A. Jančařík; Tomáš Kepka

Aritmetika I – Harmonická čísla

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 1, 29–37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148571

ARITMETIKA I – HARMONICKÁ ČÍSLA

Antonín Jančařík, Tomáš Kepka

Autoři článku se zabývají otázkou, jak přispět k rozvoji aritmetických dovedností žáků. V článku je představen problém harmonických čísel, který byl poprvé formulován a řešen ve 14. století našeho letopočtu. Autoři ukazují, jak lze tento problém zařadit do výuky matematiky na druhém a třetím stupni škol, naznačují interdisciplinární souvislosti propojující matematiku, historii, fyziku a hudební nauku. Současně ukazují, jak se historie problému dále vyvíjela až po v současnosti stále otevřené problémy z teorie čísel.

Aritmetické dovednosti neboli schopnost počítat s čísly, jsou jednou ze základních dovedností, které si žáci osvojují v hodinách matematiky již od prvního ročníku základních škol. Aritmetika má své nezastupitelné místo při budování kognitivních struktur. Při počítání s čísly se žáci učí nejen provádět matematické operace – úkony, které je možné nahradit kalkulátorem či počítačem, ale učí se také soustředit na problém, udržovat pozornost a v neposlední řadě objevovat vztahy a zákonitosti mezi čísly, se kterými pracují. S asociativitou, komutativitou a mnohými dalšími vlastnostmi číselných oborů se žáci seznámí právě prostřednictvím celé řady příkladů. Přesto, že se aritmetika může zdát méně významnou v porovnání s jinými oblastmi „vyšší“ matematiky, nabízí mnoho zajímavých problémů, na které ani moderní matematika neumí nalézt odpověď. Při řešení aritmetických problémů se žáci také poprvé setkávají s náznaky postupů, které budou v budoucnu využívat při sestavování důkazů.

Cílem tohoto článku je představit několik problémů z teorie čísel, které lze využít v hodinách matematiky a pomocí nichž lze nejenom procvičovat aritmetické dovednosti, ale také ukázat žákům historické souvislosti či některé důkazové techniky. Na zvolených úlohách lze také demonstrovat, že od výsledků dosažených v dávné minulosti je jen malý krůček k problémům, se kterými si moderní matematika nedokáže poradit, a to ani za pomoci nejvýkonnějších počítačů. Ukazuje se, že i v rámci aritmetiky můžeme objevovat nové a doposud nevyřešené záhady světa čísel.

Harmonická čísla

Philippe de Vitry, nazývaný též Vitriaco (1291–361) patřil mezi nejvýznamnější hudební teoretiky středověku. Svým spisem *Ars Nova* položil základ novodobé hudební notace. Ve svém díle se zaměřoval na různé aspekty teorie hudby, čímž se dostal i ke studiu matematiky. V rámci ní se věnoval především studiu aritmetiky a oblasti, kterou bychom dnes nazvali teorií čísel. Zaměřil se na přirozená čísla, která obsahují ve svém prvočíselném rozkladu pouze čísla 2 a 3. Tato čísla nazval Vitracio **harmonickými**. Proč jej ale tato čísla zajímala?

Vitracio nepřímo navazoval na pythagorejské přesvědčení, že hudba je součástí aritmetiky (více viz např. (Godwin, 1992) či (Ferreira, 2002)). Propojení čísel a tónů je zjevné např. u strunných nástrojů, kde jsou jasné matematické vztahy mezi tóny a délkami strun. Vitracio samozřejmě používal i známé pozorování pythagorejců, že lidskému sluchu jsou nejpříjemnější tóny v poměru malých přirozených čísel ($2:1$, $3:2$ či $4:3$). Ve všech těchto poměrech se vyskytují pouze mocniny čísel dva a tři. Odtud je jen krok k harmonickým číslům, která jsou vhodná pro dělení intervalů v těchto poměrech.

Mezi prvními deseti přirozenými čísly nalezneme hned sedm harmonických čísel – 1, 2, 3, 4, 6, 8 a 9. Postupně je však jejich výskyt řidší a řidší. Je pouze 20 harmonických čísel menších než 100 a 40 harmonických čísel menších než 1000.

Nalézt všechna harmonická čísla menší než 10, 100 a 1000 je úkol, který mohou plnit i žáci základní školy. Zatímco při hledání harmonických čísel menších než 10 vystačí s pouhým ověřováním číslo po číslu, při hledání větších harmonických čísel je již vhodné použít sofistikovanější postup. Tedy neověřovat pro každé číslo, zda je harmonické, ale harmonická čísla přímo konstruovat. Při hledání harmonických čísel se žáci učí systematicky pracovat, ale zároveň si utvrzují i znalosti o rozkladech přirozených čísel a procvičují práci s mocninami.

Asi nejpřehlednějším řešením daného problému je řešení pomocí tabulky, kde v záhlaví řádků a sloupců jsou mocniny 2 a 3 menší než 1000 a v tabulce pak jejich příslušné součiny (viz tab. 1).

1	3	9	27	81	243	729
2	6	18	54	162	486	
4	12	36	108	324	972	
8	24	72	216	648		
16	48	144	432			
32	96	288	864			
64	192	576				
128	384					
256	768					
512						

Tab. 1: Harmonická čísla menší než 1000

Vzdálenosti mezi harmonickými čísly

Při sledování harmonických čísel si můžeme položit otázku, jak daleko od sebe mohou dvě po sobě jdoucí harmonická čísla být. Na první pohled vidíme, že nejkratší možnou vzdálenost mají dvojice z první desítky. Tam nalézáme hned čtyři dvojice po sobě jdoucích harmonických čísel – $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ a $(8,9)$. Na druhou stranu největší vzdálenost, a to 108, mají mezi sebou poslední dvě harmonická čísla z našeho výčtu 864 a 972. Zajímavou otázkou, která s těmito intervaly souvisí, je problém, zda existují i další dvojice po sobě jdoucích harmonických čísel. Mezi harmonickými čísly menšími než 1000 žádnou takovou dvojici nenalézáme, to však neznamená, že se nějaká dvě větší harmonická čísla nemohou znovu potkat. Byť předložený problém vypadá na první pohled složitě, odpověď na položenou otázku lze nalézt pomocí jednoduchých úvah, srozumitelných i žákům základních a středních škol.

Sousedící harmonická čísla

Je poměrně zřejmé, že pokud máme dvě po sobě jdoucí harmonická čísla, nemohou být obě současně dělitelná ani dvěma, ani třemi. Proto musí být jedno z nich mocninou dvou a druhé mocninou tří. Na první pohled již ale není zřejmé, proč by se nějaké vyšší mocniny 2 a 3 nemohly opět lišit pouze o jednu, jako 8 a 9.

Geršomův problém

Řešení uvedeného problému nalezl již středověký židovský učenec a matematik Levi ben Geršom (latinsky Gersonides), známý také jako RaLBaG. Ten dokázal, že 8 a 9 jsou jedinými vyššími mocninami čísel 2 a 3, které po sobě bezprostředně následují (Peterson, 2000).

Důkaz Geršomova tvrzení, který dále uvedeme, není obtížný a může být bez obtíží zařazen do učiva střední školy, popřípadě jako rozšiřující učivo i v posledních ročnících školy základní.

Situaci, kdy je jedno z čísel 4, snadno vyloučíme, protože ani jedno z čísel 3 a 5 není vyšší mocninou čísla 3. Předpokládejme proto, že jedním z čísel v požadované dvojici je třetí, nebo vyšší mocnina čísla dvě. Potom pro odpovídají k-tou mocninu čísla 3 z dvojice musí platit, že buď číslo 8 dělí $3^k + 1$, nebo číslo 8 dělí $3^k - 1$.

Zbytek $3^2 = 9$ po dělení 8 je 1. Proto pokud umocňujeme číslo 3, dostáváme postupně čísla ve tvaru $8n + 3$ a $8n + 1$. Vidíme, že $3^k + 1$ má po dělení 8 buď zbytek 2, nebo 4. Není tudíž dělitelné číslem 8 a nemůže vystupovat v naší dvojici. Stejně tak liché mocniny čísla 3 zmenšené o 1 mají po dělení osmi vždy zbytek 2 a nejsou osmi dělitelné.

Zbývá poslední případ a tím je situace, kdy je ve dvojici mocnina dvou bezprostředně následována sudou mocninou 3. Pak $2^a = 3^{2b} - 1 = \left(3^b - 1\right)\left(3^b + 1\right)$ a obě po sobě jdoucí sudá čísla $3^b - 1$ a $3^b + 1$ musí být mocninami čísla 2. To je ovšem možné pouze tehdy, když $b = 1$ a jedná se o již zmiňovanou dvojici čísel 8 a 9. Tím je důkaz tvrzení dokončen.

Po sobě jdoucí mocniny prvočísel

Obdobně lze ukázat, že není možné, aby po sobě bezprostředně následovaly mocniny čísel 2 a 5 či 2 a 11, popřípadě lze tvrzení zobecnit i na dvojice ve tvaru 2 a $8k \pm 3$. Tím se dostáváme k otázce, zda může nastat situace, kdy se nějaké dvě vyšší mocniny dvou prvočísel liší o jedna, různá od nám již známého případu čísel 8 a 9.

Catalanova domněnka

V roce 1844 belgický matematik Eugène Charles Catalan vyslovil hypotézu, že čísla 8 a 9 jsou jediné mocniny přirozených čísel, které po sobě bezprostředně následují, jinými slovy, že 2^3 a 3^2 jsou jediným přirozeným nenulovým řešením diofantické rovnice $a^p - b^q = 1$. Catalan zobecnil naši otázku z dvojice prvočísel na dvojice všech přirozených čísel. Ovšem ani jemu, ani několika generacím matematiků po něm se odpověď nepodařilo nalézt.

Řešení tohoto problému je velmi náročné. Historie jeho zrodu je ale také nesmírně zajímavá. Již v 18. století, tedy před tím, než Catalan vyslovil svoji hypotézu, dokázal Leonard Euler, že diofantická rovnice $a^2 - b^3 = \pm 1$ má v kladných číslech řešení pouze pro dvojice $(3, 2)$ a $(2, 3)$. To je samozřejmě pouze dílčí výsledek k předloženému problému. Až v roce 1977 se podařilo dokázat, že pokud má Catalanova rovnice další řešení, je jich jen konečně mnoho (Tijdeman, 1976). Následně byl stanoven horní odhad, jak velké může takové řešení být. I když se jej podařilo postupně snižovat, stále byl příliš velký na to, aby bylo možné existenci či neexistenci řešení ověřit s pomocí výpočetní techniky. V roce 2002 se pak nezávisle na dosavadních postupech podařilo problém vyřešit rumunskému matematikovi Predovi Mihăilescu (Mihăilescu, 2004). Na internetu lze nalézt jeho zápisky z přednášky pro Kuwait foundation (Mihăilescu, 2003), kde důkaz zabírá necelou stránku, využívá však odkazů na další věty a teorie.

Posloupnosti mocnin přirozených čísel

Ještě před tím, než se podařilo dokázat, že kromě 8 a 9 již neexistuje žádná po sobě jdoucí dvojice přirozených čísel, se objevil jiný související výsledek. Hyyrő a Makowski (Ribenboim, 1996) dokázali, že neexistuje žádná posloupnost tří po sobě jdoucích mocnin přirozených čísel. Není však znám žádný důkaz tohoto tvrzení, který by bylo možné předložit žákům středních škol.

Lze však snadno ukázat, že neexistuje posloupnost čtyř po sobě jdoucích mocnin přirozených čísel. Důkaz je elementární. Pokud vezmeme dvě po sobě jdoucí sudá čísla, jsou obě mocninami sudých čísel a proto dělitelná čtyřmi, což není možné. Nelze proto, aby čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla byla současně mocninami přirozených čísel. Dokonce to není ani možné pro trojici po sobě jdoucích čísel, z nichž první je sudé.

Fermatova-Catalanova rovnost

Diofantické rovnice s mocninami představují z pohledu matematiky velmi zajímavé téma. Již na základní škole se žáci seznamují s pythagorejskými trojicemi, která jsou řešením rovnice $a^2 + b^2 = c^2$. Na druhou stranu Fermatovo tvrzení, že diofantická rovnice $a^n + b^n = c^n$ nemá pro $n > 2$ řešení, patřilo mezi nejobtížnější otevřené problémy po několik století. Catalanova domněnka, že rovnost $a^p - b^q = \pm 1$ má pouze jedno řešení, stojí někde mezi těmito dvěma problémy. Přesto ji lze ještě jedním způsobem zobecnit a propojit i s rovností známou z Velké Fermatovy věty.

Takzvaná Fermatova-Catalanova rovnost je rovnost ve tvaru $a^n + b^m = c^k$, kde a, b, c jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla, a pro exponenty n, m, k platí, že součet jejich převrácených hodnot je menší než 1. Doposud je známo jen deset řešení uvedené rovnosti (řešení Catalanovy rovnosti je jedním z nich) a je domněnka, že řešení této rovnosti existuje jen konečně mnoho. Pro úplnost zde těchto deset doposud objevených rovností uvádíme: $1^m + 2^3 = 3^2$, $2^5 + 7^2 = 3^4$, $13^2 + 7^3 = 2^9$, $2^7 + 17^3 = 71^2$, $3^5 + 11^4 = 122^2$, $33^8 + 1\,549\,034^2 = 15\,613^3$, $1414^3 + 2\,213\,459^2 = 65^7$, $9262^3 + 15\,312\,283^2 = 113^7$, $17^7 + 76\,271^3 = 21\,063\,928^2$, $43^8 + 96\,222^3 = 30\,042\,907^2$.

Ukázka k Velké Fermatově větě

Předchozí problematiku si ještě ilustrujme následujícím snadným podpřípadem Velké Fermatovy věty: Dokažme, že $a^n + (a+1)^n \neq$ $\neq (a+2)^n$ pro všechna přirozená čísla a ,n, $n > 2$. Důkaz tohoto tvrzení je pěknou aplikací binomické věty a vlastností dělitelnosti. Opakovaně budeme používat tvrzení, že a dělí $(a+b)^n$, právě tehdy, když a dělí b^n, které je přímým důsledkem binomické věty.

Je-li n liché číslo, pak číslo $a^n+(a+1)^n$ dává po vydělení číslem $(a+1)$ stejný zbytek jako zbytek $a^n = ((a+1)-1)^n \equiv (-1)^n \pmod{a+1}$, ovšem číslo $(a+2)^n$ dává po vydělení číslem $(a+1)$ zbytek 1 (opět použijeme $(a+2)^n = ((a+1)+1)^n \equiv 1 \pmod{a+1}$). Rovnost levé a pravé strany rovnice může nastat pouze v případě, že $a+1 = 2$, snadno ověříme, že rovnost $1^n + 2^n = 3^n$ nemá pro žádné n řešení.

Je-li n sudé, provedeme obdobnou úvahu, ovšem pro dělitelnost obou stran rovnice čísly a a $a+2$. Zjišťujeme, že číslo a musí dělit číslo $(a+2)^n-(a+1)^n \equiv 2^n–1 \pmod{a}$, současně číslo $a+2$ musí dělit $((a+2)-2)^n+((a+2)-1)^n \equiv 2^n+1 \pmod{a+2}$. Jak ale pokračovat dále? Pomůžeme si vhodně volenými úpravami celého výrazu. Pišme:

$$
\begin{aligned}
(a+2)^n - a^n &= ((a+1)+1)^n - ((a+1)-1)^n = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (a+1)^i - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (a+1)^i = \\
&= 2 \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2j+1} (a+1)^{2j+1} = \\
&= 2(a+1) \left(n + \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2j+1} (a+1)^2 j \right)
\end{aligned}
$$

Odtud snadno vidíme, že kdyby číslo $(a+1)^2$ dělilo $(a+2)^n -$ $- a^n$, tak by číslo $a+1$ muselo dělit číslo $2n$, čili by musela platit nerovnost $2 \leq a+1 \leq 2n$. Na druhou stranu stejně tak snadno nahlédneme, že musí platit $(a+2)^n - a^n > 2n(a+1)^{n-1}$.

Z nerovnosti $(a+1)^n \geq (a+2)^n - a^n$ tak plyne, že $a+1 > 2n$. Je zřejmé, že $(a+2)^n - a^n \neq (a+1)^n$, což jsme chtěli dokázat.

Samozřejmě, $a^0+(a+1)^0 = 2 \neq 1 = (a+2)^0$ pro každé nenulové přirozené číslo a. Obdobně $a^1 + (a+1)^1 = 2a+1 \neq a+2 = (a+ + 2)^1$ pro každé celé číslo $a \neq 1$. Ovšem pro druhé mocniny řešení existují, například $3^2 + 4^2 = 5^2$. Je známo, že jsou-li a, n, m, k taková přirozená čísla, že $a^n + (a+1)^m = (a+2)^k$, tak buďto $a = 1$, $m = 3$, $k = 2$, n libovolné a nebo $a = 3$, $n = m = k = 2$.

Závěr

Problémy z teorie čísel lákají k řešení matematiky po staletí. Příkladem může být Velká Fermatova věta, která sváděla k řešení a hledání protipříkladu celé generace matematiků (důkaz byl publikován v roce 1995 (Wiles, 1995), ohlášen o rok dříve).

V článku představujeme několik problémů, které sice nejsou tak slavné, jako problém Fermatův, ale jsou neméně zajímavé a svádějící k řešení. Jsme přesvědčeni, že je vhodné a žádoucí žákům ukazovat nejen výsledky po staletí osvědčené, ale zároveň je seznamovat se světem matematiky, který má v sobě mnoho neprozkoumaných a doposud neodhalených zákoutí. V teorii čísel je od snadno řešitelných problémů k problémům otevřeným často jen malý krůček. Seznámení se s doposud nevyřešenými problémy může změnit pohled žáků na matematiku, vzbudit jejich zájem a v případě žáků talentovaných je i přimět k tomu, aby se matematikou hlouběji zabývali. Aritmetické problémy, jejichž ukázky v článku uvádíme, jsou k tomu vhodným nástrojem.

Literatura

[1] Ferreira, M. P. (2002). Proportions in ancient and medieval music. In G. Assayag H. G. Feichtinger & J. F. Rodrigues (Eds.), *Mathematics and Music* (1–25). Berlin: Springer.

[2] Godwin, J. (1992). *The Harmony of the Spheres: The Pythagorean Tradition in Music.* Inner Traditions/Bear & Co.

[3] Madachy, J. S. (1979). *Madachy's Mathematical Recreations.* New York: Dover.

[4] Mihăilescu, P. (2003). On Catalan's Conjecture. *Kuwait Foundation Lecture 30 – April 28.* Dostupné z https://www.dpmms.cam.ac.uk/seminars/Kuwait/abstracts/L30.pdf.

[5] Mihăilescu, P. (2004). Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 572, 167–195.

[6] Peterson, I. (2000). *MathTrek: Zeroing In on Catalan's Conjecture.* Dostupné z https://www.sciencenews.org/article/zeroing-catalans-conjecture-0.

[7] Ribenboim, P. (1996). Catalan's Conjecture. *American Mathematics Monthly*, 103, 529–538.

[8] Tijdeman, R. (1976). On the Equation of Catalan. *Acta Arithmetic*, 29, 197–209.

[9] Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, 141(3), 443–551.

Abstract

The authors of the paper focus on the issue of how the development of pupils' arithmetical skills can be supported. The paper presents the problem of harmonic numbers, which was first posed and solved in the 14th century. The authors show how this problem may be included in mathematics lessons. They also indicate its cross curricular links to history, physics and music. At the same time the authors point out that the history of this problem is not closed and develops to often still open problems in number theory.

Antonín Jančařík
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1

Tomáš Kepka
Katedra algebry
Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Sokolovská 49/83
186 00 Praha 8