Emil Calda

Něco málo o prvočíslech

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 1, 58–60

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149381`

NĚCO MÁLO O PRVOČÍSLECH

Emil Calda

V následujících řádcích se budeme zabývat trojicemi $(p, p + d, p + 2d)$, v nichž p je prvočíslo větší než tři a d je přirozené číslo takové, že čísla $p + d, p + 2d$ jsou rovněž prvočísla. Pokusíme se nejprve několik těchto trojic najít mezi všemi prvočísly menšími než sto; za tím účelem si tato prvočísla, uvedená např. v učebnici [1], připomeneme:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$

Snadno se přesvědčíme, že s ohledem na podmínku $p > 3$ vyhovují daným požadavkům například trojice:

$$
\begin{array}{rrrr}
(7, 13, 19), & (11, 17, 23), & (31, 37, 43), & (41, 47, 53), \\
(17, 29, 41), & (29, 41, 53), & (47, 59, 71), & \\
(23, 41, 59), & (43, 61, 79), & (61, 79, 97), & \\
(5, 29, 53), & (19, 43, 67), & & \\
(11, 41, 71), & (37, 67, 97), & & \\
(11, 47, 83), & (17, 53, 89), & & \\
(5, 47, 89). & & &
\end{array}
$$

Všimněme si nyní, že pro trojice v prvním řádku je $d = 6$, ve druhém $d = 12$, ve třetím $d = 18$, ve čtvrtém $d = 24$, v pátém $d = 30$, v šestém $d = 36$ a v posledním je $d = 42$. Pokusíme-li se najít trojice prvočísel tohoto typu, ve kterých číslo d není dělitelné šesti, zjistíme, že žádné takové mezi prvočísly většími než tři a menšími než sto neexistují. Na základě tohoto pozorování můžeme se odvážit vyslovit domněnku, že platí:

V každé trojici prvočísel $(p, p + d, p + 2d)$*, kde* $p > 3$*, je číslo* d *dělitelné šesti.*

Její důkaz je poměrně jednoduchý a je založen na tom, že každé prvočíslo větší než tři dává při dělení šesti zbytek 1 nebo 5, takže je lze vyjádřit ve tvaru $6n + 1$ nebo $6n + 5$, kde n je celé nezáporné číslo. Žádné číslo tvaru $6n + 2$, $6n + 4$, $6n + 3$ totiž prvočíslem být nemůže, neboť v prvních dvou případech by takové číslo bylo dělitelné dvěma a v třetím případě třemi.

Předpokládejme tedy, že existuje trojice prvočísel $(p, p+d, p+ + 2d)$, kde $p > 3$; dokážeme, že číslo d je dělitelné šesti. Je zřejmé, že číslo d je dělitelné dvěma, neboť čísla $p + d, p$ jsou lichá, takže jejich rozdíl $(p+d)-p$ je číslo sudé. Všimněme si dále, že v uvažované trojici prvočísel mohou nastat pouze tyto dvě možnosti: buď aspoň dvě jsou tvaru $6n + 1$, anebo aspoň dvě mají tvar $6n + 5$. Uvažujme nejprve, že dvě z nich mají tvar $6n+1$. V tomto případě nastane právě jedna z těchto tří možností:

1. Je-li $p = 6m + 1$ a $p + d = 6k + 1$, potom $d = 6(k - m)$.
2. Je-li $p = 6m + 1$ a $p + 2d = 6k + 1$, potom $2d = 6(k - m)$, a tedy $d = 3(k - m)$.
3. Je-li $p+d = 6m+1$ a $p+2d = 6k+1$, potom $d = 6(k-m)$.

Zjistili jsme tak, že u všech těchto možností je číslo d dělitelné třemi.

Probereme-li stejným způsobem případ, že dvě z uvažovaných prvočísel mají tvar $6n + 5$, dojdeme k témuž závěru: číslo d je dělitelné třemi. A protože už víme, že číslo ds je dělitelné i dvěma, je dělitelné šesti. Tím je dokázáno, že věta, kterou jsme „odpozorovali“ na prvočíslech menších než sto, platí pro všechna prvočísla.

Na závěr této krátké exkurze do světa prvočísel si ještě všimneme, že následující druhé mocniny prvočísel dávají při dělení dvanácti zbytek jedna:

$$
\begin{aligned}
5^2 &= 25 = 2 \cdot 12 + 1, & 7^2 &= 49 = 4 \cdot 12 + 1,\\
11^2 &= 121 = 10 \cdot 12 + 1, & 13^2 &= 169 = 14 \cdot 12 + 1,\\
17^2 &= 289 = 24 \cdot 12 + 1, & 19^2 &= 361 = 30 \cdot 12 + 1.
\end{aligned}
$$

Dokážeme, že tuto vlastnost mají všechna prvočísla větší než tři. Jak už víme, každé takovéto prvočíslo lze vyjádřit ve tvaru $6n + 1$ nebo $6n + 5$, kde n je celé nezáporné, takže pro druhé mocniny těchto prvočísel máme:

$$(6n+1)^2 = 36n2 + 12n + 1 = 12(3n2 + n) + 1,$$
$$(6n+5)^2 = 36n2 + 60n + 25 = 12(3n2 + 5n + 2) + 1.$$

Tím je dokázána věta:

Každé prvočíslo větší než tři dává při dělení dvanácti zbytek jedna.

Jsem si plně vědom toho, že výše uvedené věty nejsou příliš důležité a že poznatky o prvočíslech rozšiřují jen mírně; přesto však – zejména pro některé středoškolské studenty – mohou být (včetně svých důkazů) zajímavé. Přehled výsledků mnohem významnějších může čtenář najít např. v [1].

Literatura

[1] Fuchs, E. (1998). Co ještě nevíme o přirozených číslech aneb Některé vlastnosti prvočísel, *Učitel matematiky* 7, 1–8.

Abstract

The article deals with primes of the type $(p, p+d, p+2d)$. Gradually, some properties of such triplets of primes are deduced. The theorem "when divided by 12, each prime bigger than 3 has a remainder of 1" is proved.

Emil Calda
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz