

Jiří Veselý

Cesta německé matematiky k aplikacím a Felix Klein

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 66 (2021), No. 2, 81–102

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148979>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2021

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Cesta německé matematiky k aplikacím a Felix Klein

Jiří Veselý

Abstrakt. Článek přináší čtenáři základní informace o poměrně úzké části vývoje matematiky v Německu a o vlivu, který na něj měl Felix Klein. Zhruba řečeno jde o poměr k aplikované matematice a o roli klíčových postav popisovaných změn. I když se v článku v první řadě zabývám dobou na začátku 20. stol., věnuji pozornost i dalšímu meziválečnému vývoji a je na čtenáři, aby zvážil některé paralely se současnou situací.

Čistá a aplikovaná matematika

U oboru, který nás de facto provází tisíciletí, je obtížné stanovit jeho přesný začátek. To se týká i té části, kterou dnes označujeme aplikovaná matematika. V dávné minulosti se téměř všichni matematici zabývali aplikacemi, aniž by se o nich explicitně mluvilo. Teprve ve druhé polovině 19. století se začalo častěji rozlišovat mezi matematikou čistou a aplikovanou. Pokusíme se nejprve definovat, co vlastně aplikovaná matematika z dnešního hlediska je. Před více než sto lety (1907) proběhlo v německém Göttingenu shromáždění věnované speciálně aplikacím matematiky. Zde je první bod tezí, formulovaných na závěr:

Podstata aplikované matematiky leží ve vzdělávání a ve využívání metod, které vedou k numerickým a grafickým řešením matematických problémů.¹

Dnešní pohled poskytuje obecnější charakteristiku. Namátkou uvedme dva příklady:

Aplikovaná matematika se soustřeďuje na vytváření a studium matematických a výpočetních prostředků široce použitelných ve vědeckých a inženýrských oblastech a na jejich využití pro aktuální problémy v těchto oblastech a oblastech příbuzných.²

Na jiném místě můžeme číst:

Aplikovaná matematika využívá matematické techniky k popisu jevů reálného světa a pro řešení závažných technologických problémů. Tyto zahrnují mechaniku pohybujících se těles, statistické zákonitosti pohybu částic plynu nebo vyví-

¹Das Wesen der angewandten Mathematik liegt in der Ausbildung und Ausübung von Methoden zur numerischen und graphischen Durchführung mathematischer Probleme. Viz [8], s. 518.

²Applied mathematics focuses on the creation and study of mathematical and computational tools broadly applicable in science and engineering, and on their use in solving challenging problems in these and related fields. Viz [1].

Doc. RNDr. JIŘÍ VESELÝ, CSc., Matematický ústav UK, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz

*jení efektivních algoritmů numerické analýzy. Tyto pojmy jsou v úzkém vztahu s objekty teoretické fyziky.*³

Z nabídek soudobých německých univerzit vidíme, že výběr místa studia matematiky a jejich aplikací je velmi široký; takový byl i v době mezi první a druhou světovou válkou. Na konci I. světové války mělo Německo 36 univerzit, z toho 13 technicky zaměřených, takže o všech se zmínit nemůžeme. S přihlédnutím k tradici a kvalitě matematického vzdělávání se soustředíme zejména na Berlín a Göttingen, neboť tam pracovalo nejvíce špičkových matematiků a úroveň vzdělávání tam byla nejvyšší; zmíníme se však i o některých dalších centrech. Berlín a Göttingen spojovala dlouhodobá rivalita, sahající o mnoho let zpět; viz [43]. Hrála klíčovou roli i v oblasti aplikované matematiky. Patrně nejdůležitější osobností, která stála u postupné změny chápání aplikované matematiky a její společenské role v Německu, byl Felix Klein (1849–1925); viz např. [59], [16], [42] a [45].⁴

Berlín a Göttingen

V Berlíně byla tradice vysoké úrovně matematiky spojena v 18. století s *Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften* [Královská pruská akademie věd]. Jejím prvním prezidentem byl matematik, filozof a diplomat Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a mezi lidmi, kteří v jejím rámci v Berlíně pracovali, byli např. Leonhard Euler (1707–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Johann III Bernoulli (1744–1807) nebo Johann Lambert (1728–1777). Poznamenejme, že tito matematici zvučných jmen byli v dnešním pojetí aplikovanými matematiky.⁵

Na prahu 19. století, tj. před založením berlínské Humboldtovy univerzity, existovalo v Německu již 20 univerzit⁶ a jednou z nich byla *Georg-August-Universität Göttingen* [Univerzita Georga Augusta v Göttingenu], založená roku 1734 anglickým králem a hannoverským kurfiřtem Jiřím II. (1683–1760). Její vysoká úroveň v matematice je spojena se jmény, jakými jsou Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Lejeune Dirichlet (1805–1859) nebo Bernhard Riemann (1826–1866). O göttingenské matematice pojednává např. [45].

V té době v Berlíně nelze pominout působení významné trojice „teoretických“ matematiků: Karla Weierstrasse (1815–1897), Ernsta Eduarda Kummera (1810–1893) a Leopolda Kroneckera (1823–1891).⁷ Tito tři matematici měli velmi přátelské vztahy, které se však postupem času velmi zhoršily. Berlín byl v 19. století již nějakou dobu významným světovým matematickým centrem a přitahoval matematiky z mnoha jiných zemí. Z našich matematiků to byli např. Matyáš Lerch (1860–1922) a Eduard Weyr

³Applied mathematics is the application of mathematical techniques to describe real-world systems and solve technologically relevant problems. This can include the mechanics of a moving body, the statistics governing the atoms in a gas or developing more efficient algorithms for computational analysis. These ideas are closely linked with those of theoretical physics. Viz [2].

⁴Budeme dále uvádět jen tradičně užívaná jména, případně další lze najít např. na webu [33].

⁵Někteří jsou dnes známí z trochu jiné stránky, např. Lambert jako autor důkazu iracionality Ludolfova čísla π . Pro podrobnější informace o berlínské matematice té doby viz např. [4] nebo [5].

⁶Ve zmíněných 20 jsou započteny i technické univerzity v Braunschweigu, Freibergu a Clausthalu.

⁷První dva započali svoji matematickou dráhu jako středoškolsí profesori, Kronecker byl na gymnáziu Kummerovým žákem.

(1852–1903), kteří navštěvovali zejména Weierstrassovy přednášky. Výborná matematická úroveň Berlína se však na přelomu 19. a 20. století začala mísit s uzavřeností k novým myšlenkám a určitou strnulostí, projevující se až do dvacátých let 20. století; viz [4]. Souviselo to se střídáním generací místních matematiků.

Známost vynikající úrovně Göttingenu postupně rostla. Na počátku dvacátého století tam působili Felix Klein (1849–1925), David Hilbert (1862–1943) a Hermann Minkowski (1864–1909), jehož nástupcem se stal Edmund Landau (1877–1938).⁸

Hlavním konstruktérem změn byl Klein, který se narodil v Düsseldorfu.⁹ Základy vzdělání mu vštípila matka, pak navštěvoval dva a půl roku soukromou základní školu a roku 1857 nastoupil do humanitně zaměřeného gymnázia. Jeho vzdělání bylo široké, maturoval v 16 letech z devíti předmětů, mj. z němčiny, latiny, řečtiny, francouzštiny a hebrejštiny, a samozřejmě také z matematiky. Pak se přihlásil na univerzitu v Bonnu, kde byl jeho učitelem matematiky a fyziky Julius Plücker (1801–1868), který zakrátko rozeznal jeho talent a vzal si Kleina za asistenta. Přizval ho i k vlastní práci z oblasti přímkové geometrie. Klein získal nezávisle ocenění za práci z teoretické fyziky a na přání Plückerovy rodiny dokončil druhý díl jím rozepsané knihy *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* (1868, 1869) [Nová geometrie prostoru založená na chápání přímek jako jeho prvků]. Získal zároveň doktorát z tematiky konzultované s Alfredem Clebschem (1833–1872) a Rudolfem Lipschitzem (1832–1903).

Disertaci *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form* [O transformaci obecné rovnice druhého stupně v přímkových souřadnicích na kanonický tvar] Klein obhájil v Bonnu v prosinci roku 1868 a přesídlil do Göttingenu, kde s Clebschem pracoval od začátku roku 1869 na geometrické problematice. V zimním semestru 1869/1870 pobýval v Berlíně a odtud se on a Sophus Lie (1842–1899) vydali do Paříže a pak do Göttingenu. Zde Klein přednášel jako soukromý docent tři semestry a roku 1872 přešel s Clebschovým doporučením do Erlangenu, kde byl jako 23letý jmenován řádným profesorem. Své geometrické výsledky při přechodu do Erlangenu zužitkoval ve své práci *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Srovnávací úvahy o novějších geometrických výzkumech], kterou vydal roku 1872.¹⁰

Klein pak postupně jako profesor vystřídal Mnichov a Lipsko, aby se do Göttingenu vrátil roku 1886. Do té doby usilovně vědecky pracoval, jeho druhý göttingenský pobyt měl však již trochu jiný charakter, který se pokusíme přiblížit níže. V době Kleinova pobytu v Lipsku přednášel u něj na semináři Hilbert a jeho přednáška se Kleinovi velice líbila. V Göttingenu byl od roku 1875 řádným profesorem Hermann Schwarz (1843–1921), a když odešel roku 1892 do Berlína, otevřela se cesta k přechodu Hilberta do Göttingenu. Při této příležitosti to nevyšlo. Hilbert pak byl od roku 1893

⁸V roce 1906 odešel do Göttingenu studovat pojistnou matematiku Emil Schoenbaum (1882–1967), žák Karla Petra (1868–1950); viz [9]. U číselného teoretika Landaua pobýval delší dobu v letech 1923–1925 a 1927–1928 Vojtěch Jarník (1897–1970).

⁹Klein prý velmi rád zdůrazňoval, že datum jeho narození 25. 4. 1849 je složeno ze tří čtverců, totiž z 5^2 , 2^2 a 43^2 .

¹⁰Je známa jako *Erlangenský program* a vyšla také jako [24]. Erlangenská univerzita měla totiž jednu specialitu: každý nově jmenovaný profesor musel předložit vstupní práci, ve které byl popsán jeho výzkumný program.

profesorem v Königsbergu (dnešní Kaliningrad) a do Göttingenu přišel roku 1896.¹¹ V roce 1902 k nim přibyl jako profesor blízký Hilbertův königsberský kolega a přítel Minkowski. Sláva Göttingenu jako matematického centra působila jako magnet, takže ho navštěvovali matematici z Evropy i celého světa. Ve srovnání s Berlínem byl Göttingen po matematické stránce otevřený novým myšlenkám a měl blíže k ostatním přírodním vědám. Konfrontaci soudobých pohledů na matematiku dokázal včas přetvořit na nástroj potřebné modernizace vzdělávání; viz [43].¹²

Na Kleina se totiž často pohlíží jen jako na teoretického matematika a opomíjí se to, co udělal pro aplikovanou matematiku.

Celoněmecká matematická společnost a Felix Klein

Za první (avšak spíše obecně vědeckou) společnost v Německu bývá považována *Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina – Nationale Akademie der Wissenschaften* [Akademie věd Leopoldina], která byla založena roku 1652. Druhá vědecká matematická společnost *Mathematische Gesellschaft in Hamburg* vznikla v roce 1690.¹³ Vytvořit celoněmeckou matematickou společnost se pokusil jako první Alfred Clebsch (1833–1872), který působil jako profesor matematiky v Göttingenu a před smrtí zde zastával funkci rektora. Navrhl to na sjezdu *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* [Společnost německých vědců a lékařů] roku 1867 současně s dalším podnětem na založení nového matematického časopisu. Tak o rok později vznikl ve spolupráci Clebsche a Carla Neumanna (1832–1925) významný a dodnes existující časopis *Mathematische Annalen*. Dnes v něm publikují matematici z celého světa; o historii časopisu pojednává [6]. K založení společnosti však už v té době nedošlo, neboť Clebsch krátce nato náhle zemřel.

Myšlenky na založení celoněmecké matematické společnosti se ujal jeho žák Klein. Roku 1873 se uskutečnilo v Göttingenu důležité setkání: Toto separátní setkání matematiků v rámci Společnosti německých vědců a lékařů bylo základem nové organizace sjednocující německy mluvící matematiky. *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (DMV) [Německá matematická společnost] je spolek, který byl založen roku 1890 v Brémách; hlavní zásluhu na tom měl Georg Cantor (1845–1918) a obrovský kus práce v přípravném období vykonal také Klein. Společnost se setkala ještě při založení s odporem berlínské matematické školy; viz [48]. Klein diplomatickým jednáním vytvořil celkovou koncepci společnosti, založené na úzkých vztazích s příbuznými obory a *aplikacemi*. Za zmínku stojí i to, že hlavní vliv na směřování společnosti měla göttingenská skupina; byli to Clebschovi žáci (Alexander von Brill (1842–1935), Wilhelm Schell (1826–1904), Aurel Voß (1845–1931)) a lidé s vazbami na Kleina. Méně je u nás známo, že dvě z výročních zasedání DMV se konala v Čechách, a to roku 1902 v Karlových Varech a roku 1929 v Praze.

Založení DMV v Brémách se zúčastnilo 33 z 52 pozvaných matematiků (9 z nich bylo již na setkání roku 1873), z toho 14 bylo z univerzit a 11 z technických vysoko-

¹¹V [42] je popsáno podrobně úsilí, které Klein pro získání Hilberta pro Göttingen vynaložil. Oba se shodovali v základních názorech na matematiku a s rozdíly se dobře vyrovnávali.

¹²Když Hilbert dostal nabídku profesury po Fuchsovi v Berlíně roku 1902, odmítl ji a navíc ji využil k tomu, aby se k němu v Göttingenu mohl připojit Minkowski. Viz opět [42].

¹³I v jiných zemích vznikaly často takovéto společnosti nejprve s lokální působností.

kých škol, přičemž minimálně 23 z nich bylo mladších 50 let (srovnej s [53]). Jak již bylo řečeno, hlavními organizátory zakládajícího setkání byli Klein a Cantor. S jeho výsledkem byli oba spokojeni. I když mj. měli i rozdílné zájmy – Cantor hlavně na zviditelnění a ocenění svého množinově teoretického pojetí a Klein na obnovení dobrého chápání dlouhou dobu zanedbávaných aplikací matematiky – shodovali se v mnohostranně šíři názorů.¹⁴ Podrobnosti o založení DMV lze nalézt v zápise *Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* [Kronika DMV], viz [22].¹⁵ Poznamenejme, že kontakty s mateřskou institucí Společností německých vědců a lékařů, která vytvoření DMV umožnila a zjednodušila, zůstaly zachovány. Až do uchopení moci nacisty se v čele DMV vystřídala řada vynikajících matematiků, např. O. Blumenthal, G. Cantor, H. Hahn, D. Hilbert, O. Hölder, F. Klein, H. Kneser, E. Landau, M. Noether, A. Pringsheim, C. Runge, E. Schmidt, I. Schur, H. Weyl a další.¹⁶

Göttingen a Felix Klein

Klein je matematikům známý zejména jako geometr a autor *Erlanger Programm* [Erlangenský program], který sehrál ve vývoji matematiky významnou roli. Vytýčil v něm směr studia geometrických struktur prostřednictvím invariantů a symetrií, aby tak bylo dosaženo hlubšího propojení s algebrou. Sám Klein se považoval za pokračovatele a realizátora Riemannových idejí. Významně přispěl svými výsledky k neeukleidovské geometrii, teorii funkcí komplexní proměnné i teorii grup. Ve spolupráci se svým bývalým asistentem Arnoldem Sommerfeldem (1868–1951) (viz [12]) napsal čtyřdílnou monografii o „vlčcích“ (setrvačnicích) [28] o více než tisíci stránkách, cca během patnácti let po vzniku této teorie; ta má mezi jeho pracemi ke (speciálnímu) aplikacím patrně nejbližší.

Klein o tomto tématu přednášel již roku 1896 v Princetonu (přednášky vyšly knižně o rok později v New Yorku jako [29]). Byl nesporně ústřední osobou göttingenské matematiky a v době svého druhého göttingenského působení byl v jistém smyslu i významným politickým odborníkem (Fachpolitiker). Právě díky němu se Göttingen začal postupně proměňovat a získávat nad Berlínem znatelnou převahu. Částečně to souviselo s přirozenou generační obměnou: zatímco nejvýznamnější berlínští matematici Kronecker a Weierstrass byli dávno za zenitem své odborné kariéry, ke Kleinovi v Göttingenu přibývali postupně Hilbert, Minkowski a další.¹⁷

Klein byl již v roce 1893 jedním z hlavních řečníků na mezinárodním kongresu matematiků, který byl zorganizován v Chicagu v rámci oslav čtyřsetletého výročí ob-

¹⁴Sowohl Cantor als auch Klein zeigten sich mit den ersten Ergebnissen sehr zufrieden. Wenn sie auch unterschiedliche Interessen verfolgt hatten – Cantor vor allem eine gerechte Beurteilung und Verbreitung seiner mengetheoretischen Erkenntnisse im Auge hatte und Klein die lange Zeit vernachlässigten Anwendungen der Mathematik wieder ins rechte Licht zu rücken suchte –, so entsprach die vielseitige Orientierung ihren Absichten. Viz [53], str. 42.

¹⁵O matematicích z Československa se vztahem k DMV pojednává článek [19].

¹⁶Max Noether byl profesorem v Erlangenu od roku 1875. Byl otcem Emmy a Fritze Noetherových. Poznamenejme, že od roku 1990 udílí DMV v dvouletých intervalech cenu, pojmenovanou po svém prvním prezidentovi G. Cantorovi.

¹⁷Atmosféru tehdejšího Göttingenu zachycují biografické knihy Constance Reid (1918–2010) o Hilbertovi a Courantovi, avšak zejména druhá je založena na orální historii a nezachycuje situaci vždy přesně. Viz [44] nebo Stoneova recenze v Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1970), č. 2.

jevení Ameriky v roce 1892. Konala se tam obrovská světová výstava (*Chicago Columbian Exposition*), veletrh (*Chicago World's Fair*) a také zmíněný kongres. Klein tam byl pozván a na univerzitě v Evanstonu přednesl zmíněnou sérii přednášek. Americké přednášky zvýšily jeho prestiž v matematické komunitě. Vícenásobná pozvání na špičkové americké univerzity spolu s kontakty na vládnoucí činitele v Německu přispěly ke Kleinově dominantní pozici v oblasti vzdělávání v matematice včetně personální politiky (viz opět [47], a také [59], [45]). To byl také klíč k možnostem ovlivňování personální politiky.

Klein významně ovlivňoval personální politiku i v rámci Pruska díky svým vazbám na Friedricha Althoffa (1839–1908), ministerského radu (ten byl de facto ministrem kultu v Prusku, ale Klein ho považoval za krajně nevyzpytatelného člověka). Klein jeho prostřednictvím měl i značný vliv na vzdělávání učitelů matematiky v celém Německu. Mezinárodní ocenění tohoto Kleinova úsilí na sebe nedalo dlouho čekat. Na kongresu IMU (Mezinárodní matematické unie) roku 1908 byl Klein zvolen na čtyři roky prezidentem *Die Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (IMUK); na dalším kongresu IMU v roce 1912 byl jeho mandát prodloužen na následující období. Klein v té době patřil k vlivným organizátorům matematického života nejen v Německu, ale i ve světovém měřítku.

Válka však všechno změnila: v říjnu 1914 Klein spolu s dalšími německými intelektuály podepsal dokument *Aufruf an die Kulturwelt*, podporující německý militarismus.¹⁸ Proto byl např. zbaven členství v pařížské akademii. O rok dříve byl penzionován. Dnes je známo, že ani on, ani řada dalších, jejichž podpisy byly s dokumentem publikovány, ho patrně vůbec nečetli (viz opět [48]).

Zázemí pro orientaci na aplikace

Věhlas Göttingenu ve 20. století dále rostl. Celkově pak, zejména díky Hilbertovi, se změnil v jakousi matematickou Mekku. Uvedme příklady: z amerických matematiků získali Ph.D. v Göttingenu v roce 1902 Oliver Dimon Kellogg (1878–1932) a o rok později Charles Max Mason (1877–1961), oba pod Hilbertovým vedením. Roland G. D. Richardson (1878–1949) zde strávil rok po svém přijetí na Brown University. Hilbertovými Ph.D. studenty byli i Teiji Takagi (1875–1969) nebo Hugo Steinhaus (1887–1972). Také *Mathematische Annalen* se staly úspěšným konkurentem berlínského časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik*¹⁹.

Stále výrazněji se projevoval Kleinův vliv na výuku matematiky, a to i na středních školách. Ta se začala měnit od roku 1890 (letní školy, doškolování apod.). Klein úzce spolupracoval s německou učitelskou organizací *Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* (MNU) [Německý spolek pro podporu výuky matematiky a přírodních věd] založenou roku 1891.

Roku 1908 vydal první díl své známé třídílné monografie *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [Elementární matematika z vyššího hlediska] [25]. Druhý

¹⁸Tato proklamace německých intelektuálů a umělců je známa také pod názvem Manifest devadesáti tří. Její text v originále i český překlad lze nalézt v [3], seznam všech signatářů lze nalézt na webu https://en.wikipedia.org/wiki/Manifesto_of_the_Ninety-Three.

¹⁹Tento nejstarší existující německý matematický časopis, známý též jako Crellův žurnál, byl založen roku 1826.

díl [26] vyšel o rok později a třetí [27] až po Kleinově smrti. Toto jeho dílo se dočkalo mnoha vydání a je stále zajímavé.²⁰ Poznamenejme ještě, že již od roku 1898 existovala v Prusku možnost složit učitelskou státnici z aplikované matematiky. K modernizačnímu úsilí zosobňovanému Kleinem se však berlínští matematici stavěli delší dobu odmítavě, viz např. [45].

V roce 1898 vznikl *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandte Physik*, od prosince roku 1900 s rozšířeným názvem o *und Mathematik* [Göttingenský spolek pro podporu aplikované fyziky (a matematiky)]. Klein byl duchovním otcem spolku a jeho místopředsedou, avšak nemalou zásluhu na úspěchu tohoto projektu měl jeho předseda, chemik Henry T. von Böttingen (1848–1920).²¹ Detaily čtenář nalezne např. v [42], [54] a [55]. Byl to Klein, kdo formuloval hlavní cíle spolku takto (viz [55], str. 386):

- ... Tajný rada Klein vytyčil svého času v přednáškách jako cíl následující:*
- 1. Především zlepšit vzdělávání budoucích učitelů, působit*
 - 2. také na růst výzkumu zaměřeného na aplikace vědy a*
 - 3. usměrnit univerzitní politiku na dráhu více spojenou s praktickým životem než dosud.*
- Shodli jsme se na tom, že první bod je nejdůležitější, ...*²²

Členy tohoto málo početného spolku velice vlivných lidí, který fungoval bez jakýchkoli stanov, byli např. Anton von Rieppel (1852–1926), průmyslník, statik a konstruktér, člen a předseda řady důležitých odborných spolků, Tonio Bödiker (1843–1907), právník, předseda představenstva fy Siemens & Halske AG, nebo Theodor von Guilleaume (1861–1933), generální ředitel Carlswerk AG, a někteří profesori göttingenské univerzity; viz opět [55]. Podnikatelé, členové spolku, sponzorovali a spolufinancovali nejen výzkum, ale dokonce i výstavbu budov pro ústavy. Tak vznikl roku 1904 göttingenský fyzikální ústav a brzy po něm měl následovat i matematický ústav. Skutečně také vznikl, ale mnohem později. Obavy z vysokých provozních nákladů a potom válečný dluh a inflace oddálily realizaci záměru o cca 20 let, a tak se ho za Kleinova života již nepodařilo dokončit²³ (viz ještě dále).

V čem tedy spočívala atraktivita Göttingenu? V [52] je popsáno göttingenské vědecké společenství takto:

Pro matematickou společnost v Göttingenu bylo charakteristické, že k řešení problémů aplikované matematiky – od teoretické fyziky po přístrojovou mechaniku – používala nejmodernější metody čisté matematiky. To umožňovala pravidelná týdenní setkání matematiků a fyziků a jejich kritická hodnocení mezinárodní matematicko-fyzikální literatury, při němž se v rámci diskusí vzájemně

²⁰V roce 2016 vyšel v nakladatelství Springer anglický překlad *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*.

²¹Böttingen studoval přírodní vědy a byl čestným doktorem göttingenské univerzity.

²²...Geheimrat Klein stellte uns seinerzeit in seinen Vorträgen als Ziel unseres Vorgehens auf:

1. vor allen Dingen auf eine bessere Ausbildung der künftigen Lehrer hinzuwirken.
 2. auch für die gesteigerte Forschung in der Richtung der angewandten Wissenschaften einzutreten und
 3. die Universitätspolitik wieder in Bahnen zu lenken, die mehr mit dem praktischen Leben in Verbindung ständen, als es damals der Fall war.
- Wir einigten uns vor allem Dingen auf den ersten Punkt als den wichtigsten, ...

²³Tyto partie historie göttingenského matematického ústavu jsou popsány v [31].

ovlivňovali. Tak se výsledky göttingenských matematiků a fyziků dostávaly na nejvyšší mezinárodní úroveň.²⁴

Roku 1904 byl v Göttingenu jmenován prvním německým řádným profesorem aplikované matematiky Carl Runge (1856–1927).²⁵ Jeho kariéra byla zajímavá: část dětství prožil v Havaně, maturoval v Brémách a ke studiím literatury a filozofie nastoupil na mnichovské univerzitě, v krátké době však přešel ke studiu matematiky. Při studiích se sprátelil s Maxem Planckem (1858–1947). Oba přešli roku 1877 do Berlína, kde se Runge začal pod vlivem Weierstrassovým zabývat *čistou matematikou*. Později po ukončení studií se přimknul ke Kroneckerově skupině – z té doby jsou jeho práce o numerických metodách. V roce 1886 získal místo profesora v Hannoveru, kde působil až do odchodu do Göttingenu a věnoval se intenzivně fyzice. K matematice se opět vrátil, ale až po příchodu do Göttingenu.²⁶

Tentýž rok jako Runge nastoupil v Göttingenu na profesorské místo Ludwig Prandtl (1875–1953). Na kongresu IMU v Heidelbergu roku 1904 vzbudil Kleinovu pozornost svými výsledky a Klein mu nabídl místo vedoucího katedry technické fyziky s perspektivou vedení nově zřizovaného ústavu *Institut für angewandte Mathematik und Mechanik* (1905) [Ústav aplikované matematiky a mechaniky] společně s Rungem; viz [56]. Prandtlovou zásluhou vznikly v Göttingenu dvě významné výzkumné instituce: *Aerodynamische Versuchsanstalt* (AVA) [Aerodynamické centrum] v roce 1907 a později v roce 1927 *Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung* (KWI) [Ústav císaře Viléma pro výzkum proudění]. V rámci AVA byl v Göttingenu postaven roku 1908 první německý aerodynamický tunel, AVA však využívalo výzkumné kapacity podobně specializovaných center a pracovišť i v jiných zemích.²⁷ Prandtl zůstal Göttingenu věrný celý život (viz níže) a vděčíme mu zejména za propracování některých matematických metod teorie proudění.²⁸ Podrobněji viz [13].

Vynikajícím aplikovaným matematikem byl i Theodore von Kármán (1881–1963). Po studiích v Budapešti odešel do Göttingenu, kde pod Prandtlovým vedením získal v roce 1908 doktorát. Po dalších čtyřech letech spolupráce s Prandtlem se stal v roce 1913 ředitelem *Institut für Mechanik und flugtechnische Aerodynamik* [Ústav mechaniky a technické aerodynamiky] v Cáchách na *Königlich Rheinisch-Westphälische Po-*

²⁴Für die Mathematische Gesellschaft in Göttingen war charakteristisch daß in die Behandlung von Problemen der angewandten Mathematik – von mathematischer Physik bis technischer Mechanik – die modernsten Methoden der reinen Mathematik einfließen. Das war möglich, durch die regelmäßige Auswertung und kritische Einschätzung der internationalen mathematisch-physikalischen Literatur in den wöchentlichen Zusammenkünften, durch ein enges Zusammenwirken von Mathematikern und Physikern und ihre gegenseitige Beeinflussung, sowie dadurch, daß die Ergebnisse Göttinger Mathematiker und Physiker den Welthöchststand mitbestimmten.

²⁵Pozitivní vztah k aplikacím matematiky měly i Rungeho děti. Jedna z jeho dcer Iris Runge (1888–1966) byla úspěšnou aplikovanou matematickou, která pracovala ve výzkumných institucích firmy Osram/Telefunken. Jejím zajímavému životu je věnována monografie [54]. Syn Wilhelm (1895–1987) byl fyzik, který se habilitoval v Göttingenu a pracoval také u firmy Telefunken. Jejich sestra Nina (1893–1991) byla druhou manželkou aplikovaného matematika Richarda Couranta, za kterého se provdala roku 1919.

²⁶Jeho nástupcem byl od roku 1925 Gustav Herglotz (1881–1953), který ale už nebyl profesorem aplikované matematiky.

²⁷Zejména pak v době jejich okupace během II. světové války.

²⁸Prandtlova přednáška na Mezinárodním matematickém kongresu v Heidelbergu byla patrně i důvodem, proč ho Klein přemluvil k přechodu z techniky v Hannoveru na göttingenskou univerzitu.

lytechnische Schule (dnes RWTH Aachen). Pracovníci, kteří z Göttingenu odešli, zůstávali s göttingenskými kolegy v kontaktu a neřídka dále spolupracovali; viz [35].

Cáchy byly v té době významným centrem aplikované matematiky. Kármán spolupracoval i s americkými pracovišti a v roce 1930 se stal ředitelem *Guggenheim Aeronautical Laboratory* [Guggenheimovy aeronautické laboratoře] na kalifornské univerzitě.²⁹ V další generaci aplikovaných matematiků vynikl Willy Prager (1903–1980). Jeho kariéra v Německu byla velmi strmá: roku 1925 absolvoval studia na Technické univerzitě v Darmstadtu a o rok později získal doktorát. V roce 1929 přijal místo ředitele Ústavu aplikované matematiky v Göttingenu, kde spolupracoval s Prandtlem. Roku 1932 byl jmenován profesorem technické mechaniky v Karlsruhe – v té době byl nejmladším německým profesorem matematiky. Prager byl velmi všestranný matematik, zabýval se statikou a dynamikou konstrukcí, teorií pružnosti a plasticitou, později i aplikacemi v dopravě, ekonomice apod.; viz [11].

Za úspěch všichni jmenovaní přímo či nepřímo vděčili pobytu v Göttingenu a tak zprostředkovaně i Kleinovi. Je přitom zajímavé, že Klein byl pro svoje názory na zavádění aplikací do matematického kurikula kritizován některými profesory, a to jak z univerzit, tak ale i z technik. Na straně technických škol to byli např. profesor berlínské techniky (*Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg*) a její pozdější rektor Alois Riedler (1850–1936)³⁰ a jeho kolega Adolf Slaby (1849–1913)³¹, který byl profesorem elektrotechniky.

Oba zejména zdůrazňovali potřebu praktických zkušeností, které vůči matematice považovali pro techniky za potřebnější. Šlo však spíše o součást dlouhodobějšího úsilí o povznesení technických škol na úroveň univerzit a obavy z toho, že budou univerzity v Kleinově pojetí technikám konkurovat. Podařilo se jim dosáhnout zvýšení podílu praktické výuky částečně na úkor matematických přednášek, které se však také začaly obsahově měnit a přibližovat se praxi. Tam, kde došlo k příliš radikální redukci přednášek z matematiky, se později matematika do výuky opět vracela. Zmíňme v té souvislosti Kleinův diplomatický talent: Slaby a Riedler navštívili v polovině roku 1900 Göttingen a podepsali s Kleinem „mírovou smlouvu“.

Kleinovu organizátorskou roli převzal později další aplikovaný matematik, Hilbertův žák Richard Courant (1888–1972). Studoval ve Vratislavi (tehdy *Breslau*) a chtěl se věnovat fyzice. Jeho učitelé matematiky ho příliš nezaujali, ale pod vlivem starších kolegů Ernsta Hellingera (1883–1950) a Otty Toeplitze (1881–1940) přešel v roce 1907 do Göttingenu. Byl pak Hilbertovým doktorandem a pracoval v Göttingenu až do I. světové války. Během ní zdokonalil systém telegrafního spojení (viz [7]). Klein i Hilbert ho považovali za vhodného pokračovatele Kleinových záměrů, a tak po krátkém pobytu v Münsteru nastoupil v Göttingenu na Kleinovo uprázdněné místo. Podařilo se mu získat prostředky na vybudování budovy göttingenského matematického ústavu

²⁹Odborné soupeření Prandtla a von Kármána bylo pro oba silným hnacím stimulem.

³⁰Byl rakouského původu a v letech 1871 až 1873 působil jako asistent v Brně na technice (*Deutsche Technische Hochschule Brünn*). Mezi německými inženýry byl na absolutní špičce a usiloval o reformu jejich vzdělávání podle amerických škol. Blíže viz [60] a [17].

³¹Slaby studoval v Jeně a měl doktorát z matematiky. Byl předsedou *Verein Deutscher Ingenieure* [Spolek německých inženýrů] a měl osobní přístup k císaři Wilhelmu II. Spolu s Riedlerem získali pro techniky možnost získávání titulů typu Dipl.-Ing. v Prusku. Později se tato změna uplatnila v celém Německu.

od Rockefellerovy nadace.³² Na projektování budovy se jako poradce významně podílel Otto Neugebauer (1899–1990) (viz [45]). Při slavnostním otevření ústavu dne 5. ledna 1929 se prý Hilbert poeticky vyjádřil (viz [7]) takto:

*Myšlenka tohoto ústavu, s láskou živěná a opečovávaná Felixem Kleinem, kdysi žila a byla líbezná a okouzující jako Šípková Růženka. My, co jsme tu už nějakou chvíli, jsme se s ní pyšně těšili. Ale zlá čarodějnice inflace uspala tuto Šípkovou Růženku tak hluboko, že na ni všichni zapomněli až do chvíle, kdy ji kouzelný princ Courant probudil k novému životu.*³³

V době, kdy Německo bylo v mimořádných finančních obtížích, byla dostavba a otevření institutu malým zázrakem. V denním tisku byla přijímána s rozpaky.

Situace v Berlíně

Roku 1883 Kummer odešel do penze a vztahy Kroneckera a Weierstrasse se dramaticky začaly zhoršovat.³⁴ Weierstrass preferoval jako nástupce svého žáka Schwarze, Kronecker byl silně proti, a tak se Weierstrass dal v roce 1890 jen *částečně* penzionovat. Pak náhle roku 1891 Kronecker zemřel a Schwarz byl pro berlínské matematiky mnohem přijatelnější než Klein.³⁵ Pro tuto dobu až do dvacátých let 20. století je však pro nás podstatné jen to, že Berlín zůstával baštou teoretické matematiky a vzpíral se možným změnám, zejména jakkoli souvisejícím s rivalským Göttingenem. Na profesorských místech byli v té době kromě Schwarze např. Friedrich Schottky (1851–1935), Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) a Issai Schur (1875–1941). Pak se atmosféra v Berlíně začala pro aplikace matematiky měnit, shodou okolností nepřímo göttingenským vlivem.

Erhard Schmidt (1876–1959) získal doktorát v Göttingenu pod Hilbertovým vedením v roce 1905 a o rok později se habilitoval v Bonnu. V roce 1917 získal profesuru v Berlíně – dobře si uvědomoval význam aplikované matematiky i pro univerzitu, nejen pro technické vysoké školy. Byl patrně hlavním iniciátorem zřízení *Institut für angewandte Mathematik* [Ústavu aplikované matematiky] na berlínské univerzitě a bylo velkým štěstím, že místo jeho ředitele přijal Richard von Mises (1883–1953). Citujme názor Schmidtův, z něhož vyplývá jeho přesvědčení o důležitosti vytvoření tohoto pracoviště:³⁶

³²Tato filantropická instituce se sídlem v New Yorku byla založena v roce 1913 rodinou Rockefellerů. Je zaměřena zejména na podporu vědy prostřednictvím projektů a grantů.

³³The idea of this institute – cherished and nurtured by Felix Klein – lived once upon a time and was charming and lovely, like Sleeping Beauty, and we who have been here a while took pleasure from it; but the Wicked Witch of inflation put this Sleeping Beauty into a sleep so deep that all forgot about her until Prince Charming Courant awakened her to new life (z rukopisu uloženého v SUB Göttingen).

³⁴Je těžké popsat všechny důvody: oba se lišili např. v názoru na Cantorovu teorii množin, v jejich vlastním přístupu k matematice apod., ale shodně jako všichni berlínští matematici neměli rádi Kleina a jeho názory na matematiku a její výuku.

³⁵Poznamenejme, že v roce 1886 byl Schwarz ostře proti návratu Kleina do Göttingenu, ale nepodařilo se mu kolegy pro svůj záměr získat. Podrobněji o těchto personálních záležitostech pojednává [45]. Zmíňme ještě, že kromě zdravé rivality mezi Berlínem a Göttingenem panovaly mezi některými jednotlivci nenávislné vztahy (např. Schwarz a Weierstrass ke Kleinovi; viz [55]).

³⁶Tento názor je reprodukován z životopisu Richarda von Misesa na webu [33].

*Prostupování matematických metod do praktického života jakožto důsledku předválečného rozvoje technologie a především neočekávaná potřeba (...) matematiků během války vytvořila nespornou nutnost zavedení aplikované matematiky na největší univerzitě v Prusku. Mezi univerzitními studenty se často vyskytuje názor, že aplikovaná matematika je předmět nevalného významu (...) K vytvoření nové tradice je potřeba známá osobnost (...).*³⁷

Sám Schmidt se aplikacím nevěnoval, jeho hlavní zájmy se týkaly teorie integrálních rovnic a otázek Hilbertova prostoru. Bývá právem pokládán za jednoho z tvůrců funkcionální analýzy.

Mises byl z hlediska rozvoje aplikované matematiky v Německu velmi významnou osobností. Z českého zorného úhlu je zajímavé, že od roku 1906 byl asistentem profesora Geoga Hamela (1877–1954) na technice v Brně a o dva roky později se v Brně i habilitoval.³⁸ Byl špičkovým aplikovaným matematikem. Brzy po pobytu v Brně přešel jako mimořádný profesor (v 26 letech) na univerzitu do tehdy německého Straßburgu. Ucházel se i o profesuru v Brně, a to již od roku 1909, a nezáskal ji i přes velmi dobré posudky jeho prací; za těmito opakovanými neúspěchy byly patrně mezilidské vztahy; podrobněji viz [51]. Miloval létání a během I. světové války působil jako učitel, instruktor a zkušební pilot rakouské armády. Po válce se stal v roce 1919 profesorem pro mechaniku, hydrodynamiku a aerodynamiku na technice v Drážďanech, brzy však přešel do Berlína, kde byl od roku 1920 ředitelem *Institut für angewandte Mathematik* [Ústav aplikované matematiky] na univerzitě; viz [51]. Následující rok založil časopis *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (ZAMM) a stal se jeho redaktorem. V roce 1922 založil spolu s Prandtlem (který pracoval v Göttingenu!) při kongresu DMV v Lipsku *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik* (GAMM) [Společnost pro aplikovanou matematiku a mechaniku]. Společnost byla koncipována od začátku jako mezinárodní.³⁹

Sám von Mises popsal na sklonku života svoje zaměření takto: aplikovaná analýza, integrální a diferenciální rovnice, mechanika, hydromechanika a aerodynamika, konstruktivní geometrie, pravděpodobnostní kalkulus, statistika a filozofie. Není však obecně příliš známo, jak přispěl k budování teorie pravděpodobnosti: Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987) uvádí v předmluvě ke své stěžejní práci, že byl při tvorbě teorie ovlivněn von Misesem. Misesův přístup však nebyl, jak se později ukázalo, úspěšný. Byl vynikajícím organizátorem a berlínský Ústav aplikované matematiky se pod jeho vedením stal významným světově uznávaným centrem. Citujme ještě

³⁷The pervasion of practical life by mathematical methods, as a result of the development of technology before the war and, above all, the unexpected need for (...) mathematicians during the war make it an undeniable necessity to install applied mathematics at the largest Prussian university. Among university students, however, one frequently finds the opinion that applied mathematics is a subject of inferior importance. To create a new tradition, it needs an important personality of approved name (...).

³⁸Jeho první práce je z roku 1905, viz [30]. Hamel i Mises se stali opět kolegy v Berlíně. Mises byl mj. velkým znalcem díla Rainera Maria Rilkeho (1875–1926) a jeho sbírka různých vydání Rilkeho děl je dnes ozdobou knihovny na Harvard University. Také bratr Richarda von Misesa Ludwig byl velmi všestranný a je známý jako sociolog, ekonom a historik.

³⁹Je zajímavé, že společnost GAMM nikdy nepožádala v Německu o registraci. Její polooficiální status jí pomohl v roce 1933 přežít a zároveň v roce 1945 usnadnil její obnovení; viz [35].

názor profesora university v Basileji Aleksandra Markoviče Ostrowského (1893–1983), dalšího z odchovanců göttingenského centra:

Teprve s příchodem Richarda von Misesa na berlínskou univerzitu začala opravdová a velice vlivná německá škola aplikované matematiky existovat. Von Mises byl neuvěřitelně dynamický člověk, který měl současně, tak jako Runge, velmi široké zájmy a byl zběhlý v oblasti technologie.⁴⁰

Budoucí Misesova manželka, Rakušanka Hilda Geiringer (1893–1973), získala Ph.D. v roce 1917 ve Vídni za práci o trigonometrických řadách. Od roku 1921 pak pracovala v Misesově Ústavu aplikované matematiky v Berlíně a posunula se směrem k aplikované matematice a teorii pravděpodobnosti; v habilitační práci (1927) kombinovala statistiku s mechanikou a byla tak jednou ze tří habilitovaných žen – matematicek v meziválečném Německu. Dalšími byly Emmy Noether (1882–1935) a Ruth Moufang (1905–1977), ta však byla nucena odejít z akademické sféry a stát se aplikovanou matematickou (viz níže).

Jiným cizím matematikem maďarského původu pracujícím krátkou dobu v Berlíně byl John (János) von Neumann (1903–1957). Do Berlína přijel studovat v roce 1921 chemii, po dvou letech však odešel do Curychu, kde studia dokončil v roce 1926. Současně se však věnoval matematice a ve stejném roce získal Ph.D. z matematiky na budapeštské univerzitě. Pak přednášel matematiku v Berlíně a v Hamburku, ale současně absolvoval pobyt u Hilberta v Göttingenu v době 1926 až 1927 v rámci stipendia Rockefellerovy nadace. Je autorem označení *Hilbertův prostor* a jeho axiomatického pojetí.⁴¹ Po několikaletém pobytu v Princetonu se od roku 1933 stal jedním z prvních matematiků v *Institute for Advanced Studies* [Ústav pro pokročilá studia]. Zvládal jak čistou matematiku, tak i její aplikace v neobvyklé šíři a analogické to bylo i s jeho mimomatematickými zájmy. Podrobnější informace nalezne čtenář v [57] nebo v monografii [49].

Podotkneme, že jisté soustředění na centra v Berlíně a v Göttingenu neznamená, že na ostatních univerzitách a technikách v Německu se aplikovaná matematika do druhé světové války neobjevovala. Dalšími ne tak významnými místy se zaměřením na aplikace matematiky byly např. Cáchy, Braunschweig, Darmstadt, Jena nebo Rostock.

Zlomový rok 1933

Významným mezníkem ve vývoji byl rok 1933: dne 30. ledna se stal říšským kancléřem Adolf Hitler (1889–1945). Všimněme si nejprve v obecnější rovině toho, co následovalo. Jen z německých univerzit muselo odejít po přijetí zákona *Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums* [Zákon o obnově zaměstnaneckého poměru] skoro sto

⁴⁰Only with the appointment of Richard von Mises to the University of Berlin did the first serious German school of applied mathematics with a broad sphere of influence come into existence. Von Mises was an incredibly dynamic person and at the same time amazingly versatile like Runge. He was especially well versed in the realm of technology.

⁴¹Speciální Hilbertův prostor se objevil nejprve u několika autorů, např. u Hilberta v první dekádě 20. stol. v pracích o integrálních rovnicích. Na konci roku 1928 axiomatizoval abstraktní Hilbertův prostor von Neumann v [32]. Byl využit ve fyzice v kvantové mechanice, což následně vedlo ke studiu „zobecněných Hilbertových prostorů“. Viz též [38]. Jde zároveň o příklad toho, jak se aplikovaná a čistá matematika vzájemně ovlivňovaly (a ovlivňují).

vědců a učitelů, zabývajících se matematikou. Centra výzkumu Berlín a Göttingen byla přitom postižena nejvíce.

Vedení matematického ústavu v Göttingenu byl z rasových důvodů nejprve zba- ven Courant a později téměř okamžitě i jeho nástupce Neugebauer; ten byl propuštěn proto, že odmítl podepsat tzv. prohlášení loajality vůdci.⁴² Jedna z prvních rozsáh- lejších prací mapující celkové lidské ztráty německé matematiky vlivem nacismu [36], [37]⁴³, vzniká již na konci sedmdesátých let 20. stol., uvádí, že z Göttingenu muselo odejít celkem 19 a z Berlína dokonce 23 matematiků. Další univerzity byly postiženy v menší míře.⁴⁴ V monografii [49] se dočteme, že z celého Německa bylo přinuceno emigrovat celkem 145 matematiků a 17 dalších bylo zabito v koncentračních táborech nebo spáchalo sebevraždu. Tyto ztráty postihly ve velké míře i aplikovanou matema- tiku. Téma následků holokaustu a masové emigrace z Německa je poměrně obsáhle zpracováno, viz např. monografie [46] nebo [49]; srovnej též se [7]. Počet relevantních článků se nedá rozumně odhadnout.

Vědomé nedostatečné doceňování vědy jako takové nacisty významně přispělo k je- jich pozdější porážce. Adolf Hitler v odpovědi na dopis Maxe Plancka (1858–1947) prý napsal: *Pokud bude propuštění židovských vědců znamenat zničení soudobé německé vědy, pak se budeme muset několik let bez vědy obejít.*⁴⁵ Německá matematika na svoji bývalou vůdčí pozici ve světě však již v poválečném vývoji nikdy nedosáhla.

Podívejme se nejprve na to, jak se pod vlivem nacistů měnilo DMV. Od roku 1933 byli prezidenty DMV postupně vždy na rok Richard Baldus (1885–1945), Oskar Perron (1880–1975), Hamel, Schmidt a Walther Lietzmann (1880–1959). V roce 1938 byl do této funkce dosazen Wilhelm Süß (1895–1958). DMV se z dnešního hlediska jeví jako instituce, která *jako celek* s nacisty nechtěla kolaborovat a kterou se nacistům podařilo plně si podrobit až za Süsse na předsednické pozici, tj. těsně před druhou svě- tovou válkou. To vyžaduje krátký komentář: v roce 1921 založil Hamel *Mathematischer Reichsverband* [Říšská matematická asociace] jako platformu pro středoškolské učitele matematiky; byl také jejím prvním předsedou.

Asociace se postupně stala součástí DMV a tvořila v ní prakticky pronacisticky orientované politické křídlo. Politické boje ve vedení DMV vedly k obtížím při uplatňo- vání vůdcovského principu; byl to jeden z politických neúspěchů Ludwiga Bieberbacha (1886–1982), který se snažil dosadit při zasedání DMV v Bad Pyremontu roku 1934 na vedoucí pozici v rámci uplatňování tzv. *Führerprincipu* nacistu Erharda Torniera

⁴²Verzí bylo více, zde je text prohlášení pro státní zaměstnance: *Ich schwöre: Ich werde dem Führer des Deutschen Reiches und Volkes Adolf Hitler treu und gehorsam sein, die Gesetze beachten, und meine Amtspflichten gewissenhaft erfüllen, so wahr mir Gott helfe.* [Prísahám věrnost a poslušnost vůdci německé říše Adolfu Hitlerovi, budu dodržovat zákony a svědomitě plnit své povinnosti. K tomu mi dopomáhej Bůh.]

⁴³Poslední část [37] byla napsána se spoluautorem, proto je citována odděleně.

⁴⁴Počty u ostatních německých univerzit byly nižší: Cáchy (3), Bonn (2), Braunschweig (1), Bres- lau (5), Frankfurt (4), Freiberg (1), Freiburg (2), Gießen (3), Graz (2), Halle (2), Hamburg (3), Heidelberg (3), Jena (1), Karlsruhe (2), Kiel (2), Köln (3), Königsberg (4), Leipzig (2), Marburg (1), Mnichov (3), Münster (1), Rostock (1), Tübingen (1).

⁴⁵If the dismissal of Jewish scientists means the annihilation of contemporary German science, then we shall do without science for a few years (německý originál se nepodařilo lokalizovat). Nucený exodus mnoha vynikajících vědců vyvolává spekulace, jak by se svět vyvíjel, kdyby k němu nedošlo a nacistům se podařilo získat je na svou stranu.

(1894–1982).⁴⁶ Podrobněji viz [40], [49], nebo [47]. Bieberbach z DMV po ztrátě jedné z vedoucích funkcí odešel.

Všimněme si nyní osudů několika jednotlivců. Řada z těch, o kterých jsme se již podrobněji či jen okrajově zmínili, se konfrontace s nacismem nedožila, např. Cantor, Klein, Runge nebo Carl Neumann. Někteří odešli před uchopením moci nacisty „dobrovolně“. Byl to např. von Kármán, který odešel do USA, kde již dříve v roce 1926 pomáhal se stavbou aerodynamického tunelu. Po delších návštěvách mu bylo nabídnuto roku 1930 místo ředitele Aeronautické laboratoře na *California Institute of Technology* (CALTECH) [Kalifornská technická univerzita], které po vyhodnocení situace v Německu přijal. Pracoval dále v teorii proudění a později i v raketovém výzkumu. Na webu [33] je jeho role popsána stručně takto:

*V kontrastu k jeho četným veřejným aktivitám se nikdy nestal velikou osobností tak jako četní vynálezci, snad též proto, že teoretická aerodynamika není příliš přístupná laikům; nicméně jeho role na tomto poli a v raketovém výzkumu vytvářela vědeckou i politickou historii.*⁴⁷

Poznamenejme, že těch, kteří odešli předvídavě dříve, bylo velmi málo, např. fyzik Albert Einstein (1879–1955) nebo matematik zabývající se teorií množin a současně i historik matematiky Adolf Abraham H. Fraenkel (1891–1965). Ve zkratkách ZF nebo ZFC axiomatik teorie množin ono „F“ pochází od jeho jména.

Masový exodus matematiků nastal po přijetí tzv. zákona o obnově zaměstnanec-kého poměru. Jednou z prvních göttingenských ztrát byl Courant. Nevyužil možnosti odejít do Istanbulu a získal možnost ročního pobytu v Cambridge, po němž odjel do USA na New York University (NYU). Tam později získal profesuru a vybudoval špičkové matematické pracoviště, které je dnes nezávislé na NYU a nese Courantovo jméno; je to *Courant Institute of Mathematical Sciences* (CIMS). Courant napsal několik monografií (jeho spoluautory byli Kurt O. Friedrichs (1901–1982), Hilbert, Fritz John (1910–1994) nebo Herbert Robbins (1905–2001)) a je pokládán za jednoho z „otců“ metody konečných prvků. Velmi se snažil pomoci svým ohroženým kolegům nalézt reálnou možnost emigrovat, což bylo pro některé prakticky záchranou života.

V roce 1933 došlo za Atatürkovy vlády v Turecku k radikální reformě vyššího vzdělávání a byla prakticky vytvořena istanbulska univerzita. Při budování jejího Matematického ústavu pomáhal Courant, který spolu s fyziky Maxem Bornem (1882–1970) a Jamesem Franckem (1882–1964) navštívili na žádost turecké vlády Istanbul a Courant pak pro ni sepsal doporučení. Turecká vláda si jako ředitele Matematického ústavu vybrala von Misese (Courant odmítl). Právě Courantova zpráva posílila u Misese, Pragera a Geiringer odhodlání do Turecka odejít. Jako modelová situace pro uspořádání plánovaných pracovišť posloužilo göttingenské schéma vytvořené Kleinem.

Podrobnější informace nalezne čtenář v [14]. Celkem odešlo v té době do Turecka z Německa cca 30 profesorů (převážně židovského původu). Mises na své místo v Ber-

⁴⁶Ten na oplátku navrhoval jeho. Při jiné příležitosti Bieberbach citoval Hitlerův výrok *Alle Macht oder keine* [Všechnu moc nebo žádnou] a o to mu ve skutečnosti šlo.

⁴⁷Despite his many public activities, he never became a great public figure in the way of many inventors, perhaps because theoretical aerodynamics is not a very accessible field to the layman; nevertheless, his work in that field and in rocket research had helped shape both scientific and political history (citován pramen Complete Dictionary of Scientific Biography).

líně dobrovolně rezignoval a z osobních důvodů (příslib nároku na penzi) podpořil jako svého nástupce Theodora Vahlena (1869–1945). Ten byl na začátku odborné kariéry aplikovaným matematikem (balistika, stavba lodí), ale později u něj mnohem více převažovala nad matematikou ideologie a kolaborace s nacistickým režimem. Z politického hlediska byl po jistou dobu nejvýše postaveným matematikem Třetí říše.

Mises se svojí asistentkou a budoucí manželkou Geiringer pracovali v Istanbulu do roku 1939 a pak emigrovali do USA, Prager tam odešel až v roce 1941 na Brownovu univerzitu. Také vynikající aplikovaný matematik Friedrichs měl zajímavý osud: studoval filosofii, ale v Göttingenu se definitivně rozhodl pro matematiku a stal se blízkým spolupracovníkem a přítelem Couranta. Bylo to přátelství na celý život.

V roce 1931 byl jmenován profesorem na technice v Braunschweigu. Pro nacistický režim byl zcela „bez vady“, avšak po nástupu Hitlera k moci se zamiloval do židovské studentky Nellie Bruell (1908–1994).⁴⁸ Možnost legalizace tohoto vztahu zmizela roku 1935 přijetím norimberských zákonů. Proto nezávisle na sobě v roce 1937 emigrovali do USA, kde se vzali.

Friedrichs přispěl velkou měrou k vybudování Courantova institutu, dnes patrně nejlepšího centra aplikované matematiky na světě, a v roce 1977 získal americkou Národní medaili pro vědu za matematizaci problémů fyziky, dynamiky proudění a elasticity. V odůvodnění se píše: *... for bringing the powers of modern mathematics to bear on problems in physics, fluid dynamics, and elasticity* [.. za uplatnění moderních matematických metod na problémy fyziky, dynamiky tekutin a elasticity]. Toto ocenění mu předal osobně prezident USA.

Zajímavý byl i osud Ruth Moufang (1905–1977). Studovala na *Johann Wolfgang Goethe Universität* ve Frankfurtu v letech 1925 až 1929. V roce 1931 obhájila práci, kterou napsala pod vedením Maxe Dehna (1878–1952), získala titul Ph.D. a pak akademický rok 1931/1932 strávila na univerzitě v Římě. Po návratu získala místo v Königsbergu, ale zakrátko se vrátila do Frankfurtu na pedagogické místo na univerzitě a připravovala se na habilitační řízení.

To proběhlo úspěšně v únoru roku 1937 a Moufang se tak stala třetí ženou, které se to v matematice v Německu zdařilo. Bohužel však stanovisko nacistického ministerstva bylo negativní: *... do budoucna předpoklady pro plodnou činnost žen – docentek chybí*. Moufang se potom stala průmyslovou matematickou ve výzkumu firmy Krupp v Essenu, kde se zabývala teorií elasticity; podrobněji viz např. [50].⁴⁹

Neugebauera, o kterém jsme se zmínili v souvislosti se stavbou göttingenského Matematického ústavu, nelze v žádném případě považovat za aplikovaného matematika. Kromě prvé publikované práce napsané spolu s Haraldem Bohrem (1887–1951) a věnované skoroperiodickým funkcím [10] se zabýval celý život plně historií matematiky. Přesto jsou jeho další zásluhy i o aplikovanou matematiku z dnešního hlediska obrovské: byl totiž iniciátorem vzniku dvou referativních časopisů *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, Zbl (1931–) a *Mathematical Reviews*, MR (1940–), které se ve formě elektronických databází *zbMATH* a *MathSciNet* významně využívají dodnes a poskytují aplikacím relativně rozsáhlý prostor. Emigroval nejprve roku 1934 s pomocí

⁴⁸Je zajímavé, že Friedrichsova rodina má velice obsažnou a zajímavou webovou stránku, viz <http://www.friedrichs.us/History-KOF-Ancestors-Full-Print-Version.html>.

⁴⁹Ruth Moufang byl nabídnut v roce 1946 návrat na frankfurtskou univerzitu. Od roku 1957 tam byla řádnou profesorkou; publikovala již málo, ale dovedla k Ph.D. přes dvacet studentů.

H. Bohra do Dánska, odkud dále spravoval agendu Zentralblattu. Když tlak nacistů na odchod některých členů redakce v roce 1938 stoupl, Neugebauer rezignoval. Odešel s pomocí přátel na Brownovu univerzitu a v krátké době připravil projekt Americké matematické společnosti na vydávání MR.⁵⁰

Z lidských příběhů, které měly špatný konec, zmiňme jen osud Hilbertova doktora Ludwiga Blumenthala (1876–1944), který přes 30 let vykonával funkci redaktora *Mathematische Annalen*. Od roku 1924 byl také výkonným redaktorem *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* a členem rady DMV. Od roku 1905 byl profesorem na RWTH Aachen. Blumenthal zahynul v Terezíně. I jeho lze považovat částečně za aplikovaného matematika (využití výsledků v letectví).

Dalším o hodně mladším a známým aplikovaným matematikem byl Lothar Collatz (1910–1990). Jak tomu bylo tehdy zvykem, studoval na více univerzitách. V roce 1928 byl přijat ke studiu v Greifswaldu, a po pobytu v Mnichově a v Göttingenu promoval roku 1935 v Berlíně. Neemigroval a přežil válku v Německu. Složitost lidských osudů si ukažme na osudu Ericha Kamkeho (1890–1961), z jehož monografií o diferenciálních rovnicích ještě dnes těží mnoho aplikovaných matematiků. Nebyl Žid, ale měl u nacistů několik vroubků: jeho manželka byla Židovka a on sám byl žákem Edmunda Landaua; bylo o něm známo, že se staví k nacismu kriticky. V roce 1937 byl penzionován a později měl být poslán do koncentračního tábora. Velmi pozitivně je popsán v monografii [46], kde je zásluha o to, že se mu podařilo koncentračnímu táboru se vyhnout, připsána Süsovi.⁵¹ Kamkeho podpořila i *Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt* [Německá výzkumná laboratoř pro letectví]. Pak se jeví zcela pochopitelné, že v určitých momentech musel Süsovi vycházet vstříc. Süss měl v očích jiných matematiků spíše negativní a pronacistický profil; srovnej s [39].

Matematici a nacismus

Mezi matematiky se vyskytli také aktivní nacisté. Někteří z nich byli výbornými matematiky. Již zmíněný Vahlen založil s Bieberbachem časopis *Deutsche Mathematik*, který vycházel v letech 1936 až 1944.⁵² Časopis byl mj. známý rasovou teorií v matematické tvorbě. Z těch německých matematiků, kteří se významněji zapletli s nacismem, jmenujme některé: Bieberbach, Wilhelm Blaschke (1885–1962), Gustav Doetsch (1892–1977), Helmut Hasse (1898–1979), Süss, Oswald Teichmüller (1913–1943), Erhard Tornier (1894–1982), Vahlen, Werner Weber (1906–1975), Helmut Wielandt (1910–2001). Kolem *Deutsche Mathematik* se *navy tvořil* základ pro novou matematickou společnost a hodně ideologicky vedený časopis za války zanikl.

Pasívně přežívajícími byli např. Otto Haupt (1887–1988), Prandtl, Kurt Reide-meister (1893–1971) nebo Herman Schmidt (1908–1956). Je velmi obtížné se vžít do jejich situace. Například známý matematik řeckého původu Constantin Carathéod-

⁵⁰Viz podrobněji [58].

⁵¹Süß byl donedávna známý jako budovatel konferenčního centra v Oberwolfachu. Přes nesporné organizační zásluhy o rozvoj matematiky po II. světové válce zůstává Süß jednou z velmi sporných postav historie německé matematiky a v dnešní době o jeho roli víme podstatně více.

⁵²Vahlen se na podzim roku 1944 uchýlil do Prahy, kde na Německé univerzitě v následujícím letním semestru přednášel. Po skončení války zemřel pravděpodobně ve sběrném táboře ve Štěchovicích, ale jako místo úmrtí se zpravidla uvádí Praha.

dory (1873–1950) se snažil prokazatelně pomoci ohroženým přátelům. V monografii o něm [20] přesto nalezneme toto vyjádření: *V jeho případě je tragédií fakt, že konec konců nezískal z tohoto rozhodnutí [zůstat v Německu] nic, ale ztratil příliš mnoho.*

Některé obory i lidé, o nichž jsme se již zmínili, se těšili v nacistické éře velké přízni špiček politiky. Věnujme se podrobněji Prandtlovým aktivitám. Již v době příchodu do Göttingenu patřil v oblasti studia proudění ke špičce, ale materiální vybavení, které měl k dispozici, bylo ubohé. V oblasti zájmů se postupně posunul od vzducholodí k letadlům, od laminárního proudění k turbulenci a od malého tunelu pro studium proudění k nejmodernějšímu tunelu ve své době (1918), umožňujícímu měření pro rychlosti proudění cca 200 km/hod.

V době po I. světové válce jeho možnosti stále rostly. Pracoviště nabývalo na velikosti i významu, rozrůstalo se institucionální zázemí. Prandtl byl ředitelem AVA i KWI, ale vzhledem k velikosti institucí se v roce 1937 se stal ředitelem AVA göttingenský fyzik profesor Albert Betz (1885–1968). Prandtlův KWI měl na konci II. světové války (WW II) cca 40 pracovníků, zatímco AVA zaměstnávala během WW II asi 700 lidí; viz [35].

Poznamenejme ještě, že Německo bylo zásluhou Prandtlova ústavu, který se těšil štědré podpoře Hermanna W. Göringa (1893–1946), na předním místě teoretického zázemí aeronautiky; viz [21]. Prandtl se musel stýkat s pohlaváry nacistického režimu a o politice měl naivní představy. Prameny, které postihují tuto stránku jeho osobnosti, zaujímají rozdílná stanoviska. Někdy je zdůrazňována jeho snaha pomáhat režimem postiženým kolegům nebo jsou zdůrazňovány jeho pozitivní postoje, jindy jsou citovány jeho výroky podporující nacisty. V roce 1938 např. tvrdil, že boj proti Židům byl nutný pro sebezáchovu Němců a že Hitler *si nepřátelil milion lidí, zatímco osmdesát milionů tvoří jeho loajální a nadšené příznivci.*⁵³ Srovnej s [18] a [15].

Autoři [18] Irmgard Flügge-Lotz (1903–1974) a Wilhelm Flügge (1904–1990), od roku 1938 manželé, spolupracovali s Prandtlem v KWI řadu let a to i po roce 1933. Oba patřili k z hlediska nacistů k „politicky nespolehlivým“, avšak špičkovým pracovníkům v oblasti proudění. Ti o něm napsali:

*Prandtl rozuměl politice jen málo a byl občas bezmocný jako dítě. Věděl, že někteří lidé jsou jako šílení psi, ale nemohl pochopit, jak lze vztekle odmítat čistě logické argumenty, pokud jsou v rozporu s novou doktrínou.*⁵⁴

V době před WW II bylo Německo také na špičce vývoje počítačů. Konrad Zuse (1910–1995) byl „amatér“, jehož největším úspěchem byl počítač Z3, první funkční turingovsky úplný počítač řízený programem. Zprovoznil ho v květnu roku 1941, tedy v době, kdy již byl prostřednictvím AVA podporován německou vládou. Další elektronický počítač Z4 dotvořil až po válce; ten pak byl v provozu na *Eidgenössische Technische Hochschule* (ETH) [Švýcarský federální technologický institut] v Curychu v letech 1950–1955. Jeho předcházející verze byly reléové počítače využívající dvojkovou soustavu.

⁵³A až na nepodložené číselné odhady měl v době, kdy se takto vyjadřoval, bohužel pravdu.

⁵⁴Prandtl had little understanding for politics and was at times as helpless as a child. He knew that some of the people were like mad dogs, but he could not understand how results of clear logical argument could be rejected furiously if they went against the new doctrine.

Vraťme se ještě k již zmíněnému Süssovi a k historii mezi matematiky velmi známé instituce *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach* (MFO) [Matematický výzkumný ústav Oberwolfach]. Je to totiž ojedinělé těžiště moderní matematiky, jak „čisté“, tak i „aplikované“, které má své kořeny v popisované době. Podotýkám, že s trochou nadhledu je takové dělení matematiky málo smysluplné a hranice je oběma směry značně propustná.

Süss získal doktorát ve Frankfurtu pod Bieberbachovým vedením v roce 1920 a následně byl v letech 1921–1922 jeho asistentem v Berlíně. Potom působil v japonské Kagošimě v letech 1923–1928. Po návratu do Německa se habilitoval jako matematik v Greifswaldu, kde získal placené místo. Zabýval se geometrií a byl dle mínění jiných druhořadým matematikem jen s malou nadějí na získání profesury. To se však změnilo s příchodem nacistů k moci. Viz [41].

V zimním semestru 1934/1935 nastoupil ve Freiburgu na místo profesora Alfreda Loewyho (1873–1935), který ho ztratil pro svůj židovský původ.⁵⁵ Süss měl styky a přátele na důležitých místech. Byl členem *Sturmabteilung* (SA) od roku 1933, *Nationalsozialistische Deutsche Arbeiterpartei* (NSDAP) od roku 1937 a dalších prorežimních institucí. Kromě toho byl předsedou DMV a rektorem Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (1940–1945). V letech 1936–1941 byl Süss členem redakční rady prvních 5 ročníků časopisu *Deutsche Mathematik*.

V době války vzniklo roku 1944 další matematické pracoviště: *Reichsinstitut für Mathematik* (RfM). Ve hře bylo tehdy více projektů, za kterými stála jména Doetsch, Süss a Alwin Walther (1898–1967). V tomto konkurenčním boji Süss zvítězil díky administrativním, organizačním a politickým schopnostem; tak vznikl předchůdce MFO. Jeho sídlem byl *Lorenzenhof*, lovecké sídlo ve Schwarzwaldu. Zakládací listinu RfM podepsal Göring. Süss byl jeho ředitelem v letech 1944 až 1958. Když se později ředitelem MFO stal v roce 1994 Mathias Kreck (*1947), byly v archivu MFO nalezeny mj. i Süsovy osobní dokumenty a dokumenty DMV z doby WW II, osvětlující např. jeho roli při očišťování DMV od Židů a politicky nespolehlivých osob. Blíže viz [23].⁵⁶

Na začátku jsme zmínili několik popisů toho, co to je aplikovaná matematika, a pokusili jsme se čtenáři přiblížit, jak se v Německu postupně prosazovala a jak ji ovlivnil a zasáhl nacismus. Ve 20. století se začaly čistá a aplikovaná matematika odlišovat, ale současně se hranice mezi nimi stávala stále propustnější. Poznamenejme, že např. matematické vzdělání techniků v Německu mělo tehdy výbornou úroveň.

I když jsme se omezili převážně na Berlín a Göttingen, další velké centrum *Deutsche Forschungsanstalt für Luftfahrt* (DFL) [Letecký výzkumný ústav, později Výzkumný ústav Hermanna Göringa] vzniklo roku 1937 v Braunschweigu. Mělo v době WW II až 1500 zaměstnanců, z toho 150 vědeckých pracovníků. Ze známých matematiků v něm pracovali např. topologové Herbert Seifert (1907–1996) a William Threlfall (1888–1949). Mělo i oddělení raketové techniky založené na pevných palivech; v této

⁵⁵Loewy se věnoval algebře a některé důležité pojmy jsou spojovány s jeho jménem. Loewyho strýcem byl Fraenkel, o kterém jsme se již zmínili.

⁵⁶Dokumenty podrobně zkoumal historik matematiky Volker R. Remmert (*1966) z Wuppertalu a zjistil, že některé byly patrně záměrně odstraněny. Jak spornou postavou Süss byl svědčí výrok jednoho z göttingenských profesorů Felixe Bernsteina (1878–1956), zbaveného z rasových důvodů místa v roce 1933, který napsal v Süsově nekrologu *Po Felixi Kleinovi neudělal pro německou matematiku nikdo tolik, jako Wilhelm Süss* [Seit Felix Klein hat sicher niemand so viel für die deutsche Mathematik geleistet wie Wilhelm Süss]; viz [34], a také [23] a [46], kde je výrok v překladu citován.

souvislosti je patrně nejznámější komplex *Heeresversuchsanstalt Peenemünde* [Vojenský výzkumný ústav Peenemünde] vzniklý na ostrově Usedom, kde pracoval známý Wernher von Braun (1912–1977).

Text tohoto rozsahu nemůže podrobněji popsat celý vývoj meziválečné aplikované matematiky v Německu. Přináší jen střípky poznatků o jejich vztazích k čisté matematice ilustrované osudy jejich představitelů a také poznatky o mezilidských vztazích, o střetech dobra a zla a o rozmanitosti lidských osudů. Životopisné údaje jsem čerpal z webu [33], nicméně všechny jsem nezávisle ověřil. Dějištěm popisovaných událostí bylo převážně Německo, a to v období, kdy bylo nesporně matematickou velmocí a kdy také o toto své výlučné postavení přišlo.

Poděkování. Práce na tomto textu byla podpořena grantem GA ČR *Dopad první světové války na utváření a proměny vědeckého života matematické komunity*, registrační číslo 18-00449S.

L i t e r a t u r a

- [1] Applied Mathematics.
<https://www.nature.com/subjects/applied-mathematics> [5. 2. 2019].
- [2] Applied Mathematics.
<https://www.seas.harvard.edu/applied-mathematics> [5. 2. 2019].
- [3] BEČVÁŘOVÁ, M., NETUKA, I.: *Dopady první světové války na mezinárodní spolupráci matematiků*. Česká technika – nakladatelství ČVUT, 2019.
- [4] BEGEHR, H., a kol.: *Mathematik in Berlin. Geschichte und Dokumentation* (ve dvou svazcích). Shaker, 1998.
- [5] BEGEHR, H., a kol.: *Mathematics in Berlin*. Springer, 1998.
- [6] BEHNKE, H.: *Rückblick auf die Geschichte der Mathematischen Annalen*. Math. Ann. 200 (1973), I–VII.
- [7] BERGMANN, B.: *Transcending tradition. Jewish mathematicians in German-speaking academic culture*. Springer, 2012.
- [8] Besprechung von Vertreten der angewandten Mathematik in Göttingen am 22. und 23. März 1907. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 16 (1907), 497–519.
- [9] BÍLÝ, J., TRUKSA, L.: *Prof. Emil Schoenbaum*. Aktuárské vědy 8 (1948), 49–52.
- [10] BOHR, H., NEUGEBAUER, O.: *Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aus dem Jahre 1926, Mathematisch-Physikalische Klasse, 8–22.
- [11] DRUCKER, D.Č.: *William Prager (1903–1980)*. In: Memorial Tributes: Volume 2, National Academy Press, 1984, 233–235.
- [12] ECKERT, M.: *Arnold Sommerfeld. Science, life and turbulent times 1868–1951*. Springer, 2013.
- [13] ECKERT, M.: *Ludwig Prandtl. A life for fluid mechanics and aeronautical research*. Springer, 2019.
- [14] EDEN, A., IRZIG, G.: *German mathematicians in exile in Turkey: Richard von Mises, William Prager, Hilda Geiringer, and their impact on Turkish mathematics*. Historia Math. 39 (2012), 432–459.

- [15] EPPLE, M., KARACHALIOS, A., REMMERT, V. R.: *Aerodynamics and mathematics in national socialist Germany and fascist Italy: A comparison of research institutes*. *Osiris* 20 (2005), 131–158.
- [16] EPPLE, M., KIELDSEN, T. H., SIEGMUND-SCHULZE, R.: *From “mixed” to “applied” mathematics: Tracing an important dimension of mathematics and its history*. *Oberwolfach Rep.* 10 (2013), 657–733.
- [17] EPPLE, M., REMMERT, V., SCHAPPACHER, N.: *Mini-workshop: History of mathematics in Germany, 1920–1960*. *Oberwolfach Rep.* 7 (2010), 109–140.
- [18] FLÜGGE-LOTZ, I., FLÜGGE, W.: *Ludwig Prandtl in the nineteen-thirties: reminiscences*. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 5 (1973), 1–8.
- [19] FOLTA, J.: *Němečtí matematici a československý region*. *PMFA* 39 (1994), 165–173.
- [20] GEORGIADOU, M.: *Constantin Caratheodory – mathematics and politics in turbulent times*. Springer, 2004.
- [21] HIRSCHHEL, E. H.: *Aeronautical research in Germany: From Lilienthal until today*. Springer, 2004.
- [22] *Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 1 (1890–1891), 1–22.
- [23] JACKSON, A.: *Oberwolfach, yesterday and today*. *Notices Amer. Math. Soc.* 47 (2000), 758–765.
- [24] KLEIN, F.: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. *Math. Ann.* 43 (1893), 63–100.
- [25] KLEIN, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I. Arithmetik, Algebra, Analysis*. Springer, 1924 (první vydání Teubner, 1908).
- [26] KLEIN, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II. Geometrie*. Springer, 1925 (první vydání Teubner, 1909).
- [27] KLEIN, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus III. Präzisions- und Approximationsmathematik*. Springer, 1928.
- [28] KLEIN, F., SOMMERFELD, A.: *Über die Theorie des Kreisels I–IV*. B. G. Teubner, 1897–1910.
- [29] KLEIN, F., ZIWET, A.: *Lectures on mathematics (Evanston Colloquium)*. Macmillan, 1894.
- [30] VON MISES, R.: *Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven*. *Z. Math. Phys.* 52 (1905), 44–85.
- [31] NEUENSCHWANDER, E., BURMANN, H.-W.: *Die Entwicklung der Mathematik an der Universität Göttingen*. Dostupné z <https://www.uni-math.gwdg.de/entwicklung.xhtml> [14. 3. 2019].
- [32] VON NEUMANN, J.: *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren*. *Math. Ann.* 102 (1930), 49–131.
- [33] O’CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F.: *MacTutor history of mathematics*. Dostupné z <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html> [20. 8. 2019]
- [34] OSTROWSKI, A.: *Wilhelm Süss, 1895–1958. Gedächtnisrede gehalten an der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg i. Br. am 12. Juli 1958*. *Freiburger Universitätsreden*, Hans Ferdinand Schulz, 1958.

- [35] OSWATITSCH, K., WIEGHARDT, K.: *Ludwig Prandtl and his Kaiser-Wilhelm-Institut*. Annu. Rev. Fluid Mech. 19 (1987), 1–26.
- [36] PINL, M.: *Kolegen in einer dunklen Zeit*. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 71 (1969), 167–228; 72 (1971), 165–189; 73 (1971/1972), 153–208.
- [37] PINL, M., DICK, A.: *Kollegen in einer dunklen Zeit. Schluß*. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 77 (1976), 161–164.
- [38] RÉDEI, M.: *Why John von Neumann did not like the Hilbert space formalism of quantum mechanics (and what he liked instead)*. Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. 21 (1996), 493–510.
- [39] REMMERT, V. R.: *Mathematicians at war. Power struggles in Nazi Germany's mathematical community: Gustav Doetsch and Wilhelm Süss*. Rev. Histoire Math. 5 (1999), 7–59.
- [40] REMMERT, V. R.: *Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im 'Dritten Reich' I, II: Krisenjahre und Konsolidierung (1. část), Fach- und Parteipolitik (2. část)*. Mitt. Dtsch. Math.-Ver. 12 (2004), 159–177 a 223–245.
- [41] REMMERT, V. R.: *Selbstansichten auf das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach, 1944–1959: Auf der Suche nach einer institutionellen Identität*. Math. Semesterber. 66 (2019), 1–13.
- [42] ROWE, D. E.: *Klein, Hilbert, and the Göttingen mathematical tradition*. Osiris 5 (1989), 186–213.
- [43] ROWE, D. E.: *Episodes in the Berlin–Göttingen rivalry (1870–1930)*. Math. Intelligencer (22) 1 (2000), 60–69.
- [44] ROWE, D. E.: *Transforming tradition: Richard Courant in Göttingen*. Math. Intelligencer (37) 1 (2015), 20–29.
- [45] ROWE, D. E.: *A richer picture of mathematics. The Göttingen tradition and beyond*. Springer, 2018.
- [46] SEGAL, S. L.: *Mathematicians under the Nazis*. Princeton University Press, 2003.
- [47] SCHUBRING, G.: *120 Jahre Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Neue Ergebnisse zu ihrer Geschichte*. Mitt. Dtsch. Math.-Ver. 18 (2010), 103–108.
- [48] SCHUBRING, G.: *Felix Klein. Düsseldorf 1849–Göttingen 1925*. History of ICMI. Dostupné z <https://www.icmihistory.unito.it/portrait/klein.php> [1. 12. 2020]
- [49] SIEGMUND-SCHULTZE, R.: *Mathematicians fleeing from Nazi Germany. Individual fates and global impact*. Princeton University Press, 2009.
- [50] SRINIVASAN, B.: *Ruth Moufang, 1905–1977*. Math. Intelligencer (6) 2 (1984), 51–55.
- [51] ŠIŠMA, P.: *Georg Hamel and Richard von Mises in Brno*. Historia Math. 29 (2002), 176–192.
- [52] TOBIES, R.: *Die Stellung deutscher mathematischer Fachgesellschaften zur angewandten Mathematik (bis 1917)*. Mitt. Math. Ges. DDR 1–2 (1982), 133–154.
- [53] TOBIES, R.: *Warum wurde die Deutsche Mathematiker-Vereinigung innerhalb der Gesellschaft deutsche Naturforscher und Ärzte gegründet?* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 93 (1991), 30–47.
- [54] TOBIES, R.: *Iris Runge – A life at the crossroads of mathematics, science and industry*. Birkhäuser (Springer), 2012.
- [55] TOBIES, R.: *Felix Klein. Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Springer, 2019.

- [56] TOLLMEN, W., et al.: *Das Institut für angewandte Mathematik und Mechanik*. In: L. Prandtl, F. W. Riegels: *Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen*, Springer, 1961.
- [57] ULAM, S.: *John von Neumann 1903–1957*. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 1–49.
- [58] VESELÝ, J.: *Otto Eduard Neugebauer (1899–1990)*. PMFA 65 (2020), 19–35.
- [59] WEIGAND, H.-G.: *What is and what might be the legacy of Felix Klein?* Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13, Springer, 2016, 321–334.
- [60] ZIEREN, G. R.: *American engineering education in international perspective: Alois Riedler and the reform of German engineering, 1893–1914*. Paper presented at 2006 Annual Conference & Exposition, Chicago, Illinois. Dostupné z <https://dx.doi.org/10.18260/1-2-1263>.