vyjadřuje obvod kruhu a r značí jeho poloměr. Přesné vyčíslení obvodu kruhu však s sebou nese potíže, neboť je tvořen křivkou. Archimédés si uvědomoval, že je daleko jednodušší změřit délku úsečky než křivky, a tak problém zjednodušil. Místo toho, aby se pokoušel složitě měřit obvod kružnice, narýsoval dva mnohoúhelníky, mezi které kružnici „uvěznil“. Jeden mnohoúhelník byl do kružnice vepsaný a druhý kružnici obsahoval, neboli byl dané kružnici opsaný (obr. 1).