Alice Králová

Bodové konstrukce elipsy založené na afinitě mezi kružnicí a elipsou

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 3, 141–160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149430

BODOVÉ KONSTRUKCE ELIPSY ZALOŽENÉ NA AFINITĚ MEZI KRUŽNICÍ A ELIPSOU

Alice Králová

Úvodem si připomeneme některé pojmy, s nimiž budeme v dalším textu pracovat. Prvním z nich je termín *osová afinita v rovině*[1].

Mějme dánu rovinu π s přímkou o, kterou nazveme *osa afinity*, a s přímkou s určující *směr afinity*.

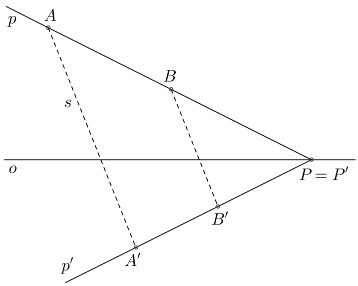
Osová afinita v rovině je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi body ležícími v rovině π definované těmito podmínkami:

- Pro libovolný bod A (*vzor*), jemuž je přiřazen bod A' (*obraz*) tak, aby $A' \neq A$, musí platit, že jejich spojnice AA' je rovnoběžná se směrem afinity s.
- Je-li bodu P přiřazen bod P' tak, že $P = P'$, pak tento bod musí ležet na ose afinity a nazývá se *samodružný bod*.
- Máme-li dva libovolné vzory $A \neq B$ a jim odpovídající obrazy $A' \neq B'$, spojnice AB a $A'B'$ se potom protínají v bodě na ose afinity nebo jsou to rovnoběžky s osou afinity.

Osovou afinitu většinou zadáváme pomocí osy afinity o a dvojice odpovídajících si bodů A, A', z nichž žádný neleží na ose afinity. Potom lze ke každému bodu M jednoznačně určit jeho obraz M'.

Nyní vyjmenujme **vlastnosti osové afinity**, které uplatníme v následujících konstrukcích.

[1] Osovou afinitu v rovině lze vytvořit tak, že vezmeme „perspektivní afinitu“ realizovanou rovnoběžným promítáním mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru a rovnoběžně ji promítneme do průmětny π. Tato konstrukce osové afinity je však dosti zdlouhavá a z hlediska našich konstrukcí elips nepotřebná. Proto osovou afinitu zavedeme přímou definicí.



Obr. 1: Definice osové afinity v rovině

Především je důležité, že osová afinita zachovává

- incidenci – pokud $A \in p$, pak $A' \in p'$,
- rovnoběžnost – je-li $p \parallel q$, bude také $p' \parallel q'$,
- dělicí poměr tří bodů na přímce –

  $$– |AC| : |BC| = |A'C'| : |B'C'|.$$

$(*)$

Úsečky, které leží na rovnoběžkách s osou afinity, se promítnou opět do stejně dlouhých úseček rovnoběžných s osou afinity.

V osové afinitě se dále vyskytují *slabě samodružné přímky*, které jsou rovnoběžné se směrem afinity. To znamená, že přímka $a \parallel s$ je totožná se svým obrazem a', ačkoliv její body, s výjimkou průsečíku s osou o, samodružné nejsou.

Osovou afinitu dělíme podle vzájemné polohy směru afinity s a osy afinity o. Afinita se nazývá

- *pravoúhlá*, je-li $s \perp o$,
- *kosoúhlá*, jestliže $s \not\perp o$ a zároveň $s \nparallel o$,
- *(nevlastní) elace*, když je $s \parallel o$.

Je-li afinita pravoúhlá nebo kosoúhlá, můžeme stanovit její charakteristiku. Zvolme dva různé odpovídající si body A, A' a označme $A_0 = AA' \cap o$. Uvažujme vektory $\overrightarrow{AA_0}$ a $\overrightarrow{A'A_0}$.

Položíme-li
$$\overrightarrow{A_0A'} = k \cdot \overrightarrow{A_0A},$$
bude hodnota $k \neq 0, 1$ nezávislá na konkrétní volbě bodů A, A' a nazývá se *charakteristika afinity.*

Pro $k = -1$ se afinita nazývá *involutorní.* Zvolíme-li $B = A'$, bude potom $B' = A$. To znamená, že u involutorní afinity nemusíme rozlišovat, zda je určitý bod vzorem nebo obrazem. Samodružný bod na ose afinity lze získat jako průsečík $AB' \cap A'B$.

Naopak u afinity, která není involucí, je informace, zda určitý bod patří do množiny vzorů nebo obrazů, zcela zásadní. Zde musíme důsledně dodržovat, že se na ose afinity protínají pouze spojnice dvou vzorů AB se spojnicí jejich obrazů $A'B'$.

Nakonec dodejme, že *osová souměrnost* je pravoúhlá afinita s charakteristikou $k = -1$.

Afinita mezi kružnicí a elipsou

V níže popsaných bodových konstrukcích elips pracujeme s pojmem *sdružené průměry elipsy.*

Jedná se o dva průměry elipsy takové, že tečny elipsy sestrojené v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem a naopak. Elipsa je pak vepsána do rovnoběžníka určeného těmito čtyřmi tečnami.

Obecně platí, že v každé osové afinitě kružnici nebo elipse odpovídá opět kružnice nebo elipsa – viz [1], s. 206.

Konkrétněji však můžeme říci, že se kružnice zobrazí do kružnice pouze v osové souměrnosti. Každá jiná afinita převede kružnici do elipsy. Podívejme se na zobrazení kružnice v pravoúhlé afinitě, kosoúhlé afinitě a elaci.

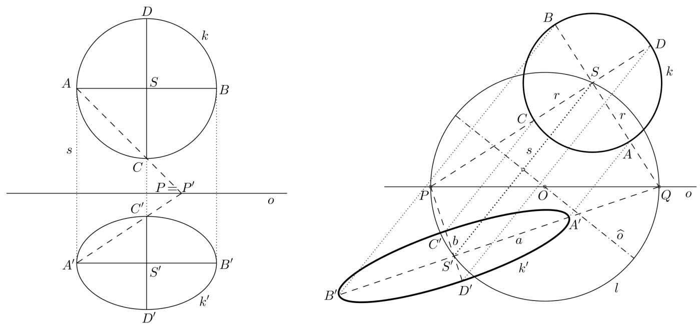
Pravoúhlá afinita

V tomto případě je situace zcela zřejmá. Obrazem k' kružnice k bude opět kružnice právě tehdy, když pravoúhlý $\triangle A'S'C'$ bude rovnoramenný. To však nastane pouze v případě osové souměrnosti.

Kosoúhlá afinita

Vycházejme z konstrukce ($\mathcal{K}$), která převádí kolmé průměry kružnice k do kolmých průměrů elipsy k'. Známe jejich středy S a S' a osu afinity o.

Sestrojíme osu úsečky SS', přímku $\widehat{o}$, která protne osu afinity o v bodě O. Narýsujeme kružnici l se středem v bodě O, která prochází oběma body S, S'. Získáme průsečíky $\{P, Q\} = l \cap o$. Polopřímky PS a QS určují kolmé průměry kružnice k, které se zobrazí do kolmých průměrů elipsy k' ležících na polopřímkách PS' a QS'. To plyne z faktu, že kružnici l lze považovat za Thaletovu kružnici sestrojenou nad průměrem PQ a body S a S' na ní leží.



pravoúhlá afinita kosoúhlá afinita, $k < 0$

Obr. 2: Afinita mezi kružnicí a elipsou

Uvažujeme-li nyní stejnolehlost se středem v bodě P, resp. se středem v bodě Q, získáme následující rovnosti:

$$\frac{|SC|}{|SP|} = \frac{|S'C'|}{|S'P|}$$

$$|SC| = r$$

poloměr kružnice

$$\frac{|SA|}{|SQ|} = \frac{|S'A'|}{|S'Q|}$$

$$|SA| = r$$

poloměr kružnice

$\lvert S'C' \rvert = b$	$\lvert S'A' \rvert = a$
vedlejší poloosa elipsy	hlavní poloosa elipsy
$r = \frac{\lvert SP \rvert}{\lvert S'P \rvert} \cdot b$	$r = \frac{\lvert SQ \rvert}{\lvert S'Q \rvert} \cdot a$

Porovnáním těchto vztahů získáme rovnost

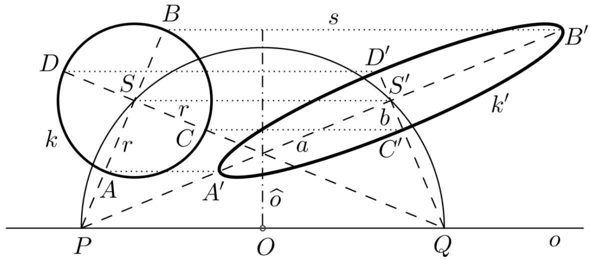
$$\frac{a}{b} = \frac{|SP|}{|S'P|} \cdot \frac{|S'Q|}{|SQ|}$$

Má-li být křivka k' kružnicí, musí se $a = b$, tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{|SP|}{|S'P|} \cdot \frac{|S'Q|}{|SQ|} = 1, \quad \text{odkud} \quad \frac{|SP|}{|SQ|} = \frac{|S'P|}{|S'Q|} \qquad (\diamond)$$

Podívejme se na $\triangle PSQ$ a $\triangle PS'Q$. Ty mají společnou stranu PQ, pravé úhly při vrcholech S a S', a pokud by navíc platila rovnost $(\diamond)$, znamená to, že budou shodné. Tětivový čtyřúhelník $SPS'Q$ pak bude „deltoid“, čímž je určena osová souměrnost.

Na obr. 2 máme zakreslenou situaci pro $k < 0$. Je-li $k > 0$, tj. body S a S' leží v téže polorovině vymezené osou o, vede shodnost $\triangle PSQ$ a $\triangle PS'Q$ na totožnost bodů S a S', neboli identitu. Tu však z množiny afinit vylučujeme. Podobná situace nastává i v případě elace.



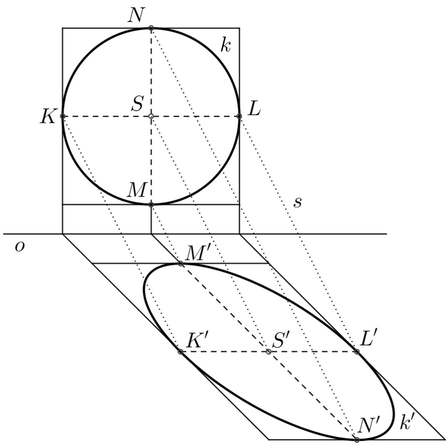
Obr. 3: Elace převádějící kružnici do elipsy

Elace

Směr afinity s je rovnoběžný s osou afinity o. Známe dvojici odpovídajících si středů S a S' kružnice k a elipsy k'.

Užitím konstrukce $(\mathcal{K})$ převedeme kolmé průměry kružnice do kolmých průměrů elipsy. Požadavek, aby byla elipsa k' kružnicí, opět vede na rovnost $(\diamond)$ a shodnost $\triangle PSQ$ a $\triangle PS'Q$. Pak je $S = S'$, čímž je určena identita, která však není afinitou. Tedy žádná elace nezobrazí kružnici opět do kružnice.

Nechť afinita $\mathcal{A}$ zobrazuje kružnici k na elipsu k', protože se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení, bude inverzní afinita $\mathcal{A}^{-1}$ transformovat elipsu k' do kružnice k. Můžeme tedy říci, že afinním obrazem elipsy je buďto kružnice nebo elipsa.



Obr. 4: Sdružené průměry elipsy

Dále poznamenejme, že libovolné dva kolmé průměry kružnice k se vzhledem k vlastnostem afinity $(*)$ převedou do sdružených průměrů elipsy k'.

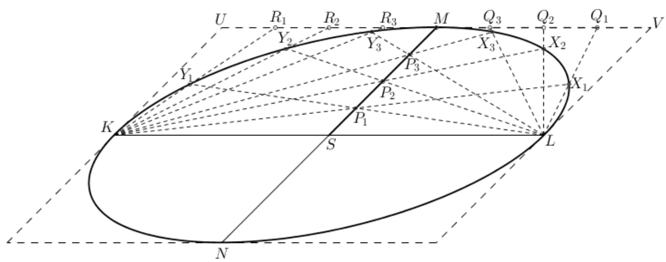
Nyní se již můžeme věnovat bodovým konstrukcím elipsy, které jsou založeny na afinním vztahu mezi kružnicí a elipsou. Jako první připomeneme dobře známou *příčkovou konstrukci* elipsy.

Příčková konstrukce elipsy

Uvažujme dva sdružené průměry KL a MN elipsy e se středem S. Ta je tedy vepsána do rovnoběžníku, který má strany rovnoběžné s uvedenými průměry a jehož vrcholy označíme U a V stejně jako v obr. 5. Úsečky SM a MV rozdělíme na stejný počet dílků. Na každé z těchto úseček jsou dílky navzájem stejně dlouhé. Přitom však velikost dílku na úsečce SM může být různá od velikosti dílku na úsečce MV.

Dělicí body na úsečce SM označme $P_1, P_2, P_3, \ldots$, přičemž bod P_1 je nejblíže bodu S. Podobně dělicí body na úsečce MV označme $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ s tím, že bod Q_1 je nejblíže bodu V.

Pak se polopřímky KP_1 a LQ_1, resp. KP_2 a LQ_2, resp. KP_3 a LQ_3, $\ldots$ protínají v bodech $X_1, X_2, X_3, \ldots$ elipsy.



Obr. 5: Body elipsy

Abychom uvedenou konstrukci zdůvodnili, vepíšeme do čtverce, jehož jeden vrchol označíme V', kružnici k se středem S', jejíž kolmé průměry AB a CD jsou střední příčky tohoto čtverce (obr. 6).

Úsečky $S'C$ a CV' nyní rozdělíme na stejný počet dílků pomocí dělicích bodů $P'_1, P'_2, P'_3, \dots \in S'C$ a $Q'_1, Q'_2, Q'_3, \dots \in CV'$. Přitom je bod P'_1 nejblíže bodu S' a bod Q'_1 nejblíže bodu V'.

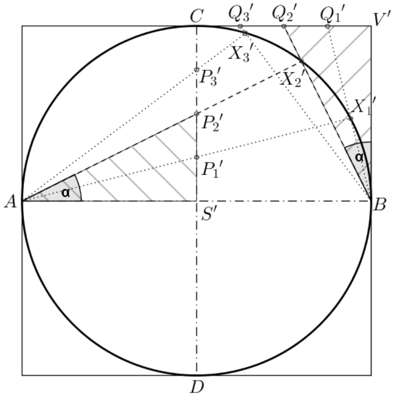
Uvažujme dva trojúhelníky, a to $\triangle AS'P'_2$ a $\triangle BV'Q'_2$, které jsou shodné, neboť

- $|AS'| = |BV'| = r$ (poloměr kružnice k),
- $|\angle AS'P'_2| = |\angle BV'Q'_2| = 90°$,
- $|S'P'_2| = |V'Q'_2| = \frac{1}{2}r$ (obecně $k \cdot r$, kde $k \in (0, 1)$).

Je tedy $|\angle S'AP_2'| = |\angle V'BQ_2'| = \alpha$.
V $\triangle AX_2'B$ je pak $|\angle ABX_2'| = 90° - \alpha$.

Zbývající $\angle AX_2'B$ má tudíž velikost 90° a $\triangle AX_2'B$ je pravoúhlý. X_2' je bodem Thaletovy kružnice k sestrojené nad průměrem AB.

Nyní uvažujme afinitu, která kružnici k převede do elipsy e. Protože afinita zachovává incidenci, rovnoběžnost a dělicí poměr, převede se situace zobrazená v obr. 6 do situace nakreslené v obr. 5. Body $X_1', X_2', X_3', \ldots$ kružnice k přejdou do bodů $X_1, X_2, X_3, \ldots$ elipsy e.



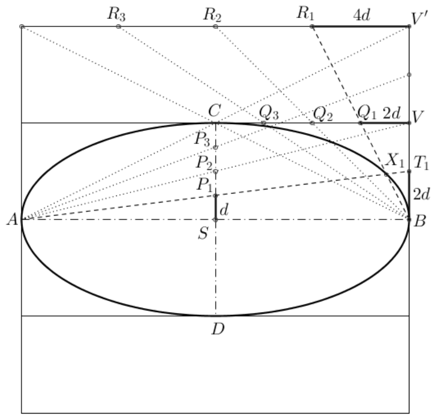
Obr. 6: Body kružnice

Dále budeme uvažovat zvláštní případ situace zobrazené na obr. 5. Mějme elipsu e se středem S takovou, že její hlavní osa AB je dvojnásobkem vedlejší osy CD. Kolmé průměry AB a CD jsou speciálním případem sdružených průměrů elipsy, která je pak vepsána do obdélníka s jedním vrcholem označeným jako bod V (obr. 7).

Vidíme, že úsečky SC a CV rozdělíme na stejný počet dílků. Získáme dělicí body $P_1, P_2, P_3, \dots \in SC$ a $Q_1, Q_2, Q_3, \dots \in CV$, přičemž bod P_1 je nejblíže bodu S a bod Q_1 nejblíže bodu V. Podle dokázané příčkové konstrukce elipsy se budou polopřímky AP_1 a BQ_1, resp. AP_2 a BQ_2, resp. AP_3 a $BQ_3, \ldots$ protínat v bodech $X_1, X_2, X_3, \ldots$ elipsy e.

V souladu s obr. 7 označme $|SP_1| = d$. Pak je $|VQ_1| = 2d$. Nechť polopřímka AP_1 protíná polopřímku BV v bodě T_1. Ze stejnolehlosti se středem v bodě A plyne, že $|BT_1| = 2d$. Dále uvažujme čtverec takový, že AB je jeho střední příčka. Pro jeho vrchol V' bude platit, že $|BV'| = 2\cdot|BV|$. Označme R_1 průsečík polopřímky BQ_1 se stranou čtverce s krajním bodem V', která je rovnoběžná s AB. Ze stejnolehlosti se středem v bodě B vyplývá, že $|V'R_1| = 2|VQ_1| = 4d$. Pak se polopřímky AT_1 a BR_1 protínají v bodě X_1 elipsy e.

Můžeme tedy tvrdit, že body elipsy lze získat následovně: vezměme čtverec se střední příčkou AB a vrcholem V'. Úsečku BV' rozdělme na určitý počet dílků, první dělicí bod označme T_1. Stranu čtverce rovnoběžnou s AB s krajním bodem V' rozdělme na tentýž počet dílků jako jsme dělili BV', přitom délka jednoho dílku teď bude dvojnásobná. První dělicí bod zde označme R_1. Polopřímky AT_1 a BR_1 se budou protínat v bodě X_1 elipsy. Analogicky pro druhý dělicí bod atd. Tato konstrukce se nazývá *rovnoběžníková konstrukce elipsy.*



Obr. 7: Rovnoběžníková konstrukce elipsy

Dále by nás mohlo zajímat, je-li možné tuto konstrukci modifikovat tak, abychom dostali také elipsu s jiným poměrem hlavní a vedlejší poloosy než jenom $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$.

Nechť je tedy dána elipsa e s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b, která je podobně jako v obr. 7 vepsána do rovnoběžníku s vrcholem V. Úsečky SC a CV rozdělme na n stejných dílků, velikost jednoho dílku na úsečce SC pak bude $\frac{b}{n}$ a na úsečce CV bude $\frac{a}{n}$. Z bodu A promítneme dílky z úsečky SC na polopřímku BV. Tím se jejich velikost zdvojnásobí na hodnotu $\frac{2b}{n}$.

Nyní pomocí podobnosti s koeficientem $k = \frac{a}{b}$ zvětšíme délku b na délku a, čímž se jedna polovina strany rovnoběžníka BV o délce b protáhne na jednu polovinu strany čtverce BV' s délkou a.

Velikost dílku $\frac{a}{n}$ na úsečce CV se promítáním z bodu B na rovnoběžku s CV procházející bodem V' zvětší na hodnotu $k \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^2}{bn}$.

Na úsečce BV' délky a nám musí vzniknout n dílků, přičemž velikost jednoho dílku je $\frac{2b}{n}$.

Stejně tak na rovnoběžce s CV s krajním bodem V' o délce $2a$ má vzniknout n dílků, velikost jednoho dílku je nyní $\frac{a^2}{bn}$. V obou případech získáme stejný výsledek, a to:

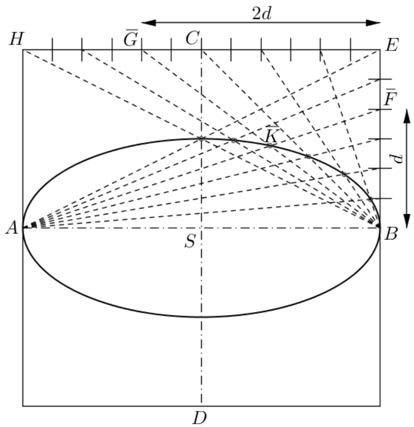
$$\begin{aligned} \frac{a}{\frac{2b}{n}} &= n & \qquad \frac{2a}{\frac{a^2}{bn}} &= n \\ \frac{an}{2b} &= n & \frac{2abn}{a^2} &= n \\ \frac{a}{2b} &= 1 & \frac{2b}{a} &= 1 \\ \frac{a}{b} &= \frac{2}{1} & \frac{b}{a} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že rovnoběžníkovou konstrukcí lze získat pouze elipsu, která má délku hlavní poloosy a dvojnásobnou než délku vedlejší poloosy b.

Správnost rovnoběžníkové konstrukce elipsy lze zdůvodnit také přímým důkazem, což nyní provedeme.

Rovnoběžníková konstrukce elipsy – parallelogram method

Tuto konstrukci lze najít v [5], běžné české učebnice geometrie ji neuvádějí.



Obr. 8: Konstrukce bodů elipsy

Nechť je dán čtverec, jehož střední příčky jsou úsečky AB a CD, jeho vrcholy označme E a H (obr. 8). Rozdělme úsečku BE na určitý počet dílků, úsečku EH (dvojnásobné délky) rozdělme na dvojnásobný počet dílků. Velikost jednoho dílku na úsečce BE i EH je tedy stejná. Označme jako bod $\overline{F}$ k-tý dílek na úsečce BE, $2k$-tý dílek na úsečce EH označme jako bod $\overline{G}$. Jestliže $|B\overline{F}| = d$, pak $|E\overline{G}| = 2d$. Platí, že bod $\overline{K}$, který sestrojíme jako průsečík polopřímek $A\overline{F}$ a $B\overline{G}$, je bodem elipsy s hlavní osou AB a vedlejší osou, jejíž délka je rovna polovině délky úsečky CD.

Abychom ukázali pravdivost tohoto tvrzení, sestrojme nad průměrem AB kružnici k. Na úsečce BE zvolme bod F, přičemž označme $|BF| = 2d$. Dále zvolme na úsečce EC bod G tak, aby $|EG| = d$. Ukážeme, že bod K, který je průsečíkem polopřímek AF a BG, leží na kružnici k (obr. 9).

Uvažujme dva podobné pravoúhlé trojúhelníky, a to $\triangle ABF$ a $\triangle BEG$.

Pro $\triangle ABF$ platí:

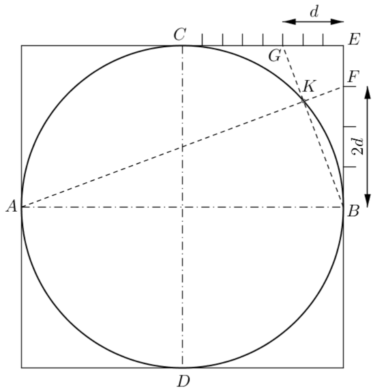
$|AB| = 2r$, $|\angle ABF| = 90°$, $|BF| = 2d$.

Pro $\triangle BEG$ platí:

$|BE| = r$, $|\angle BEG| = 90°$, $|EG| = d$.

Tyto trojúhelníky jsou podobné s koeficientem podobnosti $k = 1/2$. Pak je $|\angle BAF| = |\angle EBG| = \alpha$, dále je $|\angle ABG| = 90° - \alpha$.

V $\triangle AKB$ má úhel při vrcholu K velikost $90°$. Bod K tedy leží na kružnici sestrojené nad průměrem AB.



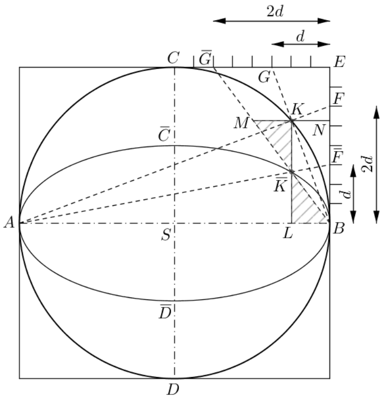
Obr. 9: Body na kružnici

Nyní uvažujme afinitu, která převede kružnici k do elipsy e. Osou afinity je $\leftrightarrow AB$, směr afinity je na ni kolmý. Afinita převede poloměr SC kružnice k do vedlejší poloosy elipsy $S\overline{C}$ o délce $b = \frac{r}{2}$ (obr. 10). Charakteristika afinity je tedy $k = \frac{1}{2}$.

Bod $K[x, y]$ kružnice k přejde do bodu $\overline{K}[x, \frac{y}{2}]$ elipsy e, což pro úplnost ověříme výpočtem.

Bod K splňuje vztah $x^2 + y^2 = r^2$, bod $\overline{K}$ by měl vyhovovat rovnici elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jestliže užijeme vztah $b = \frac{r}{2}$ a dosadíme-li do její levé strany za proměnné x a y souřadnice bodu $\overline{K}$, bude její pravá strana skutečně rovna 1, neboť $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2/4}{r^2/4} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$.

Nyní zaveďme následující označení. Nechť bod L je kolmým průmětem bodu K, resp. bodu $\overline{K}$ na stranu AB a bod N je kolmým průmětem bodu K na stranu BE.



Obr. 10: Afinita mezi kružnicí a elipsou

Nechť je dále bod $\overline{F}$ průsečíkem polopřímky $A\overline{K}$ s úsečkou BE a bod $\overline{G}$ průsečíkem polopřímek $B\overline{K}$ a EC.

Nakonec označme bod M průsečík polopřímky $B\overline{K}$ s polopřímkou NK.

Úsečky LK a BF jsou vzájemně rovnoběžné, přičemž $|L\overline{K}| = \frac{1}{2}|LK|$. Ve stejnolehlosti se středem v bodě A bude tedy také $|B\overline{F}| = \frac{1}{2}|BF|$, což znamená, že $|B\overline{F}| = d$.

Z rovnoběžnosti úseček LK a BF vidíme, že $|LB| = |KN|$.

Dále platí, že $\triangle\overline{K}LB \cong \triangle\overline{K}KM$, neboť oba mají stejný úhel při vrcholu $\overline{K}$, jsou pravoúhlé a $|\overline{K}L| = |\overline{K}K|$.

Takže $|LB| = |KM|$, a tedy $|KN| = |KM|$. Neboli $|NK| = \frac{1}{2}|NM|$.

Úsečky NM a $E\overline{G}$ jsou vzájemně rovnoběžné, ve stejnolehlosti se středem v bodě B bude také $|EG| = \frac{1}{2}|E\overline{G}|$. Tedy $|E\overline{G}| = 2d$.

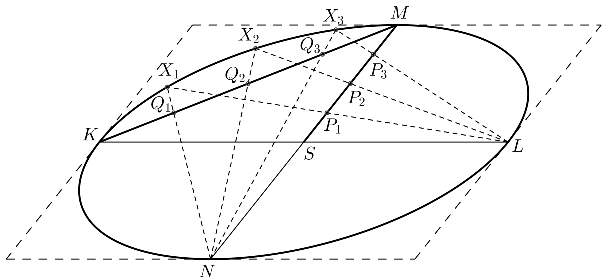
Bod $\overline{K}$ elipsy určíme následovně:

- od bodu B vyneseme na stranu BE zvolenou délku $d \leq |BE|$, čímž získáme bod $\overline{F}$,
- od bodu E vyneseme na $\rightarrow EC$ délku $2d$, tím vznikne bod $\overline{G}$,
- bod elipsy $\overline{K} = \rightarrow A\overline{F} \cap \rightarrow B\overline{G}$.

Jedná se tedy o postup, který jsme popsali v úvodním odstavci.

Jako třetí uvedu konstrukci, která se v běžné literatuře ani na internetu neuvádí. Nicméně její důkaz je pěknou úlohou z planimetrie.

Bodová konstrukce elipsy založená na afinitě mezi kružnicí a elipsou



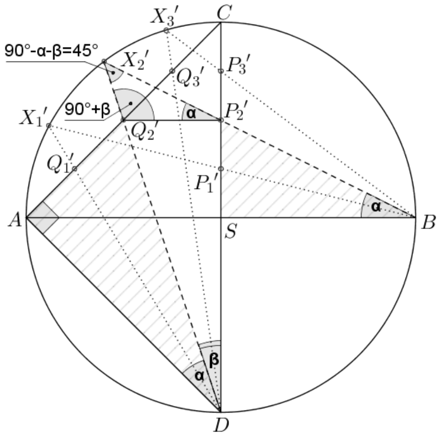
Obr. 11: Body elipsy

Nechť jsou zadány dva sdružené průměry elipsy KL a MN protínající se ve středu S elipsy. Úsečky SM a KM rozdělme na stejný počet dílků. Dělicí body na úsečce SM označme P_1, P_2, $P_3, \ldots$, dělicí body na úsečce KM označme $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$

Na obr. 11 vidíme, že se polopřímky LP_1 a NQ_1, resp. LP_2 a NQ_2, resp. LP_3 a $NQ_3, \ldots$ protínají v bodech $X_1, X_2, X_3, \ldots$ elipsy.

Abychom ukázali platnost tohoto tvrzení, uvažujme kružnici k se středem S, která má dva kolmé průměry AB a CD. Úsečky SC a AC rozdělme na stejný počet dílků. Dělicí body na úsečce SC označme $P_1', P_2', P_3', \ldots$, dělicí body na úsečce AC označme $Q_1', Q_2', Q_3', \ldots$ (obr. 12). Potom se polopřímky BP_1' a DQ_1', resp. BP_2' a DQ_2', resp. BP_3' a $DQ_3', \ldots$ protínají v bodech X_1', X_2', $X_3', \ldots$ kružnice k.

Ze stejnolehlosti se středem v bodě C plyne, že úsečky $P_1'Q_1'$, $P_2'Q_2'$, $P_3'Q_3', \ldots$ jsou vzájemně rovnoběžné a jsou také rovnoběžné s úsečkou SA.



Obr. 12: Body kružnice

V souladu s obr. 12 si zvolíme bod P_2' ve středu úsečky SC, bod Q_2' je pak středem úsečky AC. Nyní označme $\alpha = |\angle SBP_2'|$. Dále nechť je bod X_2' průsečíkem polopřímek BP_2' a DQ_2'. Vzhledem k rovnoběžnosti úseček SB a $P_2'Q_2'$ je také $|\angle Q_2'P_2'X_2'| = \alpha$.

Nyní dokážeme, že bod X_2' leží na kružnici k. V pravoúhlém $\triangle Q_2'P_2'D$ označme $\beta = |\angle Q_2'DP_2'|$. Pak je $|\angle DQ_2'P_2'| = 90° - \beta$.

Dále se podívejme na $\triangle P_2'Q_2'X_2'$. $\angle P_2'Q_2'X_2'$ má velikost $180° - |\angle DQ_2'P_2'| = 180° - (90° - \beta) = 90° + \beta$. Velikost zbývajícího třetího $\angle P_2'X_2'Q_2'$ v $\triangle P_2'Q_2'X_2'$ je rovna $180° - \alpha - (90° + \beta) = 90° - \alpha - \beta$.

Následně si prohlédněme dva trojúhelníky, a to $\triangle BSP_2'$ a $\triangle DAQ_2'$, které jsou vzájemně podobné podle věty *sus*, protože:

- $\triangle BSP_2'$ má pravý úhel při vrcholu S,
  $\triangle DAQ_2'$ má pravý úhel při vrcholu A,
  (jedná se o bod na Thaletově kružnici nad průměrem CD),
- v $\triangle BSP_2'$ je $|BS| = r$ (poloměr kružnice k),
  v $\triangle DAQ_2'$ je $|DA| = x = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$,
- v $\triangle BSP_2'$ je $|SP_2'| = \frac{1}{2}r$ (obecně $k \cdot r$, kde $k \in (0, 1)$),
  v $\triangle DAQ_2'$ je $|AQ_2'| = \frac{1}{2}x$ (obecně $k \cdot x$).

Bude tedy platit, že $|\angle SBP_2'| = |\angle ADQ_2'| = \alpha$.

Protože je $|\angle ADC|$ součtem $|\angle ADQ_2'|$ a $|\angle Q_2'DC|$, jenž je totožný s $|\angle Q_2'DP_2'| = \beta$, vychází, že $|\angle ADC| = \alpha + \beta = 45°$, neboť $\triangle CAD$ je pravoúhlý a rovnoramenný s úhly $45°, 90°, 45°$.

Když se vrátíme zpátky k $\triangle P_2'Q_2'X_2'$, můžeme říci, že velikost $\angle P_2'X_2'Q_2'$, který splývá s $\angle BX_2'D$, je $90° - \alpha - \beta = 90° - 45° = 45°$.

Závěrem uvažujme oblouk $\overparen{BD}$ kružnice k. Středový úhel (tj. $\angle BSD$), který přísluší tomuto oblouku, má velikost $90°$. Současně každý obvodový úhel musí mít velikost $45°$. A protože je $|\angle BX_2'D| = 45°$, jedná se o obvodový úhel patřící k oblouku BD kružnice k. Můžeme tedy s jistotou tvrdit, že bod X_2' leží na kružnici k.

Nakonec provedeme afinní transformaci kružnice k do elipsy e. Z vlastností afinity mezi kružnicí a elipsou vyplývá, že se situace zakreslená v obr. 12 afinním zobrazením převede na situaci zobrazenou v obr. 11.

Body $X_1', X_2', X_3', \ldots$ ležící na kružnici k přejdou do bodů X_1, X_2, $X_3, \ldots$ elipsy e.

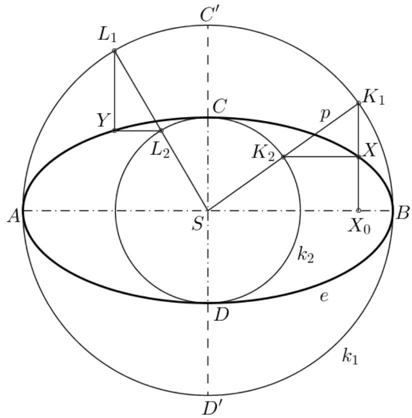
Mezi bodové konstrukce elipsy, které využívají afinního vztahu mezi kružnicí a elipsou, bychom mohli také zařadit *trojúhelníkovou konstrukci* elipsy.

Trojúhelníková konstrukce elipsy

Uvažujme dva kolmé průměry elipsy AB a CD. Sestrojme kružnice k_1 a k_2 takové, že úsečka AB je průměrem kružnice k_1 a úsečka CD je průměrem kružnice k_2.

Nyní zvolme libovolnou polopřímku p s krajním bodem ve středu S elipsy, která není totožná s osami elipsy. Ta vytíná na kružnici k_1 bod K_1 a na kružnici k_2 bod K_2. Platí, že rovnoběžka s CD vedená bodem K_1 se protne s rovnoběžkou s AB vedenou bodem K_2 v průsečíku X, který leží na elipse e (obr. 13). Analogicky získáme další bod Y elipsy pomocí bodů $L_1 \in k_1$ a $L_2 \in k_2$.

Abychom ověřili pravdivost této konstrukce, uvažujme kolmou afinitu $\mathcal{A}$ s osou $o = \leftrightarrow AB$, která převádí kružnici k_1 do elipsy e.



Obr. 13: Trojúhelníková konstrukce elipsy

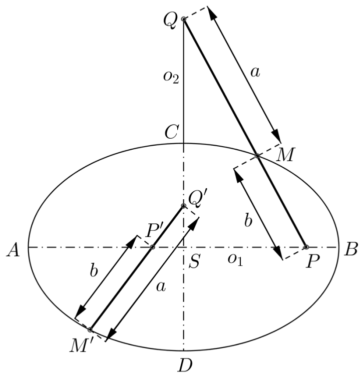
Pro úplnost označme C' a D' krajní body průměru kružnice k_1, jenž je kolmý na AB. V afinitě $\mathcal{A}$ tedy $C' \to C$ a $D' \to D$.
Pro charakteristiku této afinity platí, že $\overrightarrow{SC} = k \cdot \overrightarrow{SC'}$, takže $|\overrightarrow{SC}| = |k| \cdot |\overrightarrow{SC'}|$.
Protože $k > 0$, bude $b = k \cdot a$, tedy $k = \frac{b}{a}$.

Nyní ověříme, že aplikací charakteristiky k na bod K_1 kružnice k_1 získáme právě bod X, který proto musí ležet na elipse e. Označme X_0 patu kolmice K_1X na osu o. Vzhledem k rovnoběžnosti úseček K_2X a SX_0 jsou $\triangle K_1K_2X$ a $\triangle K_1SX_0$ podobné. Je tedy

$$\frac{|X_0X|}{|X_0K_1|} = \frac{|SK_2|}{|SK_1|} = \frac{b}{a} = k,$$

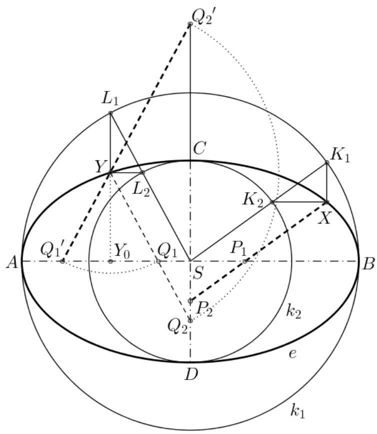
odkud vzhledem ke $k > 0$ můžeme vyvodit, že $\overrightarrow{X_0X} = k \cdot \overrightarrow{X_0K_1}$. Bod X je proto bodem elipsy.

Z trojúhelníkové konstrukce se již dají snadno odvodit obě *proužkové konstrukce* elipsy – součtová a rozdílová. Umožňují nám sestrojit elipsu, jestliže známe buďto její hlavní nebo vedlejší vrcholy a dále obecný bod M. Tyto konstrukce jsou dobře známé a jsou zřejmé z obr. 14, proto je nebudeme podrobněji popisovat.



Obr. 14: Proužkové konstrukce elipsy

Jejich souvislost s trojúhelníkovou konstrukcí znázorňuje obr. 15.



Obr. 15: Vztah mezi trojúhelníkovou konstrukcí a proužkovými konstrukcemi elipsy

Veďme bodem X rovnoběžku s polopřímkou SK_1, která protne hlavní a vedlejší osu elipsy v bodech P_1 a P_2.

Protože jsou vektory $\overrightarrow{SP_1}$ a $\overrightarrow{K_2X}$ totožné, bude $|SK_2| = |XP_1| = b$.
Podobně z rovnosti vektorů $\overrightarrow{SP_2}$ a $\overrightarrow{K_1X}$ vyplývá, že $|SK_1| = |XP_2| = a$.
Tím jsme ukázali platnost rozdílové proužkové konstrukce elipsy.

Dále bodem Y elipsy veďme rovnoběžku s polopřímkou SL_1, čímž vzniknou na osách elipsy průsečíky Q_1 a Q_2. Označme Y_0 patu kolmice na ose o_1 vedenou z bodu Y. Buď $\alpha = |\angle Q_1YY_0|$. Pak je $|\angle Q_1YL_2| = 90^\circ - \alpha$.

Nyní otočíme bod Q_1 podle středu Y do bodu $Q_1' \in o_1$ o úhel 2α. Také bod Q_2 otočíme podle středu Y do bodu $Q_2' \in o_2$ o úhel $2(90^\circ - \alpha)$. Celkový $\angle Q_1'YQ_2'$ má velikost 180° a body Q_1', Y a Q_2' leží v jedné přímce.
Je tedy $|YQ_1'| = |YQ_1| = |SL_2| = b$, resp. $|YQ_2'| = |YQ_2| = |SL_1| = a$.
Tímto jsme odvodili součtovou proužkovou konstrukci.

Závěrem poznamenejme, že z trojúhelníkové konstrukce elipsy je dále možné odvodit *Rytzovu konstrukci*, která ze sdružených průměrů elipsy umožňuje zkonstruovat její kolmé průměry. Zde ji však už nebudeme uvádět, protože je velmi dobře známá, a také ji lze i s důkazem najít v literatuře nebo na internetu.

Literatura

[1] Urban, A. (1965). *Deskriptivní geometrie I.* Praha: SNTL.

[2] Piska, R. & Medek, V. (1966). *Deskriptivní geometrie I.* Praha: SNTL.

[3] Kraemer, E. (1991) *Zobrazovací metody (promítání rovnoběžné) I. díl.* Praha: SPN. ISBN 80-04-21778-8.

[4] Borecká, K., et al. (2002). *Konstruktivní geometrie.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. ISBN 80-214-2205-X.

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse`

Abstract

Definition of affinity in a plane and its properties. Ellipse as an image of a circle in different types of affinity in a plane. The cross-piece construction of an ellipse and its relationship to the parallelogram method. Construction of an ellipse based on affinity between a circle and an ellipse which is different from the cross-piece construction. The draftman's method and the trammel method of ellipse construction and their relationship.

Mgr. Alice Králová
Ústav matematiky LDF Mendelovy univerzity v Brně
Zemědělská 3
613 00 Brno
e-mail: balcarko@mendelu.cz