Jaroslav Seibert

Fibonacciova čísla jako inspirace pro učitele

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 1, 51–59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148573

FIBONACCIOVA ČÍSLA JAKO ZDROJ INSPIRACE PRO UČITELE

Jaroslav Seibert

Zřejmě nejvýznamnější evropský matematik středověku Leonardo z Pisy (přibližně 1170–1240), více známý pod přezdívkou Fibonacci (tzn. syn Bonacciův), se zapsal do dějin matematiky především tím, že seznámil Evropu s indicko-arabskou poziční desítkovou soustavou. Přitom „nula“ u něho vystupuje již jako skutečné číslo. Kromě toho obsahuje Leonardova stěžejní kniha Liber abaci (1202) také řešení řady elementárních problémů, včetně tzv. úlohy o králících, která vede na posloupnost celých čísel $\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$. Roku 1643 A. Girard jako první uvedl rekurentní definici této posloupnosti v současné podobě. Ve druhé polovině 19. století francouzský matematik E. Lucas zkoumal některé číselně teoretické vlastnosti členů této posloupnosti. Byl to právě on, který na počest Leonarda zavedl pojmenování Fibonacciova posloupnost a pro její členy název Fibonacciova čísla.

V českých časopisech zaměřených na školskou matematiku se čas od času také objevují články věnované těmto číslům z různých úhlů pohledu, velice často v souvislosti s geometrickými interpretacemi Fibonacciových čísel a vztahů mezi nimi. Jako poslední negeometrický příspěvek v tomto časopise je zřejmě článek Fibonacci a jeho čísla (Jarošová, 2008), který pojednává o vazbě Fibonacciových čísel k Pascalovu trojúhelníku.

Přesto je možné konstatovat, že na středních školách v některých zemích (zvláště v USA) bývá Fibonacciovým číslům a jejich různým zobecněním věnována větší pozornost než u nás. Svědčí o tom i skutečnost, že v časopisech, které se zaměřují na středoškolskou matematiku, se poměrně často objevují příspěvky s touto problematikou, někdy psané i samotnými studenty, například v časopise *The Mathematics Teacher.* Z odborně matematického pohledu se stala Fibonacciova čísla a s nimi související problémy regulérní součástí teorie čísel. Dokladem toho je fakt, že v roce 1963 byla v USA založena organizace Fibonacci Association, která od tohoto roku vydává specializovaný časopis *The Fibonacci Quarterly.* Navíc zmíněná asociace pravidelně po dvou letech pořádá prestižní mezinárodní konferenci *Applications of Fibonacci Numbers.*

Knižní publikace o Fibonacciových číslech se častěji objevují teprve v posledních letech. Dlouhou dobu jedinou monografií o Fibonacciových číslech byla útlá knížka N. N. Vorobjeva, kterou do češtiny přeložil v roce 1952 významný český matematik akademik E. Čech (Vorobjev, 1952). Další tři nejznámější monografie pocházejí z USA. První z nich vydal V. E. Hoggatt (Hoggatt, 1967), druhou pak S. Vajda (Vajda, 1989). Do současnosti zřejmě nejobsáhlejší a z hlediska poznatků i nejucelenější je monografie autora T. Koshy (Koshy, 2001). Význam Koshyho práce je o to větší, že v knize lze nalézt kromě ryze matematických poznatků i řadu modelových situací a problémů, ve kterých hrají významnou roli právě Fibonacciova čísla. Řada těchto situací je popsaná i v Hoggattově práci.

Jen v krátkosti můžeme připomenout například uplatnění Fibonacciových čísel v botanice, v souvislosti se stavbou některých částí rostlin, stromů nebo jejich plodů. Jedná se kupříkladu o jisté druhy květin, květy slunečnic, plody ananasu, borové šišky, květní úbory artyčoků apod. (např. Koshy, 2001: s. 16–25). Z aplikací v chemii zmiňme alespoň vztah Fibonacciových čísel k atomovým číslům inertních plynů, k vlnové délce spektrálních čar v Balmerově sérii nebo k topologickému indexu parafinů a cykloparafinů (cykloalkanů). Z fyzikálních problémů pak jmenujme hlavně uplatnění Fibonacciových čísel při řešení některých elektrických sítí (např. Koshy, 2001: s. 43–49).

Zajímavé, i když z pohledu matematika již z valné části uměle vytvářené, jsou vazby Fibonacciových čísel v hudbě a poezii. Na druhé straně není pochyb o jejich uplatnění ve výtvarném umění a architektuře. Především vliv „zlatého řezu“ na kompozice obrazů a soch, případně architektonických prvků, je nepopiratelný a v literatuře velmi detailně popsaný a zhodnocený.

V neposlední řadě je třeba zdůraznit i vazby na řešení problémů ekonomické povahy. Například Koshy připomíná problém čištění odpadních vod, který studoval R. A. Deninger na Univerzitě v Michiganu v roce 1972. Jednoznačně nejvýraznější stopou, kterou Fibonacciova čísla zanechala v ekonomických vědách, je tzv. Elliotův vlnový princip. V třicátých letech 20. století R. N. Elliot zkoumal výkyvy na kapitálovém trhu v USA. V roce 1939 formuloval výsledky své analýzy jako teoretický princip, který byl ekonomickou veřejností přijatý a dále rozvíjený. Podrobnější vysvětlení může najít čtenář např. v (Koshy, 2001) a tam citované literatuře.

Je zřejmé, že velice častý výskyt Fibonacciových čísel ve velmi různorodých situacích a často překvapivých souvislostech je do značné míry vyvolaný jednoduchým a navíc snadno aplikovatelným rekurentním předpisem.

Základní vlastnosti Fibonacciových čísel

Fibonacciova posloupnost $\{F_n\}$ je posloupnost celých čísel, která je dána rekurentně předpisem $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro libovolné přirozené číslo n a počátečními členy $F_1 = F_2 = 1$. V řadě úvah se ukázalo rozumné používat základní rekurentní předpis i pro nekladné hodnoty indexu n. Pak lze snadno zjistit, že platí $F_0 = 0$, $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$. Tak jsou Fibonacciova čísla definovaná pro každou celočíselnou hodnotu indexu n.

Při zkoumání vlastností Fibonacciových čísel je vhodnější užívat jejich funkční předpis. Tento předpis poprvé odvodil A. de Moivre v roce 1718. Po více než století ho znovuobjevil roku 1843 francouzský matematik J. Binet, po němž je příslušná formule pojmenovaná.

Binetův vztah má tvar

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \text{ kde } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618,\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong 0{,}618$$

jsou iracionální čísla, přitom α je číslo známé jako konstanta zlatého řezu. Tento vzorec lze odvodit různými způsoby. Z matematického hlediska je asi nejpůsobivější získat vztah řešením základní Fibonacciovy rekurence jako homogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Pro konstanty α, β platí zřejmé vztahy

$$\alpha + \beta = 1, \alpha - \beta = \sqrt{5}, \alpha\beta = -1.$$

Pro usnadnění práce s Fibonacciovými čísly bylo vytvořeno několik modelů, které vycházejí z reálných situací. Při hledání vhodných modelů se ukazuje mnohdy efektivnější posunout kladné hodnoty indexu n o jedničku. Znamená to volit $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, což vede v Binetově vzorci ke tvaru $F_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$. V následujících úlohách uveďme alespoň dva nejčastěji připomínané modely použitelné pro kladné hodnoty n, viz např. (Vilenkin, 1977) nebo (Calda, 1996).

Úloha 1. Určeme počet různých způsobů a_n, jak vyjít schodiště o n schodech, vynecháme-li při každém kroku nejvýše jeden schod.

Řešení. Zřejmě $a_1 = 1 = F_1$, $a_2 = 2 = F_2$. Nechť je nyní $n > 2$. Množinu všech způsobů, jak vyjít schodiště, lze rozložit do dvou disjunktních tříd podle toho, zda šlápneme na první schod, nebo ne. Užití kombinatorického pravidla součtu pak bezprostředně vede ke vztahu $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. To je však Fibonacciova rekurence, a proto $a_n = F_n$ pro všechna přirozená n.

Úloha 2. Určeme počet různých způsobů b_n, jak vydláždit chodbu o rozměrech $2 \times n$ dlaždicemi o rozměrech 1×2 (při stejných jednotkách délky).

Řešení. Snadno si dovedeme představit, že zde $b_1 = 1 = F_1$, $b_2 = 2 = F_2$. Je-li $n > 2$, množinu všech možných vydláždění chodby rozložíme do dvou disjunktních tříd podle způsobu položení první (krajní) dlaždice. Odtud ihned získáme rekurentní rovnost $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, což opět znamená, že $b_n = F_n$ pro každé kladné celé číslo n.

Ukázka techniky důkazů identit

Důkazy matematických vět (tzn. ověřování pravdivosti výroků o matematických objektech) je nezbytnou součástí každé matematické teorie. V poslední době se od provádění důkazů stále více ustupuje nejen na středních školách, ale i na řadě škol vysokých, kde se matematické disciplíny vyučují, zvláště pak na školách technického zaměření. Tento trend se do jisté míry týká i fakult vzdělávajících učitele matematiky. Jedním z důvodů tohoto jevu je zřejmě často abstraktní podoba důkazů, která je pro řadu studentů obtížná a od zvládání základních důkazových technik je přímo odrazuje. Při dokazování vlastností Fibonacciových čísel lze volit mezi různými formami důkazu, zvláště nenásilné je pak využití vhodného modelu. Vše budeme ilustrovat na případu následující identity, pro kterou uvažujeme Fibonacciovu posloupnost s počátečními členy $F_0 = 1$, $F_1 = 1$. Jedná se o ekvivalentní vyjádření identity 5.44 z Koshyho monografie, kterou první dokázal Mana v roce 1969.

Věta. Pro libovolná přirozená čísla k, n platí $F_{k+n} = F_kF_n + F_{k-1}F_{n-1}$.

Důkaz 1. Přímý důkaz užitím Binetova vzorce.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $k \geq n$. Pravou stranu identity lze upravit takto

$$
\begin{aligned}
P &= F_kF_n + F_{k-1}F_{n-1} = \\
&= \frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta} = \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\big(\alpha^{k+n+2} - \alpha^{k+1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^{k+1} + \beta^{k+n+2} + \\
&\qquad + \alpha^{k+n} - \alpha^k\beta^n - \alpha^n\beta^k + \beta^{k+n}\big)
\end{aligned}
$$

Dále s využitím rovnosti $\alpha\beta = -1$ platí

$$\begin{aligned}
P = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big(&\alpha^{k+n+2} - (-1)^{n+1}\alpha^{k-n} - (-1)^{n+1}\beta^{k-n} + \\
&+ \beta^{k+n+2} + \alpha^{k+n} - (-1)^{n}\alpha^{k-n} - (-1)^{n}\beta^{k-n} + \beta^{k+n}\Big) = \\
= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}&\left(\alpha^{k+n+2} + \beta^{k+n+2} + \alpha^{k+n} + \beta^{k+n}\right) = \\
= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}&\left(\alpha^{k+n+1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \beta^{k+n+1}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right) = \\
= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}&\left(\alpha^{k+n+1}(\alpha-\beta) + \beta^{k+n+1}(\beta-\alpha)\right) = \\
= \frac{\alpha^{k+n+1} - \beta^{k+n+1}}{\alpha-\beta}& = F_{k+n}.
\end{aligned}$$

Důkaz 2. Důkaz matematickou indukcí podle proměnné k při pevně zvoleném n.

Pro $k = 1$ tvrzení zřejmě platí, protože $F_{1+n} = F_1F_n + F_0F_{n-1} = F_n + F_{n-1}$. Obdobně pro $k = 2$ dostáváme $F_{2+n} = F_2F_n + F_1F_{n-1} = 2F_n + F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_n = F_{n+1} + F_n$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla menší nebo rovná libovolnému $k \geq 2$, a dokážeme, že tvrzení platí i pro $k + 1$.

Postupně platí

$$\begin{aligned}
F_{k+1}F_n + F_kF_{n-1} &= (F_k + F_{k-1})\,F_n + (F_{k-1} + F_{k-2})\,F_{n-1} = \\
&= F_kF_n + F_{k-1}F_{n-1} + F_{k-1}F_n + F_{k-2}F_{n-1} = \\
&= F_{k+n} + F_{k-1+n} = F_{k+1+n}
\end{aligned}$$

a důkaz je uzavřený.

I když oba předchozí důkazy jsou postaveny na pouhé manipulaci s příslušnými výrazy, je pro jejich provedení třeba určité zběhlosti ve formálním uvažování.

Důkaz 3. Při důkazu využívajícím „schodišťový“ model Fibonacciových čísel vystačíme pouze s kombinatorickým pravidlem součtu.

Množinu všech výstupů po schodišti s $(k+n)$ schody rozložíme do dvou disjunktních tříd podle toho, jestli se při výstupu postavíme na k-tý schod, nebo ne. Odtud podle kombinatorického pravidla součinu okamžitě plyne dokazovaná identita.

Z dokázané identity lze jako přímé důsledky získat snadno další vztahy pro Fibonacciova čísla. Například volba $k = n$ vede k identitě $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n}$ nebo volba $k = n+1$ po jednoduché úpravě k identitě $F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n+1}$.

Navíc technikou užití vhodného modelu Fibonacciových čísel se dají dokázat i matematicky cennější rovnosti, jako je například vztah Fibonacciových čísel k číslům kombinačním a podobně. Čtenář si sám může vyzkoušet užití různých důkazových technik na jednom z nejužitečnějších vztahů pro Fibonacciova čísla, tzv. Cassiniho identity uvedené v následující úloze. Vztah odvodil roku 1680 francouzský matematik italského původu G. D. Cassini a znovuobjevil ho v roce 1753 Skot R. Simson. Tato identita je například matematickým základem známého paradoxu o přeměně čtverce na pravoúhlý trojúhelník zdánlivě stejného obsahu.

Úloha 3. Pro každé přirozené číslo n platí $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$, je-li opět $F_0 = 1$, $F_1 = 1$.

Zde je ale třeba při užití „schodišťového“ modelu úvahu zřejmě vést v několika krocích. Lze přitom vhodným způsobem rozložit do disjunktních tříd množinu všech výstupů po schodišti o $2n$ schodech podle toho, zda se při výstupu postavíme na n-tý schod, resp. $(n-1)$-ní schod, nebo ne. Odsud plyne, že pro sousední přirozené hodnoty n se výraz na levé straně Cassiniho identity liší pouze ve znaménku. Potom stačí vypočítat například $F_1F_3 - F_2^2 = -1$, čímž důkaz uzavřeme.

Pro důkaz Cassiniho identity je snad i názornější použít upravený „dlaždicový“ model. Vzhledem k tomu, že je přitom nutné pracovat souběžně se dvěma chodbami, lze zjednodušit model v ekvivalentním vyjádření tak, že chodbu o rozměrech $1 \times n$ pokrýváme dlaždicemi o rozměrech 1×1 a 1×2. Více detailů, včetně samotného důkazu Cassiniho identity, lze najít v (Benjamin & Quinn, 2003), z toho příslušná úvaha je dostupná i na Internetu.

Závěr

Fibonacciova čísla a čísla obdobného typu, například tzv. Lucasova čísla, jsou typickou ukázkou přístupné matematické teorie, která poskytuje učitelům možnost ukázat svým žákům aplikační uplatnění matematických úvah a poznatků. Přitom není často nutné mít speciální matematické znalosti a dovednosti.

Z hlediska odborně matematického je v současnosti studium celočíselných posloupností velmi ceněnou součástí teorie čísel, kterou se zabývá mnoho matematiků. Také na katedře matematiky přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové se této problematice věnuje skupina učitelů již řadu let. Výsledkem této snahy je nejenom sborník (Seibert, 1999), ale především řada článků v odborných periodikách a série příspěvků na mezinárodních konferencích z teorie čísel.

Literatura

[1] Benjamin, A. T. & Quinn, J. J. (2003). *Proofs that really count: The art of combinatorial proof.* Dostupné z `http://www.cut-thenot.org/arithmetic/combinatorics/FibonaccTilings.shtml`

[2] Calda, E. (1996). *Kombinatorika.* Praha: Matfyzpress.

[3] Hoggatt, V. E. (1967). *Fibonacci and Lucas numbers.* Boston: Houghton Miffin Company.

[4] Jarošová, M. (2008). Fibonacci a jeho čísla. *Učitel matematiky,* 16(2), 94–100.

[5] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with application.* New York: John Wiley and Sons.

[6] Seibert, J., et al. (1999). *Fibonacciova čísla.* Hradec Králové: Gaudeamus.

[7] Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas numbers and the golden section.* New York: Holstel Press.

[8] Vilenkin, N. J. (1977). *Kombinatorika.* Praha: SNTL.

[9] Vorobjev, N. N. (1952). *Fibonacciova čísla.* Praha: SNTL.

Abstract

The Fibonacci is a basic concept for an important part of the elementary number theory. This remarkable sequence, perhaps somewhat surprisingly, applies to various situations not only in mathematics but also in a number of other science disciplines. The main purpose of the paper is to remind the reader of some basic properties of this sequence and its terms, the so-called Fibonacci numbers, and to mention some possibilities of their usage in various fields. This approach can direct teachers of various subjects or specialists in the relevant fields to acquaint themselves with the Fibonacci sequences. In this way, a teacher, often with only basic mathematical erudition, can intensify the motivational influence of his work with students in the given subject. Moreover, the usefulness of suitable models of the Fibonacci numbers for the proof of certain relations is demonstrated at the end of the paper.

Jaroslav Seibert
Ústav matematiky a kvantitativních metod
Fakulta ekonomicko-správní Univerzity Pardubice
Studentská 95
532 10 Pardubice
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové
Jana Koziny 1237
500 03 Hradec Králové