Lukáš Honzík; Jaroslav Hora; Martina Kašparová

Využití eliminace kvantifikátorů v řešení jednoduchých optimalizačních úloh

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 2, 91–104

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149424

VYUŽITÍ ELIMINACE KVANTIFIKÁTORŮ V ŘEŠENÍ JEDNODUCHÝCH OPTIMALIZAČNÍCH ÚLOH

L. Honzík, J. Hora, M. Kašparová

Úvod

Řešení slovních úloh je jednou z důležitých dovedností učitelů základních i středních škol. Z tohoto důvodu je do studijního plánu učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ na Fakultě pedagogické ZČU zařazen povinný kurz Metody řešení matematických úloh 3, v němž se naši studenti seznámí s různými způsoby řešení slovních úloh.

Kromě známých úloh o pohybu, o směsích a o společné práci v seminářích narazí i na jednoduché optimalizační úlohy, které jsou spíše jistou nadstavbou a žáci základních a středních škol se s nimi setkají spíše v zájmových matematických kroužcích než přímo v hodinách matematiky. Jako příklad takové úlohy můžeme uvést toto zadání:

Příklad

Do nové haly podniku se pořizují dva typy strojů, na stroji typu I se za směnu vyrobí 50 výrobků A, každý za 100 korun, na stroji typu II se za směnu vyrobí 90 výrobků B po 90 korunách za kus. Jejich provoz je však limitován počtem pracovníků, kterých může být maximálně 100, přičemž každý stroj typu I potřebuje k obsluze 1 pracovníka a každý stroj typu II potřebuje 2 pracovníky. Navíc hala je dimenzována na provoz strojů s maximálním celkovým příkonem 1 200 kW, přičemž každý stroj typu I i II potřebuje k provozu příkon 20 kW. Určete, jak má vedení společnosti nakoupit jednotlivé typy strojů, aby podnik měl z nové haly co největší zisky. (Podobné úlohy viz Riečan a kol., 1987.)

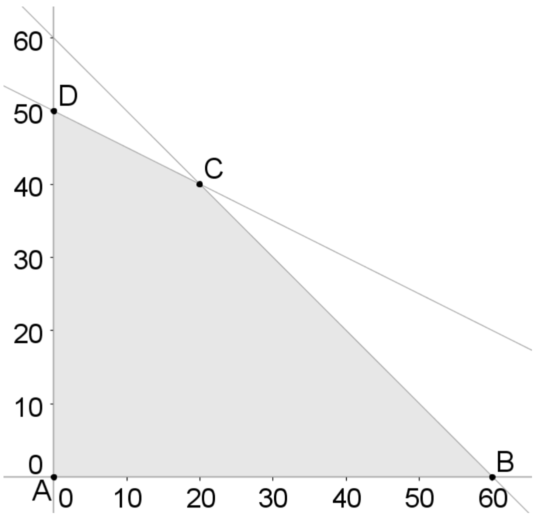
Je zřejmé, že ve své podstatě půjde o hledání extrému (v tomto případě maxima) jisté funkce více proměnných při dodržení několika vazebních podmínek.

Nástin řešení

Za prvé je nutné sestavit účelovou funkci, jejíž maximum budeme hledat. Označme neznámou x počet strojů typu I, y počet strojů II. Potom pro celkový zisk jedné směny platí

$$f(x, y) = 50 \cdot 100 \cdot x + 90 \cdot 90 \cdot y = 5\,000x + 8\,100y.$$

Zároveň musí být splněny podmínky $0 \leq x$, $0 \leq y$ (počty strojů nemohou být záporné), $x + 2y \leq 100$ (max. počet pracovníků je 100) a $20x + 20y \leq 1\,200$ (max. příkon v hale), jejichž průnikem je v grafickém znázornění čtyřúhelník $ABCD$ na obrázku 1. V této oblasti pak hledáme maximum funkce $f(x, y)$.



Obr. 1: Podmínkami vymezená oblast

Vzhledem k tomu, že daná funkce je lineární v obou proměnných, mohou nastat 3 případy: funkce je konstantní a žádný extrém nemá, pak jsou řešením všechny body s celočíselnými souřadnicemi $[x, y]$ z vymezené oblasti, případně se jedná o všechny body s celočíselnými souřadnicemi ležící na jedné z hran čtyřúhelníku anebo je maximum v některém z vrcholů A, B, C či D, pokud mají celočíselné souřadnice, nebo v jeho těsné blízkosti. Která z těchto tří variant nastane, je již jen otázkou dosazení souřadnic vrcholů a následného vyvození závěru.

Z tohoto pohledu není řešení jednoduchých optimalizačních úloh nikterak složité, je však možné, že se v účelové funkci objeví více proměnných ve vyšších mocninách. V takovém případě by již nalezení extrému nebylo triviální záležitostí. Navíc je také lepší mít k dispozici více možných přístupů a metod řešení, které pak v kombinaci nabízí i určitou kontrolu správnosti výsledku.

Jednou z takových metod může být i využití některého z programů počítačové algebry, jež zvládají eliminaci kvantifikátorů (např. Wolfram Mathematica pracující pod systémem MS Windows), či přímo speciálních aplikací (program QEPCAD pro systém Linux). (Brown, 2002; Wolfram Research, 2012)

Eliminace kvantifikátorů

Eliminace kvantifikátorů je poměrně mladou problematikou na pomezí matematiky, logiky a výpočetní techniky, jejíž počátky spadají do první poloviny 20. století. Tehdy se jí zabýval významný polský logik a matematik Alfred Tarski, který však přes nemalé úspěchy nepočítal s jejím využitím v běžné praxi, a to z důvodu její nadměrné výpočetní složitosti. Zlom nastal až ve druhé polovině 20. století s příchodem výkonnějších počítačů a objevením metody cylindrické algebraické dekompozice (CAD) matematikem Georgem E. Collinsem.

V zásadě se jedná o to, že máme-li zadánu kvantifikovanou formuli obsahující polynomiální rovnice a nerovnice, je možné tuto formuli zapsat také pomocí ekvivalentní formule bez kvantifikátorů, která bývá jednodušší, neboť obsahuje pouze volné (nekvantifikované) proměnné z formule původní. Vzhledem k tomu, že velká část matematických problémů se dá popsat právě polynomiálními rovnicemi a nerovnicemi, naskýtá se pro eliminaci kvantifikátorů široké pole využitelnosti (mezi jinými jmenujme řešení soustav rovnic a nerovnic včetně těch s parametry, vyšetřování průběhů funkcí, počítání funkčních limit, hledání průsečíků velké řady křivek, dokazování některých tříd matematických vět).

Cylindrická algebraická dekompozice

Základní myšlenkou CAD je rozdělení n-rozměrného prostoru R^n, v němž se zadanou kvantifikovanou formulí pracujeme, na konečný počet disjunktních oblastí, tzv. buněk (cells). V nich pak můžeme pomocí vhodně zvolených bodů – vzorků (samples) jednoduše ověřit, zda je dané tvrzení (rovnice, nerovnice, soustava) v celé příslušné buňce pravdivé, či ne. Přitom je ovšem nutné zajistit, aby pro každou buňku rozkladu platilo, že každý polynom formule má při dosazení libovolného bodu buňky pouze kladnou, zápornou anebo nulovou hodnotu. Obecně není tato podmínka samozřejmá, ale v případě polynomiálních rovnic a nerovnic je naplněna. Ukažme provedení CAD na soustavě nerovnic.

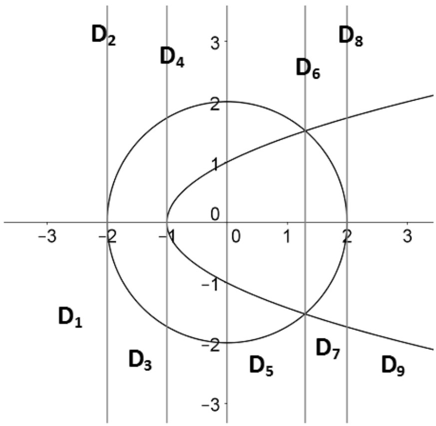
Příklad

Proveďte CAD na soustavě dvou nerovnic

$$x^2 + y^2 - 4 \leq 0,$$
$$x - y^2 + 1 < 0.$$

Z lidského hlediska si můžeme rozklad představit jako rozdělení roviny podle příslušných křivek, v tomto konkrétním případě podle kružnice $x^2 + y^2 - 4 = 0$ a paraboly $x - y^2 + 1 = 0$. Přitom jednou oblastí bude vnějšek kružnice a zároveň vnějšek paraboly, další buňkou je samotná křivka kružnice a vnějšek paraboly, následovala by oblast vnitřku kružnice a vnějšku paraboly, atd. Takovýto přístup může být vcelku krkolomný a při větším množství vyskytnuvších se křivek je pravděpodobné, že některá z buněk může být jednoduše opomenuta.

Z toho důvodu je lepší postupovat trochu více formálním způsobem, kdy lze rozklad provést zavedením přímek kolmých k jedné z os soustavy (pro tento příklad předpokládejme kolmice k ose x) a to tak, aby tyto kolmice procházely nulovými body (čili průsečíky křivek s osou x) a body obratů jednotlivých zadaných křivek (kolmice tedy budou tvořit tečny jednotlivých křivek), jako i jejich společnými průsečíky. Tím dostaneme rozklad $D = (D_1, D_2, \ldots, D_9)$, který vidíme na obr 2.

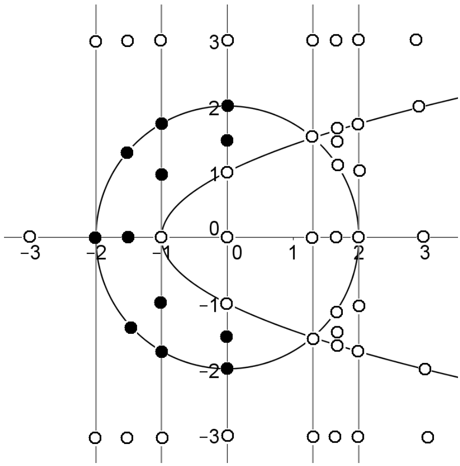


Obr. 2: Rozklad D prostoru R^2

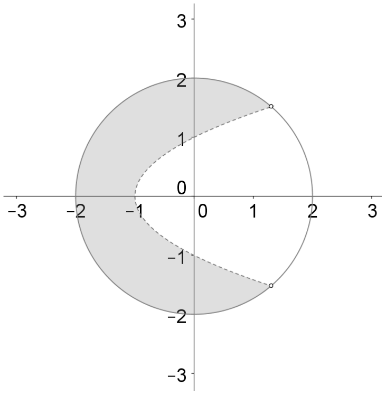
Upřesněme ještě, že oblasti D_1, D_3, D_5, D_7 a D_9 se nazývají sektory (sectors) a oblasti D_2, D_4, D_6 a D_8 jsou tzv. sekce (sections). V každé z oblastí pak provedeme rozklad ještě jednou, přičemž v sekcích budou výsledkem izolované body (průsečíky křivek a body obratů) a úsečky či polopřímky (oddělené od sebe právě těmito izolovanými body), v sektorech pak proběhne rozklad podle příslušných částí křivek.

Ve vzniklých buňkách poté vhodně zvolíme testovací body. Na obr 3 již vidíme tyto testovací body včetně označených, u nichž bylo dosazením ověřeno, že řeší zadanou soustavu nerovnic.

Kompletním řešením je pak sjednocení všech buněk obsahujících takto označené testovací body.



Obr. 3: Vybrané vzorky jednotlivých buněk



Obr. 4: Grafické znázornění řešení

Takto jednoduše za pomoci grafického znázornění jsme mohli rozklad ilustrovat díky tomu, že se pohybujeme ve dvourozměrném prostoru R^2 a zadané nerovnosti nebyly příliš složité. Obecně však lze prostřednictvím počítače provádět rozklad a eliminaci kvantifikátorů v n-rozměrném prostoru R^n, přičemž tento postup je dobře algoritmizovatelný. Skládá se ze tří oddělených fází, a to projekční fáze, konstrukce hald a konstrukce výstupní formule.

V projekční fázi se nejprve vytvoří tzv. projekční množina, která popisuje rozklad prostoru všech proměnných vyskytujících se ve vstupní kvantifikované formuli. V další fázi konstrukce hald je na základě projekční množiny vytvořena množina vzorků jednotlivých buněk rozkladu (v podstatě se jedná o konstrukci stromové struktury celého rozkladu, přičemž její koncové uzly korespondují s jednotlivými buňkami rozkladu, resp. zvolenými testovacími body) a konečně v poslední fázi konstrukce výstupní formule je podle pravdivosti při dosazení vzorků zkonstruována výstupní formule.

Podrobnější informace včetně několika vylepšení algoritmu mohou zájemci nalézt v (Arnon, 1982), (Dupačová, 1982).

Využití eliminace kvantifikátorů v řešení příkladu

Podívejme se nyní, jakým způsobem jde eliminaci kvantifikátorů užít k nalezení řešení naší optimalizační úlohy. Nejprve je nutné sestrojit matematickou formuli popisující zadaný problém.

Hledáme maximum účelové funkce $f(x,y)$, proto předpokládejme, že existuje nějaký bod $[x_0, y_0]$, pro nějž platí nerovnost $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$ pro všechny body $[x,y]$ v oblasti omezené podmínkami.

Potom lze celý problém, po krácení v některých nerovnostech popisujících vazební podmínky, vyjádřit formulí

$$\begin{gathered}(\exists [x_0, y_0],\ x_0 \geq 0,\ y_0 \geq 0,\ x_0 + 2y_0 \leq 100,\ x_0 + y_0 \leq 60)\\ (\forall\ [x,y],\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 2y \leq 100, x + y \leq 60):\\ 50x_0 + 81y_0 \geq 50x + 81y.\end{gathered}$$

Jak jsme se již zmínili, výstupem eliminace kvantifikátorů je formule ekvivalentní s formulí původní, která obsahuje jen volné proměnné.

Zadejme do programu Mathematica příkaz ve tvaru

Resolve[Exists[{x0, y0}, x0≥0 && y0≥0 && x0+2y0≤100 && x0+y0≤60, ForAll[{x, y}, x≥0 && y≥0 && x+2y≤ ≤100 && x+y≤60, 50x0+81y0≤50x+81y]]],

kde **Resolve**[] je příkazem pro provedení eliminace kvantifikátorů a zápisy **Exists**[] a **ForAll**[] zastupují existenční a obecný kvantifikátor. Odpověď programu je **True**, což reprezentuje výsledek eliminace kvantifikátorů mající tvar ve smyslu rovnosti $0 = 0$. Z toho vyplývá, že nějaké maximum účelové funkce $f(x, y)$ na vymezené oblasti opravdu existuje.

Cílem ale nebylo zjistit, zda je úloha řešitelná, ale její řešení přímo nalézt. Toho docílíme jednoduchou úpravou formule a zadaného příkazu, a sice vypuštěním třeba proměnné x_0, resp. x0, z množiny kvantifikovaných proměnných. Podle výše uvedeného bude nová výstupní formule obsahovat pouze volné proměnné, v tomto případě proměnnou x_0 (obdobně lze vypustit i y_0, resp. y0, výstupní formule pak bude obsahovat pouze proměnnou y_0).

Na příkaz

Resolve[Exists[y0, x0≥0 && y0≥0 && x0+2y0≤100 && x0+y0≤60, ForAll[{x, y}, x≥0 && y≥0 && x+2y≤100 && x+y≤60, 50x0+81y0 ≥50x+81y]]]

program odpoví vypsáním zprávy

x0 ∈ Reals && 20 + x0 == 0.

Přepsáním do přehlednějšího tvaru $x_0 = 20$ dostáváme x-ovou souřadnici hledaného maxima $[x_0, y_0]$.

Po dopočítání y-ové souřadnice pak již víme, že $[x_0, y_0] = [20, 40]$, a můžeme tedy napsat odpověď slovní úlohy: Největších zisků bude dosaženo při pořízení 20 strojů typu I a 40 strojů typu II, celkový zisk za jednu směnu bude 424 000 korun.

Obdobně jednoduše můžeme k celému procesu použít i aplikaci QEPCAD. Ta je na rozdíl od programu Mathematica přímo určená k provádění eliminace kvantifikátorů.

Při zadávání vstupní formule zde ale nelze omezující podmínky zapsat přímo a je nutné zvolit trochu jiný přístup. Vstupní formule tentokrát bude ve tvaru implikace

$$(\forall x, y) : (x_0 \geq 0 \;\wedge\; y_0 \geq 0 \;\wedge\; x_0 + 2y_0 \leq 100 \;\wedge\; x_0 + y_0 \leq 60 \;\wedge \\ \wedge\; x \geq 0 \;\wedge\; y \geq 0 \;\wedge\; x + 2y \leq 100 \;\wedge\; x + y \leq 60) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (50x_0 + 81y_0 \geq 50x + 81y),$$

výstupní formule je pak

$$y_0 + x_0 - 60 > 0 \ \vee \ 2y_0 + x_0 - 100 > 0 \ \vee \ x_0 < 0 \ \vee \ y_0 < 0 \ \vee \\ \vee \ (2y_0 + x_0 - 100 = 0 \ \wedge \ y_0 + x_0 - 60 = 0).$$

Na první pohled sice tato výstupní formule vypadá složitě, nicméně je třeba si uvědomit, že vstupní formule byla ve tvaru implikace a ta je pravdivá i v případě nepravdivého předpokladu, kterému odpovídá disjunkce nerovnic

$$x_0 + y_0 > 60 \ \vee \ x_0 + 2y_0 > 100 \ \vee \ x_0 < 0 \ \vee \ y_0 < 0.$$

Zajímat nás tak bude soustava dvou zbývajících rovnic

$$\begin{aligned} x_0 + 2y_0 &= 100, \\ x_0 + y_0 &= 60, \end{aligned}$$

jejímž řešením je, stejně jako v předchozím případě, bod o souřadnicích $[x_0, y_0] = [20, 40]$.

Další příklady

Obdobným způsobem lze eliminaci kvantifikátorů k řešení zadané úlohy použít i při vyšetřování některých vlastností funkcí, například omezenosti funkce, jejích extrémů či limit. Pokusme se takto zjistit potřebné informace o konkrétních funkcích.

Příklad
Zjistěte, zda je funkce

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2y + 5$$

omezená. Pokud je funkce omezená, určete funkční hodnotu a hodnoty nezávisle proměnných v příslušných extrémech.

Zadaná funkce popisuje paraboloid, přičemž při hledání jeho extrému by se obecně uplatnil diferenciální počet. V případě eliminace kvantifikátorů však vystačíme s popsáním daného problému příslušnou formulí a jejím následným zjednodušením.

Pokud je funkce omezená shora, musí nutně platit tvrzení zapsané do formule

$$(\exists K)(\forall [x, y]) : 2x^2 + y^2 - 2y + 5 < K.$$

V přepisu pro program Mathematica vypadá příkaz takto
Resolve[Exists[K, ForAll[{x, y}, 2x^2+ y^2− 2y + 5 < K]]].
Výstup příkazu je **False**, daná formule tedy není pravdivá, z čehož plyne, že funkce není shora omezená a nemá ani maximum. Naproti tomu podobná formule

$$(\exists K)(\forall [x, y]) : 2x^2 + y^2 - 2y + 5 > K,$$

týkající se omezenosti zdola, již pravdivá je. Uživatel na počítačový příkaz
Resolve[Exists[K, ForAll [{x, y}, 2x^2+ y^2− 2y + 5 > K]]]
dostává odpověď **True**. Funkce je zdola omezená a existuje tak i její minimum, jeho hodnotu je ale nutné podrobit dalšímu zkoumání. Pozměněním předpisu do tvaru
Resolve[ForAll[{x, y}, 2x^2+ y^2− 2y + 5 > K]],
jenž odpovídá formuli

$$(\forall [x, y]) : 2x^2 + y^2 - 2y + 5 > K,$$

se z proměnné K stala proměnná nekvantifikovaná. Po provedení eliminace kvantifikátorů pak zůstane ve výstupní formuli zachována a bude možné zjistit její hodnotu. Odpověď počítače po zadání zmíněného příkazu je
K ∈ Reals && 4 + K < 0
a lze z ní vyvodit funkční hodnotu minima $f_{min} = 4$.

Nalezení hodnot nezávisle proměnných přináležejících hledanému minimu nakonec docílíme jednoduchým trikem, kdy ve formuli nahradíme proměnnou K výrazem $2x_0^2+y_0^2-2y_0+5$. Formule je nyní ve tvaru

$$(\forall [x, y]) : 2x^2 + y^2 - 2y + 5 \geq 2x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 5$$

a v podstatě říká, že lze najít takovou uspořádanou dvojici $[x_0, y_0]$, jejíž funkční hodnota je menší nebo rovna funkčním hodnotám libovolné jiné uspořádané dvojice $[x, y]$. Počítač tentokrát na příkaz

Resolve[ForAll[{x,y},2x²+y²−2y+5¿=2x0²+y0²−2y0+5]]

odpoví formulí bez kvantifikátorů

x0 $\in$ Reals && y0 $>$ 0 && 2x0²−2y0 + y0² $\leq$ 1.

Hledáme tak řešení nerovnice $2x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 \leq 1$, která však po doplnění na čtverec přejde do tvaru $2x_0^2 + (y_0 - 1)^2 \geq 0$. Jejím řešením při dodržení podmínek $x_0 \in R$ a $y_0 > 0$ je uspořádaná dvojice $[0, 1]$.

Můžeme konstatovat, že funkce $f(x, y)$ má minimum v bodě o souřadnicích $[0, 1]$ a jeho funkční hodnota je 4.

Příklad
Určete limitu funkce $f(x) = \frac{5x-1}{3x+2}$ pro $x \to +\infty$.

Zadaná úloha je poměrně jednoduchá, nicméně může posloužit k ilustraci netradičního přístupu hledání řešení. Tradičně by se při zjišťování hodnoty limity v takovémto případě uplatnilo vytýkání nejvyšší společné mocniny z čitatele a jmenovatele, krácení a následné „dosazení“. Při eliminaci kvantifikátorů místo toho využijeme přímo definici limity funkce, která sama o sobě je kvantifikovanou formulí.

Obecně pro libovolnou funkci $f(x)$ a její limitu $a = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ platí tvrzení

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in R)(\forall x > x_0) : a - \varepsilon < f(x) < a \ + \varepsilon.$$

S přihlédnutím k tomu, že limita v této konkrétní úloze vyjde jednoduše $\frac{5}{3}$, můžeme zápis upravit jako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in R)(\forall x > x_0) : \tfrac{5}{3} - \varepsilon < \tfrac{5x-1}{3x+2} < \tfrac{5}{3} + \varepsilon.$$

Počítačový příkaz pak bude ve tvaru

Resolve[ForAll[ε, $\varepsilon >$ 0, Exists [x0, x0 $\in$ Reals, ForAll [x, x $>$ x0, 5/3−ε $<$ (5x−1)/(3x+2) $>$ 5/3+ε]]]]

a odpověď programu zní **True**, jedná se tedy o potvrzení skutečnosti, že tvrzení je pravdivé.

Kromě potvrzení předpokládané hodnoty limity je navíc možné ji nechat i přímo spočítat, v takovém případě stačí nahradit v zápisu hodnotu $\frac{5}{3}$ proměnnou a a nechat program eliminovat kvantifikátory ve formuli

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in R)(\forall x > x_0) : a - \varepsilon < \tfrac{5x-1}{3x+2} < a + \varepsilon.$$

Počítač na příslušný příkaz odpoví přímo vyčíslením nekvantifikované proměnné **a == 5/3**.

V tuto chvíli je však potřeba přiznat, že určování limit funkcí je takovýmto způsobem mírně krkolomné. Eliminace kvantifikátorů prostřednictvím CAD totiž funguje bez problémů především u formulí obsahujících polynomiální či racionálně lomené výrazy, u nichž lze k výsledku dojít podstatně jednodušeji tradiční cestou. Naproti tomu u výrazů složitějších (obsahujících například goniometrické či logaritmické funkce) často selhává, a přestože například program Mathematica si s nimi prostřednictvím příkazu Resolve úspěšně poradí, uplatňují se zde již jiné výpočetní procesy než cylindrická algebraická dekompozice. I přes tento nedostatek lze zmíněnou úlohu přijmout jako příklad motivační, ukazující žákům zajímavý způsob řešení.

Závěr

Čtenáře jistě napadne, že eliminace kvantifikátorů využitá představenými způsoby by se dala přirovnat k tzv. černé skříňce; uživatel jednoduše napíše příkaz a bez jakýchkoliv znalostí o způsobu výpočtu mu program rovnou vypíše výsledek. Je však třeba mít na paměti, že situace tak jednoduchá není. Užívání zmíněného způsobu řešení úloh klade na uživatele poměrně vysoké nároky, a to konkrétně co se týče jeho schopností formulace problému (vstupní kvantifikovaná formule musí být sestavena precizně), interpretace získaných odpovědí (i přes zjednodušení nemusí být výstupní formule bez kvantifikátorů vždy na první pohled přehledná) a též kritického myšlení (z výstupu je nutné vybrat podstatné informace a být schopen posoudit jejich pravdivost a spolehlivost).

V žádném případě také nelze tvrdit, že zmíněný postup by měl být upřednostňován před metodami tradičními, i když s ohledem na současné trendy zavádění a využívání výpočetní techniky v dalších a dalších oblastech lidského života je zřejmé, že i v matematice jsou počítače a programy počítačové algebry stále častěji používány stejně běžně jako například kalkulačky.

Zároveň na eliminaci kvantifikátorů a hlavně toto její využití můžeme nahlížet jako na další možnost, kterou žák či učitel mají kromě tradičních metod při řešení matematických problémů, přičemž jim nabízí příležitost přistoupit k dané úloze z trochu jiného směru, zvláště pak v případech, kdy jiné postupy selhávají nebo jsou příliš komplikované. Navíc eliminace kvantifikátorů také může sloužit jako jakési ověření správnosti výsledku získaného jinou cestou.

Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantu VS-14-029 *Počítačové metody řešení matematických úloh*.

Literatura

[1] Arnon, D. S, Collins, G. E. & McCallum, S., Cylindrical algebraic decomposition I: the basic algorithm, *SIAM Journal on Cumputing*, **4**(13) 965–877.

[2] Brown, C., QEPCAD – Quantifier Elimination by Cylindrical Algebraic Decomposition, United States Naval Academy. Dostupné z: http://www.usna.edu/cs/~qepcad/B/QEPCAD.html

[3] Davídek, O., *Cylindrická algebraická dekompozice a její aplikace*, diplomová práce, ZČU, Plzeň, 2009.

[4] Dupačová, J., *Lineární programování*, SPN, Praha, 1982.

[5] Riečan, B. a kol., *Matematika pri IV. ročník gymnázií*, SPN, Praha, 1987.

[6] Wolfram Research, Inc., Wolfram Mathematica: Wolfram Mathematica 8 Documentation. 2012. Dostupné z: http://reference.wolfram.com/mathematica/ /guide/Mathematica.html

Abstract

Quantifier elimination over real fields is a discipline connected with mathematics, logic and computer science. Using so called cylindrical algebraic decomposition it allows to simplify mathematical formulas with quantifiers into quantifier-free formulas. Since this is quite a complex problem, computer algebra programs (such as Mathematica by Wolfram Research) are very helpful. Many mathematical problems (for example, equations and inequations) can be transformed into quantified formulas and the elimination is a way to solve them or find out if they are solvable. Therefore this method may be useful not only for mathematicians but for mathematics teachers and talented pupils, too.

Mgr. Lukáš Honzík, Ph. D.,
Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.,
Mgr. Martina Kašparová, Ph. D.
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy FPE ZČU v Plzni
Klatovská 51
306 14 Plzeň
e-mail: luky21@kmt.zcu.cz