Učitel matematiky

Petr Eisenmann; Jiří Přibyl

Analogie - užitečná heuristická strategie

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 3, 129–135

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149394`

ANALOGIE
–
UŽITEČNÁ HEURISTICKÁ STRATEGIE

Petr Eisenmann, Jiří Přibyl[1]

Tento příspěvek představuje užitečnou heuristickou strategii, kterou můžeme s úspěchem využívat při řešení úloh ze školské matematiky.

V běžném životě i ve vědě často předpokládáme, že v podobných situacích platí i obdobné vztahy mezi věcmi, lidmi, jevy, objekty dané disciplíny apod. Například v medicíně se hodně využívá analogie mezi člověkem a zvířaty. Nový lék se obvykle nejprve zkouší na zvířatech, neboť se předpokládá, že jejich reakce na něj bude podobná jako později u člověka (Kopka, 2013).

I v matematice hraje analogie velmi významnou roli. Matematické pojmy izomorfismus nebo homomorfismus matematických struktur jsou vyjádřením toho, že mezi těmito strukturami existuje určitá analogie. Tuto analogii pak matematikové bohatě využívají.

Uveďme dva zajímavé příklady analogie ze školské matematiky.

První příklad se týká dělitelnosti. Tuto teorii začali budovat již matematikové v antickém Řecku, jak se o tom můžeme dočíst v Eukleidových základech. V té době se tato teorie odehrávala v přirozených číslech. Později matematikové rozšířili tuto teorii na čísla celá. Hezkou ukázkou je hledání největšího společného dělitele dvojice čísel pomocí Eukleidova algoritmu postupného dělení. Tento algoritmus byl samozřejmě nejprve formulován pro přirozená čísla, ale platí i pro čísla celá. Později matematikové zjistili, že i polynomy se vzhledem k relaci „dělit“ chovají analogicky jako

[1] Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantu GAČR č. 407/12/1939.

čísla. Proto lze uvedený algoritmus hledání největšího společného dělitele využít i zde.

Druhý příklad souvisí s číselnou osou, se kterou se pracuje ve škole již od prvního stupně ZŠ. Čísla na této ose můžeme znázorňovat buď pomocí bodů, nebo pomocí šipek. Tato znázornění můžeme zaměňovat podle toho, co od tohoto znázornění požadujeme. Pokud např. porovnáváme velikost čísel, budou se nám hodit body, pokud chceme graficky ukázat sčítání, především celých, tedy i záporných čísel, jsou vhodnější šipky. Toto zaměňování má opět základ v analogii. V geometrické interpretaci můžeme říci, že šipky na přímce patří do geometrického vektorového prostoru dimenze 1 a body do aritmetického vektorového prostoru téže dimenze. Protože jsou tyto prostory izomorfní, což je určitý přesně popsaný druh analogie, můžeme skutečně, jak jsme již výše řekli, šipky a body podle potřeby zaměňovat. Obdobně je tomu v rovině, když chceme geometricky znázorňovat komplexní čísla.

Podrobněji popisuje heuristickou strategii např. krásná knížka (Tao, 2010) nebo již zmíněná česká monografie (Kopka, 2013).

Vraťme se ale k řešení úloh. Analogie je určitý druh podobnosti. Máme-li řešit určitý problém, najdeme si analogický problém, tj. problém, který bude pojednávat podobným způsobem o analogickém objektu. Pokud se nám podaří tento nový problém vyřešit, nebo pokud jeho řešení známe, můžeme často metodu jeho řešení nebo výsledek použít i při řešení původního problému. Pregnantní ukázkou je následující úloha 1.

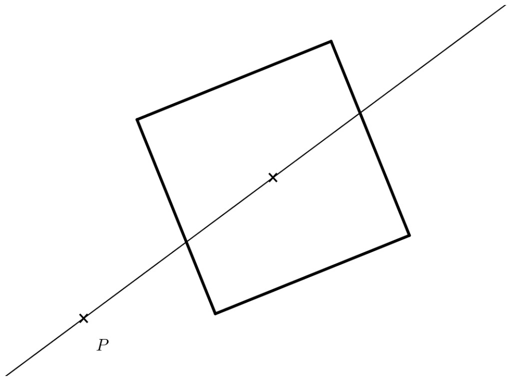
Ilustrující úlohy

Úloha 1. Je dána přímka p a pravidelný osmistěn. Urči rovinu, která prochází přímkou p a rozdělí daný osmistěn na dvě stejně objemné části.

Řešení. Analogie zde spočívá v tom, že půjdeme o dimenzi níže. Místo pravidelného osmistěnu si vezmeme čtverec (průmět osmistěnu) a místo přímky bod. Shodnost útvarů (požadovaná) nám zajišťuje rovnost obsahů těchto útvarů.

Zadání analogické úlohy. *Je dán čtverec a bod P, který není středem čtverce. Urči přímku, která prochází bodem P a rozdělí daný čtverec na dva shodné útvary.*

Řešení analogické úlohy.



Obr. 1

Je zřejmé, že každá přímka procházející středem rozdělí tento čtverec na dva shodné útvary, tudíž i přímka procházející středem čtverce a bodem P rozdělí čtverec na dva shodné útvary.

Odpověď na analogickou úlohu. Hledaná přímka musí procházet středem čtverce.

Odpověď na původní úlohu. Hledaná rovina musí procházet středem osmistěnu.

Jsme si vědomi toho, že obě dvě odpovědi zůstaly na úrovni hypotéz. Ve shodě s Pólyou (2004) se domníváme, že řešení některých úloh ve školské matematice může být ponecháno na plauzibilní úrovni. Zatímco důkaz první hypotézy je relativně jednoduchý, důkaz druhé již vyžaduje náročnější prostředky.

V následující jednoduché úloze z praxe využijeme analogii ve smyslu tvorby úlohy s „přátelštějšími čísly".

Úloha 2. Auto ujelo 420 km a spotřebovalo při tom 29 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

Řešení. Kromě obvyklého řešení trojčlenkou je možno řešit tuto úlohu pomocí analogie. Zformulujme úlohu, která bude numericky jednodušší a bude evokovat nalezení postupu řešení.

Zadání analogické úlohy. *Auto ujelo 200 km a spotřebovalo při tom 16 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?*

Odpověď se vnucuje automaticky – průměrná spotřeba auta na 100 km činí 8 litrů. Jak jsme vlastně k výsledku došli? Výpočet se dá zrekonstruovat takto:

$$\frac{16}{\frac{200}{100}} = 8.$$

Vraťme se tedy nyní k původní úloze a vyřešme ji stejným způsobem:

$$\frac{29}{\frac{420}{100}} \doteq 6{,}9.$$

Odpověď. Průměrná spotřeba auta na 100 km činí přibližně 6,9 litru.

Podobná je situace i u následující slovní úlohy.

Úloha 3. Měsíční plat zaměstnance byl 15 755 Kč. Během roku mu byl zvýšen o 2 100 Kč. Od kterého měsíce bral vyšší plat, jestliže jeho roční příjem byl 195 360 Kč?

Řešení. Uvažujme i zde početně jednodušší řešení. To nám umožní nalézt cestu k řešení původní úlohy.

Zadání analogické úlohy. *Měsíční plat zaměstnance byl 10 000 Kč. Během roku mu byl zvýšen o 5 000 Kč. Od kterého měsíce bral vyšší plat, jestliže jeho roční příjem byl 150 000 Kč?*

Řešení analogické úlohy. Následující výpočet určí, po kolik měsíců bral zaměstnanec vyšší plat.

$$\frac{150\,000 - 12 \cdot 10\,000}{5000} = 6$$

Řešení původní úlohy.

$$\frac{195\,360 - 12 \cdot 15\,755}{2100} = 3$$

Odpověď. Měsíční plat byl zaměstnanci zvýšen v říjnu.

Řešení následující úlohy je krásnou ukázkou analogie mezi vnímáním zlomku jako čísla a jako části celku.

Úloha 4. Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$, nebo $\frac{124}{125}$?

Řešení. Kromě přímého způsobu řešení výpočtem na kalkulačce či převedením na společného jmenovatele je možno řešit tuto úlohu pomocí analogie.

Zadání analogické úlohy. *Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{3}{4}$, nebo $\frac{2}{3}$?*

Zde je odpověď zřejmá, $3/4 > 2/3$.

Odpověď. $\frac{125}{126} > \frac{124}{125}$.

Při řešení poslední úlohy (úloha je převzata z (Kopka, 2013)) budeme na začátku formulovat analogický problém, ve kterém bude jeden z parametrů úlohy určující její obtížnost významně nižší.

Úloha 5. Je dána čtvercová tabulka 8×8. Vyplňte její políčka čísly $1, 0, -1$ tak, aby součty čísel ve všech řádcích, sloupcích a obou diagonálách byly navzájem různé.

Řešení. Abychom do problematiky lépe pronikli, budeme experimentovat. Protože tabulka 8×8 je příliš velká a experimentování by trvalo dlouho, vezmeme si místo ní např. tabulku 3×3 a pokusíme se do ní vložit čísla $1, 0, -1$ tak, aby uvedené součty byly různé. Tak jsme dostali analogický, ale mnohem jednodušší problém. Jeden z experimentů je znázorněn v tab. 1.

0	0	0
0	1	0
1	1	-1

Tab. 1

Ihned je vidět, že uvedený experiment nevyšel, protože např. součet čísel v prvním sloupci a druhém řádku je 1. Po několika pokusech zjistíme, že se nám nedaří vepsat čísla podle požadovaného klíče. Je to naše neschopnost, nebo problém nemá řešení? Možná objevíme důvod, proč experimentování nevede k cíli.

Zamysleme se, kolik tříčlenných součtů můžeme vytvořit z čísel $1, 0, -1$. Nejmenší z těchto součtů bude -3 a největší 3. Samozřejmě můžeme vytvořit i součty $-2, -1, 0, 1, 2$. Těchto součtů je tedy celkem 7. Kolik různých součtů však máme vytvořit v tabulce 3×3? Řádky jsou 3, sloupce jsou také 3 a diagonály 2, to je dohromady 8 součtů. Závěr: náš zjednodušený problém je neřešitelný.

Vraťme se nyní k původnímu problému. Můžeme zcela analogicky říci, že i problém s tabulkou 8×8 je neřešitelný. Různých možných součtů je totiž 17, ale požadovaných součtů v tabulce je 18.

Odpověď. Úloha nemá řešení.

Literatura

[1] Kopka, J. (2013). *Umění řešit matematické problémy.* Praha: HAV.

[2] Pólya, G. (2004). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (Expanded Princeton Science Library ed.). Princeton: Princeton University.

[3] Tao, T. (2010). *Solving Mathematical Problems. A Personal Perspective.* Los Angeles: Department of Mathematics, UCLA.

Abstract

This article describes a heuristic strategy of analogy and illustrates it by five school mathematics examples. These examples are efficiently solved while using such a strategy.

Petr Eisenmann
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta Univerzity Jana Evangelisty Purkyně
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: petr.eisenmann@ujep.cz

Jiří Přibyl
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta Univerzity Jana Evangelisty Purkyně
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: jiri.pribyl@ujep.cz