Alice Králová

Eliptický pohyb

Učitel matematiky, Vol. 27 (2019), No. 2, 83–95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148602

ELIPTICKÝ POHYB

Alice Králová

Motivace pro vznik předloženého článku

Eliptický pohyb je pojem spadající do tzv. *kinematické geometrie* v rovině. Kinematická geometrie se zabývá vlastnostmi křivek, které jsou drahami neboli *trajektoriemi* pohybujícího se objektu. Aplikaci nachází zejména ve strojírenství.

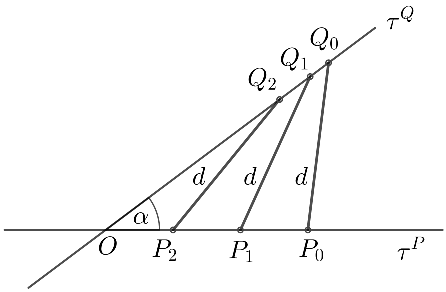
Vlastnosti eliptického pohybu jsou uvedeny například ve skriptech (Borecká, 2002). Bez důkladnějšího rozboru, který je však vzhledem k požadované stručnosti zmíněného textu vynechán, jsou ovšem jen těžko srozumitelné. Proto se domnívám, že může být přínosné se na eliptický pohyb podívat podrobněji. Tento článek mohou využít nejen studenti vysokých škol, kteří se při svém studiu s pojmem eliptický pohyb setkají, ale může být zajímavý také pro učitele středních škol. Ti mohou odvození parametrických rovnic elipsy pro určitou výchozí polohu pohybujícího se bodu studentům předložit jako zajímavou planimetrickou úlohu.

Princip, kterým elipsa při eliptickém pohybu vzniká, lze využít pro konstrukci elipsografu, jak ukazuje video [5]. V elementární podobě lze tento princip demonstrovat užitím hry *Inspiro* [6].

Předtím, než se podíváme na přesné odvození, je možné pro získání názorné představy, jak je eliptický pohyb vytvořen, zhlédnout animaci dostupnou na mých školních webových stránkách [3] pod odkazem „Animace kuželoseček → Eliptický pohyb“.

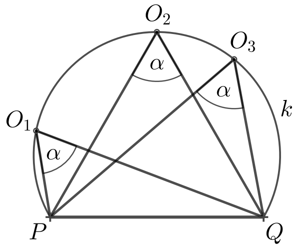
Odvození eliptického pohybu

Uvažujme dvě různoběžky τ^P a τ^Q s průsečíkem O, které svírají daný úhel α. Nechť se body $P \in \tau^P$ a $Q \in \tau^Q$ pohybují po přímkách τ^P a τ^Q tak, že v každém okamžiku je délka úsečky PQ konstantní, označme $|PQ| = d$ (obr. 1).



Obr. 1: Zadání eliptického pohybu

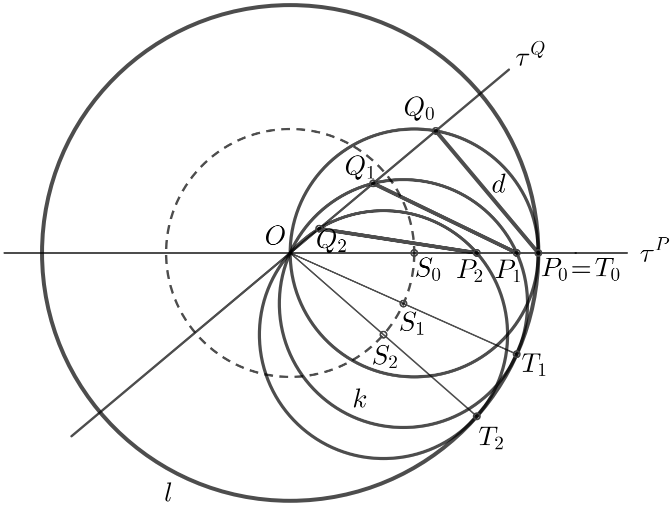
Z věty o obvodových úhlech příslušných oblouku kružnice [1] vyplývá, že bez ohledu na polohu bodů P a Q na přímkách τ^P a τ^Q mají všechny kružnice k procházející body P, Q a O stejný poloměr r, a jsou tedy otočenými polohami kružnice k kolem bodu O. Dotýkají se proto v bodech T další kružnice l se středem v bodě O, jejíž poloměr je roven průměru kružnice k.



Obr. 2: Vlastnost obvodových úhlů

Říkáme, že kružnice l je *pevnou polodií*, po níž se uvnitř kotálí kružnice k, která je *hybnou polodií* (obr. 3).

[1] Je-li úsečka PQ tětivou kružnice k a bod O leží na oblouku kružnice vymezeném body P a Q, pak je velikost $\sphericalangle POQ$ neměnná a nezávisí na konkrétní poloze bodu O na uvažovaném oblouku kružnice (obr. 2). Větu o obvodových úhlech příslušných oblouku kružnice s jejím důkazem lze najít v [2].



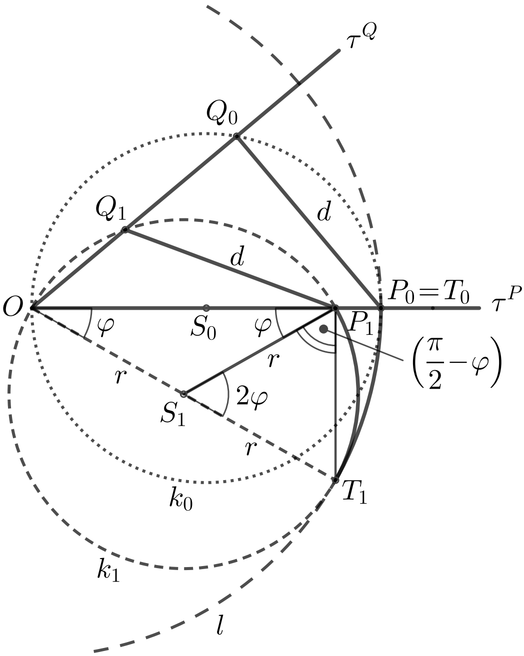
Obr. 3: Hybná a pevná polodie

Uvažujme dvě polohy k_0, k_1, mezi nimiž se kružnice k přemístí kotálením po vnitřním obvodě kružnice l (obr. 4). Z výchozí pozice dané středem $S_0 \in \tau^P$ a bodem dotyku $T_0 = P_0 \in \tau^P$ s kružnicí l se kružnice k_0 odvalí do nové polohy k_1, v níž má střed S_1 a kružnice l se dotýká v bodě T_1.

Podívejme se nejprve na kružnici k_1, která prochází body P_1, Q_1, O, má střed v bodě S_1 a dotýká se v bodě T_1 kružnice l.

Protože je $|S_1O| = |S_1P_1| = |S_1T_1| = r$, kde r značí poloměr kružnice k_1, jsou trojúhelníky OS_1P_1 a $P_1S_1T_1$ rovnoramenné. Označme $\varphi = |\sphericalangle S_1OP_1|$. Pak v $\triangle OS_1P_1$ má úhel při vrcholu P_1 také velikost φ a velikost úhlu při vrcholu S_1 je $\pi - 2\varphi$. Z toho plyne, že v $\triangle P_1S_1T_1$ má úhel při vrcholu S_1 velikost 2φ a zbylé dva úhly jsou rovny hodnotě $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

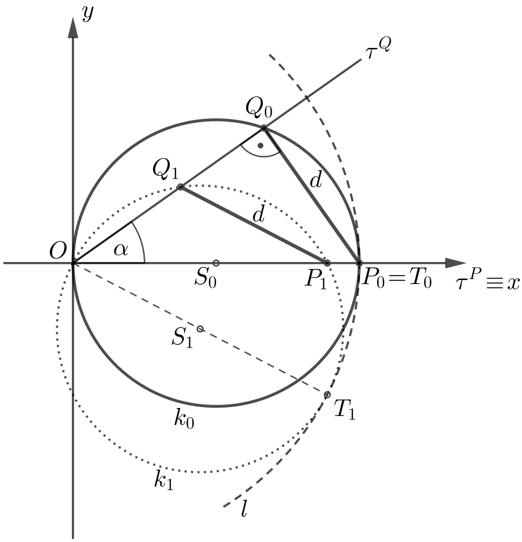
Jelikož $|\sphericalangle OP_1T_1| = |\sphericalangle OP_1S_1| + |\sphericalangle S_1P_1T_1| = \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\pi}{2}$, je úhel OP_1T_1 pravý neboli spojnice T_1P_1 je kolmá na přímku τ^P, po níž se pohybuje bod P.



Obr. 4: Vlastnosti trojúhelníků

Při kotálení kružnice k po kružnici l z výchozí polohy k_0 do polohy k_1 bod dotyku kružnic k, l opíše oblouk P_0T_1 ($P_0 = T_0$) kružnice l o délce $2r \cdot \varphi$. Oblouk téže délky urazí bod P_0 po kružnici k. Protože $|\sphericalangle T_1S_1P_1| = 2\varphi$, je délka oblouku kružnice k mezi body P_1 a T_1 rovna hodnotě $r \cdot 2\varphi$ neboli $2r \cdot \varphi$. To znamená, že poloha odvaleného bodu P_0 splyne s polohou bodu P_1. Když se tedy kružnice k kotálí po kružnici l, trajektorií odvalujícího se bodu $P_0 \in \tau^P$ kružnice k je úsečka, jež je průměrem kružnice l.

Zvolme bod O za počátek souřadnicového systému a osu x totožnou s přímkou τ^P (obr. 5). Bod P, který se po ní pohybuje, nechť má souřadnice $[t; 0]$. Maximální rozsah parametru t je dán polohou výchozího bodu P_0, jelikož k_0 je Thaletova kružnice nad OP_0, a tedy $|\sphericalangle OQ_0P_0| = 90°$.



Obr. 5: Odvození rozsahu parametru t

V pravoúhlém $\triangle P_0Q_0O$ má $\sphericalangle P_0OQ_0$ velikost α, úhel při vrcholu Q_0 je pravý a délka odvěsny P_0Q_0 je rovna d. Proto

$$\sin\alpha = \frac{d}{t_0} \;\Rightarrow\; t_0 = \frac{d}{\sin\alpha}\,, \text{tedy } t \in \left\langle -\frac{d}{\sin\alpha};\ \frac{d}{\sin\alpha} \right\rangle.$$

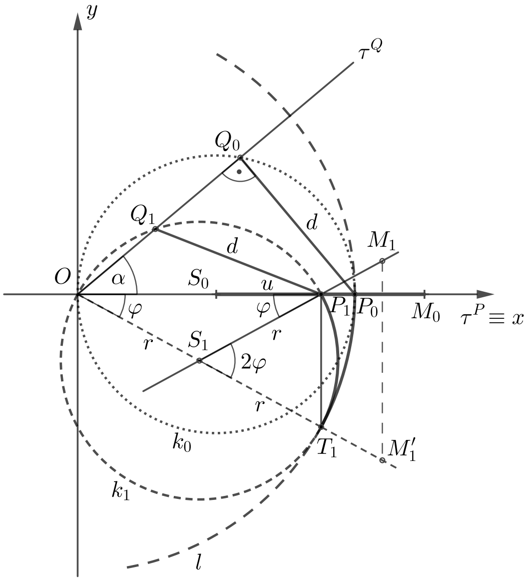
Odtud je také vidět, že $2r = \dfrac{d}{\sin\alpha} \;\Rightarrow\; r = \dfrac{d}{2\sin\alpha}$.

Uvedli jsme, že se kružnice k z výchozí polohy k_0 určené jejím poloměrem $|S_0P_0|$, kde P_0 je dotykový bod s kružnicí l, odvalí do nové polohy k_1, v níž je tímto poloměrem úsečka S_1P_1. Přitom bod P_1 leží na přímce τ^P, přesněji řečeno na úsečce, která je průměrem kružnice l.

Podívejme se dále, jak při kotálení kružnice k vypadá trajektorie bodu, který ve výchozí poloze leží kdekoliv na přímce OP_0, s výjimkou bodů O a P_0. Odvodíme, že je touto trajektorií **elipsa** se středem v bodě O, jejíž osa leží na přímce τ^P.

Uvažujme nejprve bod M_0 na polopřímce S_0P_0 tak, že $|S_0M_0| = u$. Pro $|\sphericalangle S_0OS_1| = \varphi$ dojde při kotálení kružnice k

po kružnici l k přemístění bodu M_0 do bodu M_1 na polopřímce S_1P_1 tak, že $|S_1M_1| = u$ (obr. 6).



Obr. 6: Vytvoření elipsy při kotálení hybné polodie po pevné polodii

Vyjádříme souřadnice bodu M_1. Protože je $|\sphericalangle S_1P_1O| = \varphi$, je také odchylka přímek P_1M_1 a τ^P rovna φ.

Odvodili jsme, že $\triangle P_1S_1T_1$ je rovnoramenný, přičemž jeho základna P_1T_1 je kolmá na přímku τ^P. Přeneseme-li bod M_1, který leží na polopřímce S_1P_1, rovnoběžně se základnou P_1T_1 do bodu M_1' na druhé rameno trojúhelníku, tedy na polopřímku S_1T_1, budou mít body M_1 a M_1' stejnou x-ovou souřadnici.

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník s přeponou OM_1', jehož třetí vrchol leží na přímce τ^P. Protože má úhel při vrcholu O velikost φ, pro x-ovou souřadnici bodu M_1', resp. M_1 platí

$$\cos\varphi = \frac{x}{r+u} \;\Rightarrow\; x = (r+u)\cdot\cos\varphi.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou P_1M_1, jehož třetí vrchol leží na přímce τ^P, vypočítáme y-ovou souřadnici bodu M_1. Délku úsečky P_1M_1 můžeme vyjádřit jako $u - r$, pokud bod M_1 není vnitřním bodem úsečky S_1P_1, resp. $r - u$, jestliže M_1 leží uvnitř úsečky S_1P_1. Souhrnně je délka $|P_1M_1|$ přepony uvažovaného trojúhelníku rovna hodnotě $|u - r|$. Pak

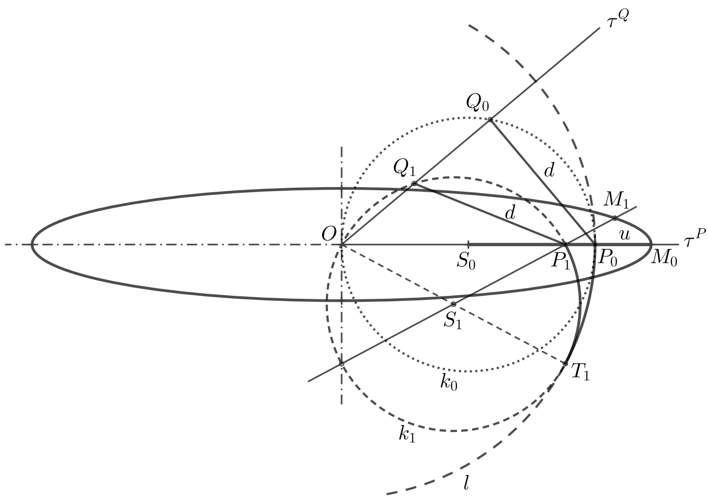
$$\sin\varphi = \frac{|y|}{|u-r|} \;\Rightarrow\; y = \pm(u-r)\cdot\sin\varphi.$$

Vzhledem k poloze bodu M_1 je $y = (u - r)\cdot\sin\varphi$.

Víme, že parametrické rovnice elipsy v „základní poloze“, tedy se středem v počátku $[0; 0]$, hlavní poloosou délky a na ose x a vedlejší poloosou délky b na ose y, jsou

$$x = a\cdot\cos\varphi,\;\; y = b\cdot\sin\varphi,\;\; \varphi\in\langle 0; 2\pi\rangle\,.$$

To odpovídá našemu výsledku. Ze symetrie elipsy podle osy $x \equiv$ $\equiv \tau^P$ plyne, že na elipse leží oba body bez ohledu na znaménko y-ové souřadnice, takže bod elipsy by mohl být určený druhou rovnicí ve tvaru $y = -b\cdot\sin\varphi$.



Obr. 7: Trajektorie bodu M

Dále je evidentně $r+u>|u-r|$, takže délka a hlavní poloosy elipsy, která leží na ose $x \equiv \tau^P$, je rovna hodnotě $r + u = \dfrac{d}{2\sin\alpha} + u$. Délka b vedlejší poloosy je dána výrazem $|r-u| = \left|\dfrac{d}{2\sin\alpha} - u\right|$. Pro $u = 0$ je bod M_0 totožný se středem S_0, který se pohybuje po kružnici se středem O a poloměrem r. V obr. 7 je znázorněna celá trajektorie bodu M.

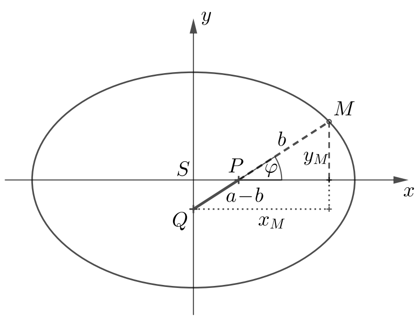
Než budeme pokračovat ve výkladu, vložme důležitou poznámku týkající se parametrických rovnic elipsy, konkrétně úhlu φ, který v nich figuruje.

Na základě analogie s parametrickými rovnicemi kružnice

$$x = r \cdot \cos\varphi,\ \ y = r \cdot \sin\varphi,\ \ \varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$$

lze snadno podlehnout mylnému dojmu, že úhel φ udává odchylku úsečky SM, kde M je bodem elipsy a S je její střed, od kladného směru osy x. To ale není pravda!

Ve skutečnosti poloha úhlu φ, který se nazývá *excentrická anomálie*, plyne z tzv. *rozdílové proužkové konstrukce* elipsy. Při jejím užití je poloha bodu M na elipse určena polohou úsečky PQ s pevnou délkou $a-b$, kdy se bod P pohybuje po hlavní ose a bod Q po vedlejší ose elipsy, a tedy $\alpha = 90°$ (obr. 8). Bod M je umístěn na polopřímce QP tak, že $|PM| = b$ a $|QM| = a$. Úhel φ udává odchylku polopřímky QP od kladného směru osy x. [2]



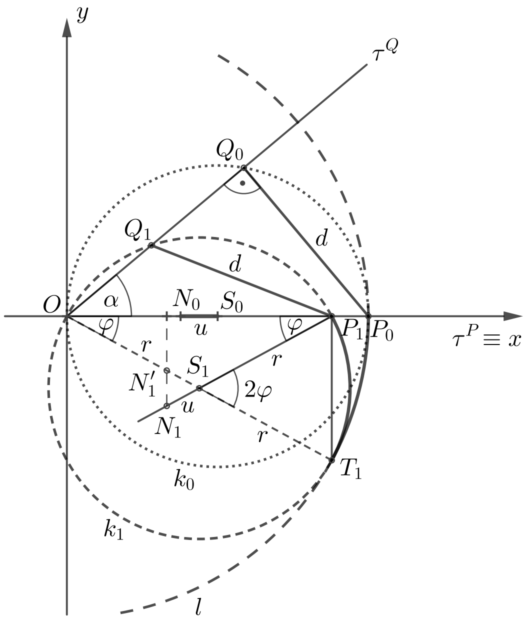
Obr. 8: Úhel φ v parametrických rovnicích elipsy

[2]Na tomto principu rovněž funguje určitý typ elipsografu.

Nechť je nyní bod N_0 vnitřním bodem úsečky OS_0 tak, že $|S_0N_0| = u$ neboli $|P_0N_0| = r + u$ (obr. 9). Při kotálení kružnice k po kružnici l se bod N_0 přemístí do bodu N_1 na polopřímku P_1S_1 tak, že $|P_1N_1| = r + u$ a pro y-ovou souřadnici bodu N_1 platí vztah

$$\sin\varphi = \frac{|y|}{r+u} \;\Rightarrow\; y = \pm(r+u)\cdot\sin\varphi.$$

Vzhledem k poloze bodu N_1 je $y = -\,(r+u)\cdot\sin\varphi$.

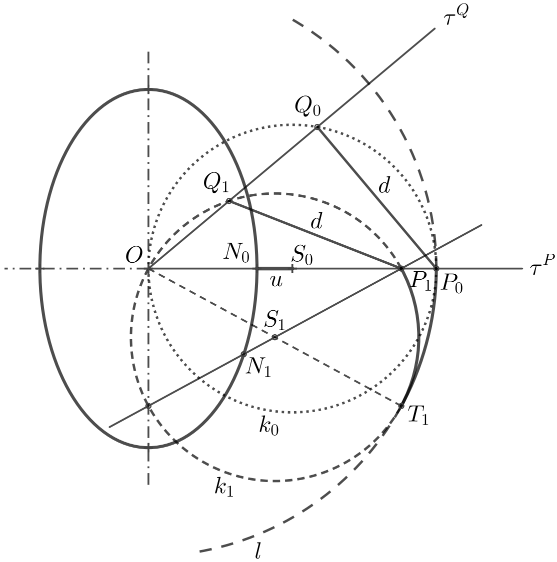


Obr. 9: Vytvoření elipsy při kotálení hybné polodie po pevné polodii

Po přenesení bodu N_1 do bodu $N_1' \in OS_1$ rovnoběžně s úsečkou $P_1T_1 \perp \tau^P$, čímž se zachová x-ová souřadnice, můžeme z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou ON_1', $|ON_1'| = r - u$, jehož třetí vrchol leží na τ^P, určit, že

$$\cos\varphi = \frac{x}{r-u} \;\Rightarrow\; x = (r-u)\cdot\cos\varphi.$$

Protože je $0 < r - u < r + u$, na ose $x \equiv \tau^P$ bude ležet vedlejší osa elipsy, která je při kotálení kružnice k po kružnici l trajektorií bodu N_0. Přitom je délka b vedlejší poloosy rovna hodnotě $r - u = \dfrac{d}{2\sin\alpha} - u$. Délka a hlavní poloosy je $r + u = \dfrac{d}{2\sin\alpha} + u$. V obr. 10 je znázorněna celá trajektorie bodu N.



Obr. 10: Trajektorie bodu N

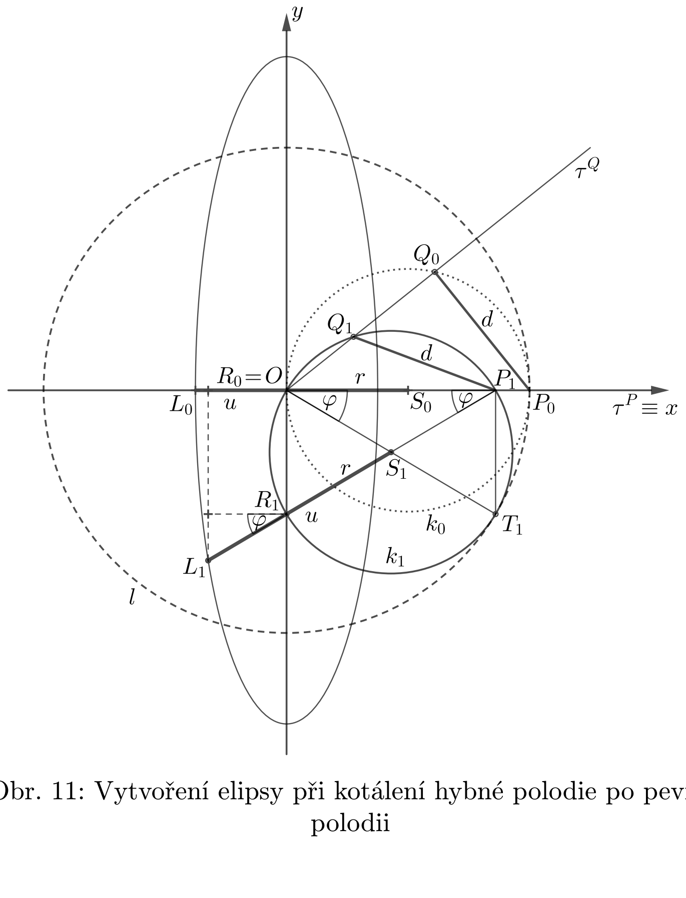
Vidíme také, že na hlavní, resp. vedlejší ose elipsy, kterou je přímka τ^P, leží bod P_1, jenž je průsečíkem hybné polodie k s přímkou S_1M_1, resp. S_1N_1.

Pravoúhlý $\triangle OP_1T_1$, jehož vrcholy leží na kružnici k_1, můžeme doplnit na obdélník $OP_1T_1R_1$ vepsaný do kružnice k_1 (obr. 11). Bod R_1 leží na ose y a zároveň na přímce S_1M_1, resp. S_1N_1. Můžeme tedy říci, že body na osách elipsy jsou průsečíky hybné polodie se spojnicí pohybujícího se bodu M, resp. N se středem S hybné polodie.

Dále využijeme skutečnost, že kružnice k při kotálení po kružnici l protíná osu y v bodě, který leží na spojnici jejího středu S

s bodem P pohybujícím se po přímce τ^P. Tento fakt uplatníme při odvození, že trajektorií libovolného bodu L, který ve výchozí poloze leží na polopřímce opačné k polopřímce OS_0, bude rovněž elipsa.

Nechť L_0 je libovolný bod na polopřímce opačné k polopřímce OS_0 (obr. 11). Označme $u = |S_0L_0|$. Po odvalení kružnice k_0 do nové polohy k_1, v níž má střed S_1, se bod L_0 přemístí do bodu L_1 na spojnici P_1S_1 tak, že $|S_1L_1| = u$, přičemž úsečka S_1L_1 protíná osu y v bodě R_1.



Obr. 11: Vytvoření elipsy při kotálení hybné polodie po pevné polodii

Protože bod R_1 leží na kružnici k_1, a tedy $|S_1R_1| = r$, je $|R_1L_1| = u - r$. Bod P_1 je rovněž bodem kružnice k_1, tudíž platí, že $|P_1L_1| = r + u$.

Užitím úhlu $\varphi = |\sphericalangle OP_1L_1|$, jenž je roven velikosti $\sphericalangle S_0OS_1$, o který se otočila kružnice k, získáme pro souřadnice bodu L_1 vztahy

$$\cos\varphi = \frac{|x|}{u-r} \ \Rightarrow\ x = \pm(u-r)\cdot\cos\varphi,$$

s ohledem na polohu bodu L_1 platí $x = (r-u)\cdot\cos\varphi$.

$$\sin\varphi = \frac{|y|}{r+u} \ \Rightarrow\ y = \pm(r+u)\cdot\sin\varphi,$$

s ohledem na polohu bodu L_1 platí $y = -(r+u)\cdot\sin\varphi$.

Uvedené vztahy jsou opět rovnicemi elipsy s délkou hlavní poloosy $r + u$ na ose y a délkou vedlejší poloosy $u - r$ na ose x.

Vidíme, že elipsa s hlavní osou na ose y vznikne pohybem bodu, jehož počáteční polohu lze umístit kamkoliv na polopřímku S_0O, ovšem mimo bod $R_0 = O$, neboť při tomto umístění by se pohyboval pouze po ose y. Délka hlavní poloosy na ose y je rovna $r + u$, délku vedlejší poloosy na ose x můžeme souhrnně vyjádřit výrazem $|r-u|$, kde u je vzdálenost bodu L, resp. N v jeho výchozí pozici od středu S_0.

Závěr

Pěknou demonstrací eliptického pohybu je video na webové stránce [4]. Na základě výše odvozených vztahů nyní máme jistotu, že vytvořenou křivkou je skutečně elipsa a také přesně víme, jak se v závislosti na poloze tvořícího bodu bude měnit její tvar.

Literatura

[1] Borecká, K., et al. (2002). *Konstruktivní geometrie.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, s. r. o.

[2] Pomykalová, E. (2018). *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* Praha: Prometheus, spol s r. o.

[3] Králová, A. *Konstruktivní geometrie.* [online] Release Date: March 20, 2018 [cit. 4. 9. 2018]. Dostupné z: `http://user.mendelu.cz/balcarko`

[4] Elliptical Path. In: Youtube [online]. 13. 3. 2016 [cit. 4. 9. 2018]. Dostupné z: `https://www.youtube.com/watch?v=E8OWjdEAVv4`. Kanál uživatele Constantin Stancescu.

[5] Ellipsograph 3. In: Youtube [online]. 26. 4. 2010 [cit. 4. 9. 2018]. Dostupné z: `https://www.youtube.com/watch?v=AgQZlfIvM1Y`. Kanál uživatele ElicaTeam.

[6] Inspiro. In: Youtube [online]. 18. 5. 2015 [cit. 4. 9. 2018]. Dostupné z: `https://www.youtube.com/watch?v=h8byh7mnz8k`. Kanál uživatele Chen Zenyi.

Abstract

In this article I explore the trace of a point attached to a circle (of radius r) which rolls around the inside of a fixed circle (of radius $2r$). Using appropriate geometric relations I deduce that the trace of such a point is an ellipse.

Alice Králová
Ústav matematiky LDF Mendelovy univerzity v Brně
Zemědělská 3
613 00 Brno
e-mail: alice.kralova@mendelu.cz