Učitel matematiky

Dalibor Gonda

Riešenie matematických úloh s kreativitou a porozumením

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 1, 12–28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148570

RIEŠENIE MATEMATICKÝCH ÚLOH S KREATIVITOU A POROZUMENÍM

Dalibor Gonda, Petr Emanovský

Matematiku možno považovať za vedu, ktorá má pomáhať pri riešení úloh z praxe. Rovnaký cieľ by malo mať aj vyučovanie matematiky, ktoré by sa naviac malo snažiť o rozvoj logického myslenia žiakov. V súčasnosti však do istej miery pokračuje odklon vo vyučovaní matematiky od tohoto cieľa. Potvrdzujú to aj slová Maryam Mirzakaniovej, držiteľky Fieldsovej medaily za rok 2015: „Široká priepasť medzi skutočnou a školskou matematikou tvorí jadro problému vo vzdelávaní. Verím, že keby na hodinách prichádzali študenti do kontaktu s pravou povahou matematiky, neprevládalo by všeobecné znechutenie a sklamanie z tohto predmetu." (Boalerová, 2016) Na hodinách matematiky sa v prevažnej miere riešia štandardné matematické úlohy. Sú to úlohy typu riešte rovnicu, vypočítajte objem, určte vzájomnú polohu priamok, načrtnite graf funkcie. V zadaní týchto úloh často absentuje akákoľvek motivácia a spojenie s praxou a nie je z neho jasné, prečo by sme sa vôbec mali s nejakým výpočtom trápiť. Takéto typy úloh prirodzene vedú k otázkam žiakov: Načo mi to bude? Je ťažké im vysvetliť, že riešenie rutinných úloh je nevyhnutné pre dokonalé zvládnutie výpočtových schopností nutných k riešeniu praktických problémov. Naviac sú spravidla všetky informácie potrebné k riešeniu úlohy uvedené v zadaní a úloha je zaradená do kapitoly, ktorej názov napovedá, ako sa asi bude úloha riešiť. Myslíme si, že nie len výber úloh, ale predovšetkým spôsob vyučovania matematiky vplýva na vnímanie a postoj žiakov k matematike. Podľa Devlina je matematika vnímaná študentmi ako predmet o výpočtoch, istých postupoch a pravidlách. (Devlin, 1997). Naproti tomu je matematika estetický, kreatívny a nebojme sa povedať aj krásny predmet.

Kreatívne myslenie a schopnosť riešiť úlohy reálneho života

Posledné testovanie PISA 2015 ukázalo, že najväčší problém žiakov je práve prepojenie vedomostí a zručností získaných počas vyučovania matematiky s praxou (PISA 2015). Preto je súčasným trendom, na ktorý by mal reagovať každý učiteľ matematiky, zaraďovať do výučby okrem rutinných cvičení tiež slovné úlohy, prípadne tzv. autentické úlohy. Jedná sa o úlohy vychádzajúce z kontextu reálneho sveta, ktoré sú zadané takým spôsobom, aby bol riešiteľ nútený najskôr rozpoznať problém, ktorý má riešiť a sám si uvedomiť, aké matematické poznatky má pri riešení aplikovať. Zvláštnu skupinu potom predstavujú tzv. CUN problémy (complex, unfamiliar, non-routine problems), ktoré predstavujú riešenie skutočného problému zo života vrátane zistení všetkých informácií potrebných k riešeniu (Mevarech & Kramarski, 2014). Jedná sa o úlohy, ktoré sú zadané viac či menej neurčito, čím dávajú väčšiu či menšiu mieru možností motivovať žiakov k bádateľskému prístupu k riešeniu úloh na hodinách matematiky (Hošpesová, 2015). Školská prax je však taká, že na hodinách matematiky sa riešia prevažne matematické úlohy, zamerané na nácvik základných matematických zručností. Pri tomto nácviku si žiaci vo veľkej miere osvojujú matematiku vo forme matematických algoritmov. Pod pojmom algoritmus rozumieme súbor presne stanovených pravidiel určujúcich následnosť vykonávania konečného počtu elementárnych operácií, ktorý zabezpečuje vyriešenie všetkých úloh daného typu v konečnom čase. V ideálnom prípade by sa algoritmy nemali podávať žiakom v hotovom tvare, ale žiaci by ich mali sami heuristicky objaviť. Po nájdení algoritmu by si ho žiaci mali osvojiť a naučiť sa ich používať pri riešení iných úloh rovnakého typu (Květoň I, 1990). Algoritmy v sebe skrývajú výhodu aj nevýhodu zároveň. Výhodou je, že žiaci sa naučia veľmi úspešne riešiť dané typy úloh tým, že danému zadaniu úlohy priradia príslušný výpočtový algoritmus. V ich mysli sa vytvára schéma: zadanie + algoritmus = výsledok. V tom istom spočíva aj nevýhoda. Žiaci miesto riešenia úloh zadaniu priraďujú výpočtový algoritmus. Rovnakým spôsobom si potom hlavne na stredných a vysokých školách osvojujú aj metódy riešenia úloh. Metódy riešenia úloh slúžia ako návod na riešenie rôznych typov úloh podobne ako algoritmy. Ale majú v sebe oveľa väčší potenciál. Môžu byť vyučované a žiakmi osvojované ako metódy rozmýšľania pri danom type úlohy. Inak povedané primárnym cieľom vyučovania rôznych metód riešenia úloh nebude rozvoj matematických schopností ale rozvoj kreatívneho myslenia. Nesnažíme sa žiaka naučiť vyriešiť daný typ úloh, ale sa snažíme žiaka naučiť tvoriť vlastné riešenia úlohy. Žiak sa nebude učiť opakovať postup čo videl na hodine matematiky, ale bude tvoriť vlastné riešenia úlohy na základe vlastných vedomostí a zručností. Pri takomto ponímaní vyučovania matematiky aj matematické úlohy plnia primárny cieľ matematiky: rozvíjaním kreatívneho myslenia rozširovať schopnosť človeka riešiť úlohy reálneho života.

Porozumenie vo vyučovaní matematiky

Schopnosť samostatne tvoriť riešenie úlohy vyžaduje správne porozumenie matematickým pojmom. Problematikou porozumenia vo výuke matematiky sa zaoberá množstvo významných didaktikov matematiky (Sierpinska, 1994, Ma, 1999). Títo autori sa snažia zodpovedať otázku ak učiť matematiku, aby jej žiaci porozumeli a aké sú hlavné príčiny neporozumenia matematike. Jednou z podstatných príčin tohoto neporozumenia je podľa súčasnej didaktiky matematiky skutočnosť, že výuka matematiky je často založená na odovzdávaní hotových poznatkov a ich memorovanie, zatiaľ čo by mala vychádzať z tvorivého poznávacieho procesu s aktívnou účasťou učiacich sa subjektov (Polák, 2016). Podľa knihy (Polák, 2016) je vhodné rozlišovať tri typy porozumenia matematike: Porozumenie matematickým pojmom, porozumenie matematickým vetám a porozumenie matematickým metódam. Pritom pre porozumenie všetkým matematickým poznatkom je dôležité vedieť chápať súvislosti a vzťahy medzi nimi a predovšetkým dokázať vedomosti používať k riešeniu matematických problémov. Vedľajším produktom tohto prístupu k výučbe matematiky je tiež rozvoj komunikačných schopností žiakov. Riešenie neštandardných úloh vedie k zásadnej zmene prístupu k matematickej komunikácii v triede. Žiaci sú nútení spoločne zdieľať svoje nápady, diskutovať o riešení problémov, jasne a presvedčivo vyjadrovať svoje myšlienky. Nové poznatky a metódy riešenia úloh nemusia znamenať, že žiak si potrebuje v „hlave“ vytvoriť nový priečinok, ktorého obsahom budú poznatky nového tematického celku. Nové poznatky môžu byť implementované do myšlienkového sveta žiaka. K tomu je potrené vytvorenie prepojenia nových poznatkov s už získanými. Jedná sa o vytvorenie nových konceptov v súlade s už vytvorenými konceptami v mysli žiaka. Myslíme si, že motiváciou k vytváraniu nových konceptov je uvedomenie si žiaka, že s doterajšími poznatkami nevystačí. Preto je vhodné žiaka postaviť pred riešenie úlohy, na ktorej vyriešenie bude potrebovať nové poznatky alebo novú metódu riešenia. Ak sa jedná o novú metódu riešenia odporúčame pri jej vyučovaní maximálne využiť už získané vedomosti a zručnosti žiakov. Neponúkať novú metódu ako hotový produkt, ktorý žiak prevezme od učiteľa. Učiteľ ako moderátor vedia žiaka cestou objavovania novej metódy riešenia. Využíva pritom predovšetkým otázky, ktoré u žiaka aktivujú už získané vedomosti potrebné na vytvorenie novej metódy riešenia. Táto predstava je celkom v súlade s hlavnými smermi súčasnej teórie poznania. Napríklad všeobecne uznávaná teória generického modelu prof. Hejného pokladá za kľúčový pojem poznávacieho procesu tzv. generický model, čo je, stručne povedané, poznanie toho, čo spája všetky predošlé jednotlivé skúsenosti (izolované modely) (Hejný, 2014). Podobné myšlienky obsahuje teória reifikácie (Sfard, 1991), ktorá ukazuje, ako sa z operacionalistického (procesuálneho) poznania tvorí poznanie štrukturálne (koncept). Za zmienku stoja i ďalšie podobne založené teórie – teória proceptu (Gray & Tall, 1991) a teória relačného a inštrumentálneho porozumenia (Skemp, 1976).

Vyučovanie novej metódy riešenia úloh odporúčame realizovať v nasledujúcich etapách:

1. Potrebnosť novej metódy
2. Vytvorenie novej metódy – základný algoritmus metódy
3. Porozumenie metóde
4. Využitie metódy

Tento navrhovaný spôsob v sebe zahŕňa prirodzený spôsob osvojovania si nových poznatkov. Prvá etapa je etapou motivácie k hľadaniu spôsobu riešenia, keď si žiaci uvedomia, že existujú úlohy, ktoré vyžadujú novú metódu riešenia. Nová metóda môže byť vytvorená z už získaných vedomostí, čo je obsahom druhej fázy. Tretia fáza je fázou hlbšieho porozumenia objavenej metóde, čo je základným predpokladom je efektívneho využívania pri riešení úloh. V štvrtej fáze žiaci objavujú univerzálnosť metódy. Univerzálnosť v tom zmysle, že jej využiteľnosť prekračuje hranice úloh, pri ktorých bola objavená. Vyššie uvedené myšlienky ilustrujeme na metóde nulových bodov.

Vyučovanie metódy nulových bodov s porozumením

S metódou nulových bodov sa žiaci po prvýkrát stretnú pri riešení nerovníc s neznámou v menovateli. Cieľom nasledujúcich riadkov nie je vysvetľovať metódu nulových bodov. Skôr je našou ambíciou ponúknuť v istom zmysle iný, možno aj nový, pohľad na vyučovanie metódy nulových bodov. V centre nestojí cieľ, ako vyriešiť niektoré úlohy metódou nulových bodov. V centre sa nachádza samotná metóda nulových bodov a jej postupné osvojovanie si žiakmi. Nami navrhovaný spôsob vyučovania metód nulových bodov kopíruje Bloomovu taxonómiu cieľov. Žiaci si najskôr osvoja metódu na úrovni zapamätania si základných krokov metódy (2. fáza). Neskôr si danú metódu osvoja na úrovni porozumenia (3. fáza). Následne sa zvýši osvojenie si metódy na úroveň aplikácie (4. fáza). Práve vo vyučovaní novej metódy riešenia úloh v postupnom zvyšovaní úrovne jej osvojenia si žiakmi objaviteľskou metódou vidíme nový prístup k vyučovaniu metódy nulových bodov a aj k vyučovaniu iných metód riešenia úloh. Žiaci nie sú pasívnymi prijímateľmi, ale aktívnymi tvorcami metódy. Zároveň sa týmto spôsobom rozvíja silná vnútorná motivácia. Ak žiak niečo objavil, je prirodzene motivovaný skúmať a lepšie rozumieť objavenému, aby svoj objav dokázal efektívnejšie využívať. Uvádzané príklady slúžia skôr ako kulisa vyučovania metódy nulových bodov. Našou snahou je aj metodické spracovanie takto cieleného vyučovania metódy nulových bodov.

1. etapa: Potreba metódy nulových bodov

Rovnicu či nerovnicu považujeme za matematický model zadania slovnej úlohy. Preto schopnosť riešiť všetky typy rovníc a nerovníc je základom matematických schopností. Vo väčšine učebníc sa rovnice a nerovnice vyučujú oddelene. Najskôr sa vyučujú rovnice a neskôr nerovnice rovnakého typu. Teda po riešení rovníc s neznámou v menovateli sa začínajú žiaci učiť riešiť nerovnice s neznámou v menovateli. V doterajšom priebehu vyučovania získali žiaci zhruba nasledovné vedomosti o riešení nerovníc: Nerovnice sa riešia pomocou rovnakých ekvivalentných úprav ako rovnice. V prípade, ak sa nerovnica násobí prípadne delí záporným číslom, znak nerovnosti sa zmení na opačný. Ako motivácia k potrebe hľadať nový spôsob riešenia môže slúžiť úloha nasledovného typu: Na množine $\mathbb{R}$ riešte nerovnicu $\frac{2x+3}{x-1} < 1$. Analogický postup s riešením rovníc naráža na vážny problém. Na odstránenie zlomku v nerovnici je potrebná úprava: násobenie oboch strán nerovnice výrazom $(x-1)$. To by znamenalo vyriešiť úlohu dvakrát. Najskôr pre prípad $(x-1) > 0$ a následne pre prípad $(x-1) < 0$. Tento spôsob riešenia je však málo efektívny v prípade ak úloha obsahuje viacej výrazov s neznámou v menovateli. Preto pred nami stojí úloha nájsť efektívnu metódu riešenia úloh daného typu.

2. etapa: Vytvorenie metódy nulových bodov

Po úvodnej motivačnej fáze pristúpime k tvorbe efektívnejšieho spôsobu riešenia zadanej úlohy.

Príklad 1. Na množine $\mathbb{R}$ riešte nerovnicu $\frac{2x+3}{x-1} < 1$.

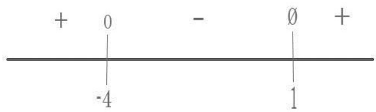
Tvorba riešenia. Našou úlohou je nájsť také hodnoty neznámej, aby po dosadený bol zlomok na ľavej strane menší ako jedna. V princípe sa jedná o porovnávanie zlomku s jednotkou. Zlomok je menší ako jedna ak je záporný (na túto možnosť často žiaci zabúdajú). Kladný zlomok je menší ako jedna keď je jeho čitateľ menší ako menovateľ. Porovnávať náš zlomok na ľavej strane nerovnice by bol pomerne zdĺhavý postup riešenia. Existuje však číslo, s ktorým sa zlomky porovnávajú oveľa jednoduchšie. Tým číslom je nula. Pri porovnávaní zlomku s nulou stačí vedieť či je zlomok kladný alebo záporný. Zároveň je vytvorenie nuly na jednej strane nerovnice jednoduchá úprava nerovnice. Máme za sebou prví krok tvorby riešenia príkladu. Po jeho realizácii riešime nerovnicu

$$\frac{x+4}{x-1} < 0 \tag{1}$$

Po tejto úprave stanovíme nový čiastkový cieľ nášho riešenia. V podstate porovnávame zlomok s nulou. Preto nám stačí určovať výsledné znamienko výrazu $\frac{x+4}{x-1}$. Čiže naším čiastkový cieľom je určiť pre aké hodnoty premennej x je kladný a pre aké hodnoty záporný. Najskôr určíme výsledné znamienko výrazu pre jednotlivé hodnoty neznámej x a až potom z nich vyberieme tie hodnoty, ktoré zodpovedajú našej nerovnici (2). Do teraz sme využívali už získané vedomosti. Riešenie úlohy dospelo k bodu, v ktorom je potrebné zavedenie nového pojmu: nulový bod. Nulový bod možno zadefinovať ako sú hodnotu premennej x, pre ktorú, zvlášť čitateľ a zvlášť menovateľ zlomku na ľavej strane nerovnice nadobúda hodnotu nula. Určíme ich na základe riešenia rovníc $x + 4 = 0$; $x - 1 = 0$. Nulové body sú NB: -4; 1. Tieto nulové body rozdelili množinu reálnych čísel na tri podmnožiny – intervaly. Pre každý z intervalov platí: Výraz $\frac{x+4}{x-1}$ je na celom intervale kladný alebo záporný. Ďalej platí, že na susedných intervaloch má výraz $\frac{x+4}{x-1}$ rôzne výsledné znamienka. Z uvedeného vyplýva, že na určenie výsledného znamienka výrazu $\frac{x+4}{x-1}$ na jednotlivých intervaloch stačí poznať výsledné znamienko pre jednu konkrétnu hodnotu neznámej x rôznej od nulových bodov. Do výrazu na ľavej strane nerovnice dosadíme ľubovoľné číslo rôzne od nulových bodov. Ak nie je nulovým bodom nula, dosádzame za premennú číslo *nula*. Po dosadení čísla nula za premennú x má výraz $\frac{x+4}{x-1}$ hodnotu -4.

Výsledné znamienka výrazu $\frac{x+4}{x-1}$ môžeme znázorniť s využitím „upravenej číselnej osi“ , ktorú vytvoríme nasledovne. Najskôr na číselnej osi (zo spodnej strany) vyznačíme nulové body.

(Žiaci často automaticky ako prvú znázornia na číselnej osi nulu aj keď nie je nulovým bodom. Je však veľmi dôležite aby na číselnej osi boli *iba* nulové body). Nad číselnú os v časti prislúchajúcej intervalu, z ktorého bolo dosadené číslo nula napíšeme znamienko mínus. Znamienka na ostatných intervaloch doplníme bez výpočtov, dodržiac zásadu striedajúcich sa znamienok. Nad nulový bod „z čitateľa“ doplníme 0 čo znamená, že výraz $\frac{x+4}{x-1}$ v danom bode nadobúda hodnotu 0. Nad nulový bod „z menovateľa“ doplníme znak $\emptyset$, čo znamená, že výraz $\frac{x+4}{x-1}$ v tomto bode nie je definovaný.



Obr. 1: Upravená číselná os.

Výsledné riešenie príkladu určíme z upravenej číselnej osi, v závislosti od znamienka nerovnosti. V našom prípade je konečným riešením $x \in (-4, 1)$.

Po vyriešení úlohy zhrnieme jednotlivé kroky metódy nulových bodov.

a) Anulovanie pravej strany rovnice
b) Zjednodušenie výrazu na ľavej strane nerovnice
c) Určenie nulových bodov
d) Upravená číselná os
e) Určenie výsledku

V rámci tejto etapy je vhodné zaradiť pár jednoduchých príkladov zameraných na lepšie osvojenie si základných krokov novej metódy riešenia úloh.

3. etapa: Porozumenie metóde nulových bodov

Za nosnú myšlienku metódy nulových bodov možno považovať porovnávanie zlomku s nulou. Preto prvé kroky riešenia vedú k transformácii zadanej úlohy na úlohu, kde je potrebné porovnať zlomok s nulou. Vhodnými otázkami overíme, nakoľko si žiaci osvojili nasledovný poznatok z učiva základnej školy: Ak čitateľ a menovateľ zlomku majú rovnaké výsledné znamienko, tak zlomok je kladný, ak majú znamienko rozdielne zlomok, je záporný. Správne aplikovanie tejto myšlienky vedie k porozumeniu metóde nulových bodov a tiež k jej efektívnejšiemu používaniu. K správnej aplikácii nosnej myšlienky je nevyhnutné porozumenie „fungovaniu" nulových bodov. Nulový bod pre daný výraz v princípe rozdelí množinu reálnych čísel (číselnú os) na tri podmnožiny. Na jednej z podmnožín nadobúda len kladné hodnoty na ďalšej len záporné hodnoty. Tretia podmnožina je tvorená len nulovým bodom (nulovými bodmi) a výraz na tejto množine nadobúda hodnotu 0. Napríklad výraz $x-5$ má nulový bod 5. Na množine $M_1 = (-\infty; 5)$ nadobúda záporné hodnoty, na množine $M_2 = (5; \infty)$ nadobúda kladné hodnoty a na množine $M = \{5\}$ nadobúda hodnotu 0. Teda môžeme zjednodušene povedať, že z rôznych strán nulového bodu na číselnej osi je rôzne znamienko daného výrazu. Ak je výraz v súčinovom alebo podielovom tvare nulové body jednotlivých členov súčinu alebo podielu tvoria nulové body celkového výrazu. V tomto kontexte sa možno stretnúť aj s výrazom, ktorý nadobúda pre všetky $x \in \mathbb{R}$ nezáporné hodnoty. Je to výraz typu $(x + a)^2$ s dvojnásobným nulovým bodom $-a$. Ak je tento výraz súčasťou iného výrazu, napríklad $\frac{(x-9)(x+1)^2}{(x-4)(x+5)}$, nemá vplyv na výsledné znamienko daného výrazu a preto nulový bod výrazu $(x+1)^2$ môžeme označiť ako „zbytočný" nulový bod a na upravenej číselnej osi ho neznázorníme. Pre získanie konečného riešenia musíme ešte raz venovať pozornosť „zbytočnému" nulovému bodu a na základe znaku nerovnosti osobitne určiť či patrí alebo nepatri do množiny riešenia zadanej úlohy.

Na ilustráciu práce so zbytočným nulovým bodom odporúčame vyriešiť úlohu typu:
Na množine $\mathbb{R}$ riešte nerovnicu $\frac{(x-9)(x+1)^2}{(x-4)(x+5)} > 0$.

4. etapa: Aplikácia základných myšlienok metódy pri riešení úloh

Po zvládnutí základného algoritmu a porozumeniu metóde nulových bodov odporúčame zamerať vyučovanie na jej aplikáciu v iných typoch príkladov, ako sú tie pri ktorých žiaci vnikali do jej tajov. Tu sa ponúka možnosť vyskúšať schopnosť žiakov aplikovať metódu nulových bodov pri riešení nerovníc s parametrom. Rovnice a nerovnice s parametrom predstavujú tradične náročné učivo, ktoré často pôsobia žiakom problémy. Ako ukazujú výsledky niektorých výskumov, jednou z hlavných príčin týchto problémov je nesprávne pochopenie samotného pojmu parameter a častá zámena tohto pojmu s pojmem neznáma, príp. premenná. Výskumy zaoberajúce sa tím, ako žiaci chápu pojem premenná (MacGregor, Stacey, 1993, Bednarz, Kieran, Lee, 1996, Trigueros, Ursini, 1999, Bardini, Radford, Sabena, 2005), ukazujú, že premenná je žiakmi často chápána ako „potenciálne určené“ číslo. Vidí v nej teda dočasne neznáme číslo, ktoré bude v určitom okamihu určené. Odtiaľ zrejme pramení časté zamieňanie pojmu premenná s pojmom neznáma, ktorým rozumieme neznáme číslo, ktoré určujeme pri riešení rovnice alebo nerovnice. (Schoenfeld, Arcavi, 1988, Radford, 1996) Článok (Bardini, Radford, Sabena, 2005) obsahuje okrem analýzy týchto kognitívnych ťažkostí tiež ukážku možného zavedenia pojmu premenná a parameter pomocou postupného zovšeobecňovania algebrických formúl priradených jednoduchým geometrickým obrazcom. Parameter je tu chápaný ako nový algebraický objekt – neznámy, ale v danom okamihu pevne zvolený prvok z množiny premenných hodnôt. Z tohto pohľadu má zrejme pojem parameter bližšie k pojmu premenná než k pojmu neznáma. Niektorí autori však chápu parameter skôr ako špeciálny prípad pramennej. Napríklad v publikácii (Květoň, 1999b) autor uvádza celkom sedem rôznych prípadov výskytu písmen vo význame čísel v rámci školskej algebry. Jedným z týchto prípadov je i písmeno vo význame parametra, ktorý je tu chápaný ako premenná, ktorú v danom konkrétnom prípade považujeme za konštantu, ale dopredu predpokladáme jeho premennosť pre niektoré hodnoty. Autor ukazuje, že väčšinou sú tieto rozdiely len formálne a na uvedené prípady je možné pozerať ako na špeciálne prípady premennej líšiacej sa len oborom premennosti. Na strednej škole sa v matematike s pojmom parameter stretávam hlavne v súvislosti s riešením rovníc s parametrom, ktoré predstavujú hádam najnáročnejší druh rovníc preberaných na tomto stupni. Najväčším problémom býva porozumenie samotnej podstate a funkcii parametra. Z metodického hľadiska sa jedná o dlhodobú úlohu. Nie je možné žiakom jednorazovo vysvetliť, čo je parameter, pokiaľ s ním nemajú žiadne skúsenosti. (Hejný, 1990) Jedna z metód umožňujúcich žiakom pochopiť funkciu parametra je založená na postupnom dosadzovaní konkrétnych hodnôt za parameter a riešenie množstva rovníc, ktoré dostaneme týmto dosadením. Častým riešením takýchto úloh by mali niektorí žiaci sami začať prejavovať snahu zefektívniť výpočty využitím obecného „parametrického" zápisu rovnice, tj. objaviť pre seba pojem parameter. Detailnejšie je táto metóda popísaná v (Hejný, 1990). Táto predstava o spôsobe zavedenia pojmu parameter a parametrická rovnica je celkom v súlade s teóriou o duálnej povahe matematických pojmov (Sfard, 1991). Podľa tejto teórie môžeme na jednotlivé matematické pojmy pozerať dvojakým spôsobom: štrukturálne, ako na objekty (abstraktné štruktúry), alebo operacionálne, ako na procesy. Príklady z histórie matematiky i výsledky didaktických výskumov pritom svedčia o tom, že ako z hľadiska fylogenézy tak z hľadiska ontogenézy v procese formovania pojmov spravidla operacionálnej predstavy predchádzajú vytvoreniu pojmu ako objektu. V prípade rovníc s parametrom žiaci najprv pristupujú k týmto rovniciam operacionálne, manipuláciou s konkrétnymi hodnotami parametra a postupne sa dopracujú k tomu, že chápu rovnicu s parametrom ako objekt reprezentujúci celú triedu rovníc.

Príklad 2. Pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ je každé $x \in \mathbb{R}$ riešením nerovnice

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4} < 0.$$

Riešenie. Výraz $x^2 - 8x + 20$ nemá nulové body a na základe znamienka pred absolútnym členom vieme, že nadobúda kladné hodnoty pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Ak majú byť riešením zadanej nerovnice všetky reálne čísla, musí byť výraz v menovateli zlomku nerovnice záporný pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Využijúc základné myšlienky metódy nulových bodov uvažujeme nasledovne. Potrebujeme, aby výraz $ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4$ boľ „stále" záporný. Prostredníctvom parametra a najskôr zabezpečíme, aby daný výraz mal konštantné výsledné znamienko. Na ďalší krok riešenia využijeme funkciu nulových bodov. Ak daný výraz má mať rovnaké výsledné znamienko pre všetky prípustné hodnoty neznámej x, tak nemôže mať nulové body (okrem „zbytočných“ nulových bodov). To znamená, že kvadratická rovnica

$$ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4 = 0 \tag{2}$$

nemôže mať riešenie na množine R. Táto podmienka je splnená, ak diskriminant rovnice (2) je záporný. Takto získame nerovnicu

$$4(a+1)^2 - 4a(9a+4) < 0.$$

Riešením tejto nerovnice, ktorú po úpravách riešime metódou nulových bodov, je $K_1 = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$. V ďalšom kroku zabezpečíme pomocou parametra a, aby výsledné znamienko výrazu bolo záporné. Menovateľ zlomku v zadanej nerovnici $ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4$ je kvadratický trojčlen s parametrom a. Pre $a \in K_1$ má konštantné výsledné znamienko pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Z metódy nulových bodov vieme, že po dosadení ľubovoľného čísla za premennú x do daného trojčlena zistíme výsledné znamienko pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Ďalej vieme, že po dosadení nuly do kvadratického trojčlena je výsledné znamienko trojčlena zhodné so znamienkom pred absolútnym členom. Aby bolo výsledné znamienko celého trojčlena záporné, musí byť splnená podmienka

$$9a + 4 < 0.$$

Riešením tejto nerovnice je $K_2 = \left(-\infty; -\frac{4}{9}\right)$. Na základe predošlých úvah musí parameter a spĺňať obe podmienky. Úlohe teda vyhovujú všetky hodnoty parametra $a \in K_1 \cap K_2 = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Slovné úlohy vedúce k riešeniu nerovníc

Napriek tomu, že sa stále hovorí o potrebe učiť matematiku novým spôsobom, pravda je taká, že väčšina súčasných učebníc matematiky obsahuje stále prevažne úlohy na precvičovanie výpočtových algoritmov. V lepšom prípade nájdeme v učebnici slovné úlohy vedúce k riešeniu lineárnych či kvadratických rovníc, so slovnými úlohami vyžadujúcimi riešenie nerovníc je to však podstatne horšie. Slovné úlohy, pri ktorých riešení by žiaci dospeli k rovnici či nerovnici s parametrom, sa v učebniciach prakticky nevyskytujú. Nasledujúcu úlohu sme našli v učebnici matematiky pro 1. ročník gymnázia (Šedivý, J. a kol., 1978):

Príklad 3. Mužstvo v lige hádzanej sa môže zachrániť pred zostupom z ligy, ak v odloženom zápase dosiahne aspoň nerozhodného výsledku a celkového pomeru gólov lepší ako 4 : 9. Zatiaľ má pomer gólov 84 : 203. Určte všetky remízové výsledky, ktoré zaistia mužstvu účasť v ďalšom ročníku ligy.

Riešenie. Ak prípadný nerozhodný výsledok označíme $x : x$, bude mať mužstvo po tomto zápase pomer gólov $(84+x) : (203+x)$. Aby sa mužstvo zachránilo v lige, musí byť tento pomer väčší ako 4 : 9. Budeme preto riešiť nerovnicu $\frac{84+x}{203+x} > \frac{4}{9}$. Tuto nerovnici ľahko upravíme na tvar $\frac{5x-56}{9x+1827} > 0$. Nulové body jsou -203 a 11,2. Zlomok nadobúda kladné hodnoty pre $x < -203$ a pre $x > 11{,}2$. Pre našu úlohu majú zmysel len prirodzené hodnoty $12, 13, 14, \ldots$ Mužstvu teda zaistí zotrvanie v lige každý nerozhodný výsledok $x : x$, kde $x \geq 12$.

Záver

Častokrát sú žiaci obrazom svojho učiteľa. Inak povedané učia sa tak, ako ich učí učiteľ. Ak im učiteľ sprístupňuje nové poznatky či metódy ako hotový produkt, tak si v pamäti vytvoria nové políčko označené názvom nového poznatku. V prípade vyučovania novej metódy riešenia úloh takéto sprístupňovanie poznatkov na vyučovaní matematiky má vážne nedostatky. Jedným z nich je izolovanosť nových poznatkov v myšlienkovom svete žiakov. Nová metóda riešenia je doplnením riešiteľských schopností žiakov a mala by byť zosúladená s doterajším poznaním žiaka. Ďalším nedostatkom sprístupňovania metódy ako hotového produktu je to, že žiaci ju vnímajú ako kompaktný, nemenný celok a tak sa danú metódu aj snažia používať pri riešení úloh. Nové metódy riešenia vznikali ako doplnenie predošlých metód, aby bolo možno riešiť nové úlohy. Myslíme si, že rovnakým spôsobom by mali byť aj vyučované na hodinách matematiky. To znamená, že počas vyučovania novej metódy riešenia úloh učiteľ využíva už získané vedomosti a zručnosti žiakov a až keď riešenia dospeje k bodu, kde sú potrebné nové poznatky preberie iniciatívu. Žiaci si uvedomia, že vyučovaná metóda nie je pre nich nová ako celok ale len jej istá časť. Tým je vytvorený prienik novej metódy s doterajším poznaním žiaka. Nový poznatok získaný počas vyučovania metódy zapadne do jeho myšlienkového sveta a jednotlivé kroky vyučovanej metódy vníma ako skladačku vlastných poznatkov. Takto sa stáva nová metóda pružným riešiteľským nástrojom žiaka a podporuje jeho kreativitu. Veď nová metóda bola vytvorená počas hľadania riešenia úlohy a on na tvorbe tejto metódy spolupracoval. Takéto vyučovanie má silné prepojenia s praxou. Hoci žiaci riešia matematické úlohy, učia sa ich riešiť samostatne na základe efektívneho využívania vlastných poznatkov a schopností. To považujeme za veľký prínos pre praktický život. Učia sa, že úlohy a problémy, ktoré ich čakajú v živote je potrebné riešiť logicky správnou kombináciou vlastných vedomostí. Zároveň sa u nich rozvíja schopnosť celoživotného vzdelávania. Budú naučení, že ak pri riešení úlohy dospejú k bodu kde nestačia ich vedomosti, je potrebné si tieto vedomosti doplniť. Preto nebudú vyhľadávať celkové riešenia úloh, ale len čiastkové poznatky potrebné k pokračovaniu riešenia úlohy. V neposlednom rade, akoto ilustrujeme na príklade 2, porozumenie základným myšlienkam metódy umožňuje jej aplikovanie v rôznych oblastiach života. Dokonca sa aplikujú v analogickom ponímaní nie celé metódy, ale len základné myšlienky. Napríklad v ekonomike je tiež pojem nulový bod. Je definovaný ako bod zvratu (z ang. break-even point), pri ktorom sa celkové náklady rovnajú celkovým výnosom. Aj v matematike aj v ekonomike má nulový bod ten istý význam, je založený na tej istej myšlienke. Je to bod, pri ktorom dochádza k významnej zmene, k zmene od kladného k zápornému alebo opačne. Myslíme, že správne vyučovanie matematiky výrazne posilňuje sebavedomie žiakov a kvalitne ich pripravuje na život. Tým sa napĺňa hlavný cieľ matematiky – pomáhať pri riešení úloh a aj vyučovania matematiky – rozvíjať osobnosť žiaka.

Literatura

[1] Akgün, L. & Őzdemir, M. E. (2006). Students' understanding of the variable as general number and unknown: a case study. *The Teaching of Mathematics*, 9(1), 45–51.

[2] Bardini, C., Radford, L. & Sabena, C. (2005). Struggling with Variables, Parameters, and Indeterminate Objects or How to Go Insane in Mathematics. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (129–136). Melbourne: PME.

[3] Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht /Boston/London: Kluwer.

[4] Boalerová, J. (2015). *Matematické cítenie*. Bratislava: Tatran.

[5] Devlin, K. (1997). *Mathematics: The science of patterns: The search for order in life, mind and the universe*. Scientific American Library: New York.

[6] Gray, E. M. & Tall D. O. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In *Proceedings of PME XIII* (Vol. II, 72–79). Assissi: PME.

[7] Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN.

[8] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. Stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[9] Hoffman, B. (2010). „I think I cat, but Im afraid to try“: The role of self-efficaly beliefs and mathematics anxiety in mathematics problem-solving efficiety. *Learning and Individual Differences*, 20(3), 276–283. doi: 10.1016/j.lindif.2010.02.001

[10] Květoň, P. (1986). *Kapitoly z didaktiky matematiky II.* Ostrava: Pedagogická fakulta.

[11] Květoň, P. (1990a). *Kapitoly z didaktiky matematiky I.* Ostrava: Pedagogická fakulta.

[12] Květoň, P. (1990b). *Kapitoly z didaktiky matematiky III.* Ostrava: Pedagogická fakulta.

[13] Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Mahwah – New Jersey: LEAP.

[14] MacGregor, M. & Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. In *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (181–188). Japan: University of Tsukuba, PME.

[15] Mevarech, Z. & Kramarski, B. (2014). Critical Maths for Innovative Societies: The Role of Metacognitive Pedagogies. *OECD Publishing.* `http://www.oecdilibrary.org/education/critical-maths-forinnovative-societies_9789264223561-en`

[16] Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky.* Plzeň: Fraus.

[17] Polák, J. (2016). *Didaktika matematiky II.* Plzeň: Fraus.

[18] Quinlan, C. (2001). From Geometric Patterns to Symbolic Algebra is Too Hard For Many. In *24th Annual MERGA Conference*, Sydney (426–433).

[19] Radford, L. (1996). The roles of Geometry and Arithmetic in the development of Elementary Algebra. In N. Bednarz et al. (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (39–53). Dordrecht: Kluwer.

[20] Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237–268.

[21] Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.

[22] Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F. & Tichá, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, 6(1), 91–122.

[23] Sfard, A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.

[24] Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420–427.

[25] Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London-Bristol: The Falmer Press.

[26] Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.

[27] Šedivý, J. a kol. (1978). *Matematika pro první ročník gymnázia.* Praha: SPN.

[28] Trigueros, M. & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling? In *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (273–280). Haifa, Israel: PME.

Abstract

The article deals with mathematical education based on using solutions of suitable problems which support the development of creative thinking and correct understanding of mathematical concepts. The authors emphasise an importance of developing pupils' creative thinking which will enable them to be successful in problem solving. This approach to problem solving is illustrated on solutions to inequalities without and with parameters (using zero points method).

Dalibor Gonda
Žilinská univerzita v Žilině
Univerzitná 8215/1
010 26 Žilina
e-mail:
daliborgonda@gmail.com

Petr Emanovský
Univerzita Palackého Olomouc
17. listopadu 12
779 00 Olomouc
e-mail:
petr.emanovsky@upol.cz