Sylva Peclinovská

Rovnice v úlohách mezinárodního šetření TIMSS a jejich využití

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 4, 203–211

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149312`

ROVNICE V ÚLOHÁCH MEZINÁRODNÍHO ŠETŘENÍ TIMSS A JEJICH VYUŽITÍ

Sylva Peclinovská

Mezinárodní šetření TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) se zaměřuje na zjišťování úrovně znalostí a dovedností žáků v matematice a v přírodních vědách. Cílovou skupinou tohoto projektu jsou žáci ve věku 9 až 10 let a dále pak ve věku 13 až 14 let, tedy u nás žáci 4. a 8. ročníků základní školy.

Šetření je na mezinárodní úrovni koordinováno Mezinárodní asociací pro hodnocení výsledků vzdělávání (IEA) a v České republice je jeho realizátorem Česká školní inspekce.

Česká republika je do testování žáků zapojena již od prvního ročníku projektu, tedy od roku 1995, a kromě roku 2003 se zapojila i do všech následujících ročníků, které probíhají v pravidelných čtyřletých intervalech. Od roku 2011 se však mezinárodního šetření TIMSS účastní v České republice pouze žáci 4. ročníků základní školy.

České školství má tedy za sebou již poměrně dlouhé období testování žáků. Tato skutečnost nepochybně přináší možnost dlouhodobě sledovat vývoj úspěšnosti českých žáků při řešení matematických úloh, ale také porovnání v mezinárodním kontextu (s vybranými zeměmi či s mezinárodním průměrem).

Z pohledu učitele v praxi je však neméně významné také získání již poměrně široké zásoby úloh, které byly ze šetření TIMSS v rámci jednotlivých ročníků uvolněny a které tedy mají učitelé volně k dispozici pro výuku, přičemž spektrum možností jejich využití je značně široké. Úlohy mohou dobře posloužit nejen pro zpestření výuky, jejich učební potenciál se může stát základem např. pro gradované úlohy v rámci diferencované výuky nebo pro diagnostiku úrovně porozumění žáků např. ve srovnání s národním průměrem.

Všechny uvolněné úlohy včetně jejich komentářů má učitel k dispozici nejen elektronicky na stránkách České školní inspekce[1], ke každému ročníku vychází jejich soubor také v tištěné podobě. Navíc byla řada úloh, které umožňují automatické vyhodnocení, vložena do elektronického testovacího systému InspIS SET České školní inspekce. Učitelé si z těchto úloh mohou sestavit své vlastní testy nebo přímo použít testy již vytvořené.

Matematický obsah je v uvolněných úlohách pro 4. ročník základní školy rozdělen do tří tematických okruhů: Čísla, Geometrické tvary a měření, Znázornění dat. V tomto článku je pozornost zaměřena na uvolněné úlohy týkající se rovnic, které společně s výrazy a vztahy představují jednu z částí prvního ze jmenovaných tematických okruhů.

Ačkoliv je výuka rovnic dle výstupů RVP ZV (2017) zařazena až na 2. stupeň základní školy (většinou do 8. ročníku), s rovnicemi se žáci setkávají již na 1. stupni. Zde však ještě obvykle nemluvíme přímo o řešení rovnic, ale spíše o určování rovnosti či nerovnosti dvou hodnot nebo o doplňování chybějících hodnot, aby rovnost platila.

Téma rovnic u žáků většinou nepatří mezi neoblíbená témata, protože algoritmy pro jejich řešení lze při troše úsilí poměrně dobře natrénovat, stejně jako využití rovnic při řešení slovních úloh. Rovnice se tak často stávají nástrojem pro řešení náročnějších slovních úloh, do nichž žák nemá vhled a logickou úvahou je není schopen řešit.

Uvolněné úlohy z několika posledních ročníků šetření TIMSS, které jsou v tématu rovnic k dispozici pro 4. ročník, zcela odpovídají typologii úloh, se kterými se žáci obvykle na 1. stupni setkávají. Jedním takovým typem jsou úlohy, v nichž má žák za úkol určit chybějící číslo nebo znaménko v číselném záznamu, jak tomu je například u úlohy M30 (obr. 1) ze šetření v roce 2015.

V úloze na obrázku 1 má žák za úkol vybrat z nabídky číslo, které lze umístit do rámečku, aby byl výpočet správný. Zvolit číslo do rámečku, aby rovnost platila, se může na první pohled

[1] `https://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/TIMSS/Uvolnene-testove-ulohy`

Úloha M30 (M05-05)

$\square - 87 = 23$

Které číslo bys napsal do čtverečku, aby byl výsledek správný?

A) 64 B) 100 C) 104 D) 110

Cíl úlohy: Určení chybějícího čísla nebo znaménka v číselném zápisu (např. 17 + w = 29)

Dovednost: Prokazování znalostí

Obtížnost: 4

Obr. 1: Uvolněná úloha z TIMSS 2015

jevit jako poměrně snadná úloha. Vždyť žák 4. ročníku již přeci ovládá sčítání i odčítání čísel do 1000 a úloha pro něj nepřináší žádnou novou a neznámou situaci. Bohužel skutečnost, že pouze necelých 45 % českých žáků označilo správné řešení, tedy odpověď D), dokazuje, že označení testové úlohy nejvyšší hodnotou obtížnosti (známkou 4) je adekvátní. Pomineme-li poměrně nízké procento žáků, kteří se nejspíše dopustili numerické chyby, když označili odpovědi B) nebo C), zůstává 37 % žáků, kteří se domnívali, že správnou odpovědí je A). Tito žáci se tedy nejspíše neorientují v písemném záznamu rovnice a ani vztahu menšenec, menšitel a rozdíl nejspíše nerozumí (Janoušková et al., 2019).

Chybějící první člen rovnice představuje pro mnohé žáky poměrně náročný problém. Stejně tak jako jsme zvyklí číst zleva doprava, i při řešení úloh žáci postupují v tomto směru (Budínová, 2018). Jenže při čtení zleva hned první člen rovnice schází. Pokud tedy žák nepoužije strategii zkoušet do čtverečku dosazovat čísla z nabídky, je velmi často ztracen, protože má pocit, že se nemá tzv. čeho chytit.

Umístění neznámé, v našem případě prázdného čtverečku (rámečku) pro doplnění čísla, tak může představovat jeden z možných gradačních parametrů při přípravě těchto typů rovnic.

a) $110 - 87 = \square$
b) $110 - \square = 23$
c) $\square - 87 = 23$

Ve všech těchto případech je zadání rovnice stejné, liší se však umístění neznámé, kterou budou žáci hledat. První případ a) je nejsnazší. Jde o typickou úlohu, kterou žáci většinou ve formě tzv. sloupečků řeší poměrně hojně. Druhý typ b) je již o něco náročnější. Žák zná rozdíl čísel a má určit menšitel. Skutečnost, že je v zadání uveden první člen rovnice, ji ale činí snadnější než již zmiňovaný typ c). Dokladem toho je i procentuálně výrazně vyšší úspěšnost řešitelů v rovnicích typu b) oproti typu c). V úloze typu b) se objevují spíše numerické chyby, namísto volného zacházení se vztahem menšenec − menšitel = rozdíl, jak tomu bývá u úloh typu c) a jak tomu bylo i u 37 % žáků, kteří v úloze M30 na obrázku 1 považovali za správnou odpověď číslo 64, tedy rozdíl 87 − 23.

Z toho je patrné, že již pouhou změnou umístění neznámé může učitel rychle a snadno tvořit různě náročné úlohy. Přičemž ideální by bylo, kdyby se žáci ve výuce setkávali se všemi těmito typy rovnic rovnoměrně.

Další možnou obměnou uvedených typů úloh, která pro žáky může znamenat novou výzvu, je z pohledu žáka nestandardní zadání rovnosti, tedy $23 = 110 - 87$. I tento typ můžeme gradovat různým umístěním neznámé. Již pouhé umístění symbolu rovnosti doleva může některým žákům výrazně zvýšit náročnost hledání řešení.

Ve všech předchozích návrzích modifikace jedné z uvolněných testových úloh bylo zatím využito jen postupného skrývání některého ze zadaných čísel rovnosti. Stejně si ale můžeme pohrát s hledáním znamének v rovnici. Žáci dostanou pouze čísla 23, 87, 110 a mají sestavit a napsat co nejvíce rovností. V našem případě pak řešením mohou být rovnosti $23 + 87 = 110$, $87 + 23 = 110$, $110 - 87 = 23$ apod. Která z těchto řešení budou žáci považovat za shodná, je už otázkou diskuze třídy.

Také tento typ úlohy je možné znesnadnit např. přidáním dalších čísel k původním třem tak, aby žák mezi zadanými čísly musel hledat ta, ze kterých půjde rovnost sestavit. Celou řadu úloh a her tohoto typu nabízí metodika ABAKU (dostupná na stránkách abaku.org), která výrazně přispívá k upevňování aritmetických spojů u žáků.

Jak již bylo řečeno v úvodu, rovnice pro žáky představují nástroj (mnohdy jediný nástroj) k řešení slovních úloh. Na druhou stranu i slovní úlohy mohou být nápomocny při uchopování rovnic. Zůstaneme-li ještě u uvolněné úlohy M30 na obrázku 1, velmi dobře může jejímu správnému uchopení posloužit slovní úloha typu „Myslím si číslo . . . “. Přeformulování symbolického zápisu rovnice do slov představuje možnou cestu, jak zápisu rovnice porozumět a získat do něj vhled. Zadání úlohy M30 tak může znít: „Myslím si číslo. Když od něj odečtu 87, dostanu číslo 23. Jaké číslo jsem si myslel?“

Slovní úlohy typu „Myslím si číslo. . . “, které lze považovat za propedeutiku rovnic, žáci zprvu řeší metodou pokus-omyl. Nejprve tipují různá čísla, která by mohla být oním myšleným číslem. Jejich ověřováním v zadání se zároveň učí pracovat s chybou a postupně tak zpřesňují své odhady a vytvářejí první strategie (Hejný, 2014). Získáním více zkušeností s tímto typem antisignálních slovních úloh pak většina žáků posléze odhalí strategii tzv. řešení odzadu ($23 + 87 =$ myšlené číslo), kterou jsou pak schopni bez problémů aplikovat i do zmiňovaného symbolického zadání rovnice $\square - 87 = 23$.

Při procházení jednotlivých ročníků šetření TIMSS je v rámci tématu rovnic patrné silné zastoupení úloh s cílem určit chybějící číslo nebo znaménko v číselném zápisu (např. $17 + x = 29$). Kromě úloh podobných již prezentované úloze M30 (obr. 1) se mezi uvolněnými úlohami vyskytují také úlohy, které typologicky odpovídají úlohám na obrázcích 2 a 3.

Úloha M29 (M02-05)

Pro kterou hodnotu $\triangle$ bude zápis pravdivý?

$6 + 15 = \triangle + 10$

A) 11 B) 21 C) 25 D) 31

Cíl úlohy: Určení chybějícího čísla nebo znaménka v číselném zápisu (např. 17 + w = 29)

Dovednost: Používání znalostí

Obtížnost: 4

Obr. 2: Uvolněná úloha z TIMSS 2015

Úloha M30 (M03-06)

64 : ☐ = ☐
V uvedeném výpočtu ☐ nahrazuje stejné číslo. Které číslo ☐ nahrazuje?
A) 4
B) 8
C) 16
D) 32

Obsah: číselné zápisy s přirozenými čísly
Cíl úlohy: určování chybějícího čísla nebo znaménka v číselném zápisu
Dovednost: používání znalostí
Obtížnost: úroveň 3

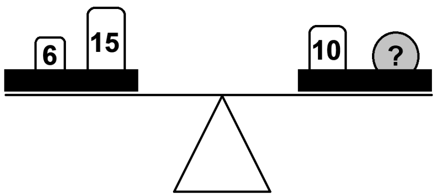
Obr. 3: Uvolněná úloha z TIMSS 2007

Také v těchto dvou úlohách jde o tzv. rámečkové úlohy. Žák má tedy opět za úkol určit číslo pasující na místo rámečku. Oproti zadání úlohy na obrázku 1, které přímo nabádalo k vepsání čísla do čtverečku (rámečku), má však čtvereček u úlohy na obrázku 3 spíše roli neznámé (Tomášek et al., 2009). Zde totiž již hledáme číslo, kterým by bylo možné symbol čtverečku nahradit. Stejně je tomu i v případě úlohy na obrázku 2, kde je neznámá vyjádřena pomocí symbolu trojúhelníku. Je na zvážení, nakolik může volba tvaru symbolu neznámé ovlivnit náročnost úlohy a zda pro žáka zvyklého jen na tradiční rámečkové úlohy čtvercového, obdélníkového a možná kruhového tvaru nebude atypický trojúhelníkový tvar neznámé jen další překážkou při uchopování úlohy.

Z hlediska školní praxe stojí u úlohy na obrázku 2 za zmínku 42,5% četnost odpovědi D). V těchto odpovědích se projevila velmi často se vyskytující žákovská chyba zápisu postupu výpočtů (Hejný & Kuřina, 2015), která poukazuje na nesprávné porozumění pojmu rovnosti. Nebývá výjimkou, když se na tabuli nebo v sešitě žáků objevují zápisy $6+15 = 21+10 = 31$, jak tomu bylo i u úlohy na obrázku 2. Je na učiteli, aby při objevení tohoto, dalo by se říci volného, používání znaku rovnosti žáky vedl k porozumění této chybě a k její postupné korekci.

Dalším výrazným jevem, který je možné sledovat v odpovědích žáků, je téměř stejná četnost odpovědí B) i A) (v případě A) 26,5 %, u B) 27 %. I v této úloze se projevilo, že více než čtvrtina českých žáků pojmu rovnost nerozumí a nedokáže ani z daných čtyř možností jednu vybrat a do rovnosti ji doplnit tak, aby platila. Je otázkou, jak tuto poměrně závažnou skutečnost uchopit v praxi a jak budovat porozumění žáků, aby symbol rovnosti nepoužívali jen formálně, ale skutečně mu rozuměli.

Při zavádění rovnic se velmi často využívá připodobnění k miskovým váhám a jejich vyvažování. Jde o snahu strukturálně zadanou rovnici uchopit pomocí sémantiky. Podle mých zkušeností je však mylné se domnívat, že pouhé přirovnání rovnic k váhám výrazně přispěje žákovu porozumění. Žáci potřebují nejprve získat vlastní zkušenost, a to tím spíše, když čím dál více dětí v době digitálních vah nemá s miskovými váhami a využíváním závaží vůbec žádnou zkušenost. Nejednou mě někteří žáci na 1., ale i na 2. stupni zaskočili tím, kolik pokusů museli provést, než zjistili, co je potřeba udělat, aby se vychýlené misky vah opět dostaly do rovnováhy. Nelze tedy předpokládat, že pouhým vysvětlením, jak váhy a potažmo rovnice fungují, si budou žáci schopni vytvořit nějakou funkční představu. Je proto ideální, když princip rovnosti mohou sami objevit na základě manipulativní činnosti např. právě hrou se skutečnými miskovými váhami (jako dobrá náhrada miskových vah může posloužit i obyčejné ramínko se zavěšenými sáčky).



Obr. 4: Modifikace rovnice $6 + 15 = x + 10$ do sémantiky miskových vah

Uchopení rovnice sémanticky by mělo předcházet strukturálnímu řešení rovnic. Bohužel však ani v uvolněných matematických úlohách z TIMSS pro 4. ročník se zatím s rovnicemi na sémantické úrovni nepracuje. Je tedy na učiteli, aby hledal způsoby, jak strukturálně zadané rovnice převede do jazyka sémantiky a nechá tak děti získávat s rovnicemi zkušenosti. Pokud žáci pomocí dostatečné manipulace např. se zmiňovanými váhami již porozuměli pojmu rovnost, může jim učitel připravit řadu obrázkově zadaných rovnic. Na obrázku 4 je jako příklad uvedena úprava zadání původní úlohy M29.

Shrnutí

Mezinárodní šetření TIMSS přináší pro učitele velkou zásobu uvolněných úloh, které prošly řadou ověřovacích pilotáží. Tyto úlohy se mohou stát nejen inspirací do výuky, ale i dobrým nástrojem sebereflexe zvolených učebních postupů na základě možnosti srovnání úspěšnosti své třídy s národním i mezinárodním průměrem.

Tento článek se zaměřil na uvolněné úlohy z TIMSS pro 4. ročník ZŠ, které představují nejčastěji se objevující typy úloh, které se vztahují k tématu rovnic. Téma rovnic je však bohužel v dostupných úlohách prezentováno pouze ve strukturální rovině a nenajdeme zde ani příliš velkou pestrost úloh. Přesto se článek snaží čtenářům nabídnout alespoň několik podnětů, jak je možné úlohy, které jsou k dispozici, různě modifikovat a měnit tak i jejich náročnost. Že práce s těmito úlohami má ve výuce také své opodstatněné místo, naznačují výsledky žáků, kteří při řešení úloh s jednoduchými rovnicemi zatím nejsou příliš úspěšní ani na nejnižší úrovni poznání, tedy prokazování znalosti.

Literatura

[1] Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně ZŠ k řešení některých úloh v matematice*. Masarykova univerzita.

[2] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Pedagogická fakulta UK.

[3] Hejný, M., & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika*. Portál.

[4] Janoušková, S., Tomášek, V., Peclinovská, S., Pražáková, D., Frýzek, M., Houfková, J., & Mandíková, D. (2019). *Publikace

s uvolněnými úlohami z mezinárodního šetření TIMSS: Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 1. stupeň základní školy. ČŠI.

[5] Tomášek, V., Frýzek, M., Frýzková, M., Janoušková, S., Mandíková, D., & Palečková, J. (2009). *Výzkum TIMSS 2007: Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 4. ročník.* ÚIV.

Abstract

Released items from international survey TIMSS could become an inspiration for teachers to enrich teaching, provide a source of additional exercises, or they could be used to diagnose the level of understanding and capabilities of pupils. This work focuses on problems connected to equations for the primary school and describes Czech pupils' difficulties when solving them. Furthermore, it shows how to modify these problems and create problems with increasing difficulty that can be used for differentiated teaching.

Sylva Peclinovská
Základní škola Planá nad Lužnicí, okres Tábor
ČSLA 65
391 11 Planá nad Lužnicí