Aleš Kobza

Pozoruhodné vlastnosti kruhové inverze

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 1, 15–26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149450

POZORUHODNÉ VLASTNOSTI KRUHOVÉ INVERZE

Aleš Kobza

Při gymnaziální výuce se v geometrii obvykle věnuje pozornost studiu shodných a podobných zobrazení. U zmíněných typů zobrazení studenty učíme například také platnost následujících vlastností.

- Přímka se zobrazí na přímku.
- Kružnice se zobrazí na kružnici, přičemž střed kružnice, která je při zobrazení vzorem se zobrazí do středu kružnice, která je jejím obrazem.

Ve své učitelské praxi se při výuce těchto skutečností ze strany studentů zpravidla setkávám s reakcí, že to je samozřejmé, že tyto vlastnosti přece musí platit vždy. V tomto článku ukážeme, že tomu tak být nemusí. Kruhová inverze je totiž zobrazením, které má řadu pozoruhodných a pro studenty překvapivých vlastností. Jejich studiu a způsobu výkladu pro středoškolské studenty se bude věnovat následující text. Přestože se jedná o učivo na střední škole běžně neprobírané, budeme v dalším předpokládat „pouze běžné“ gymnaziální znalosti, jejichž aplikací veškeré níže uvedené vlastnosti odvodíme. Proto je uvedený přístup pro studenty dostupný.

Definice a základní vlastnosti

V rovině je dán bod S a dále kladné[2] reálné číslo λ. Kruhovou inverzí se středem S a koeficientem λ rozumíme zobrazení, které

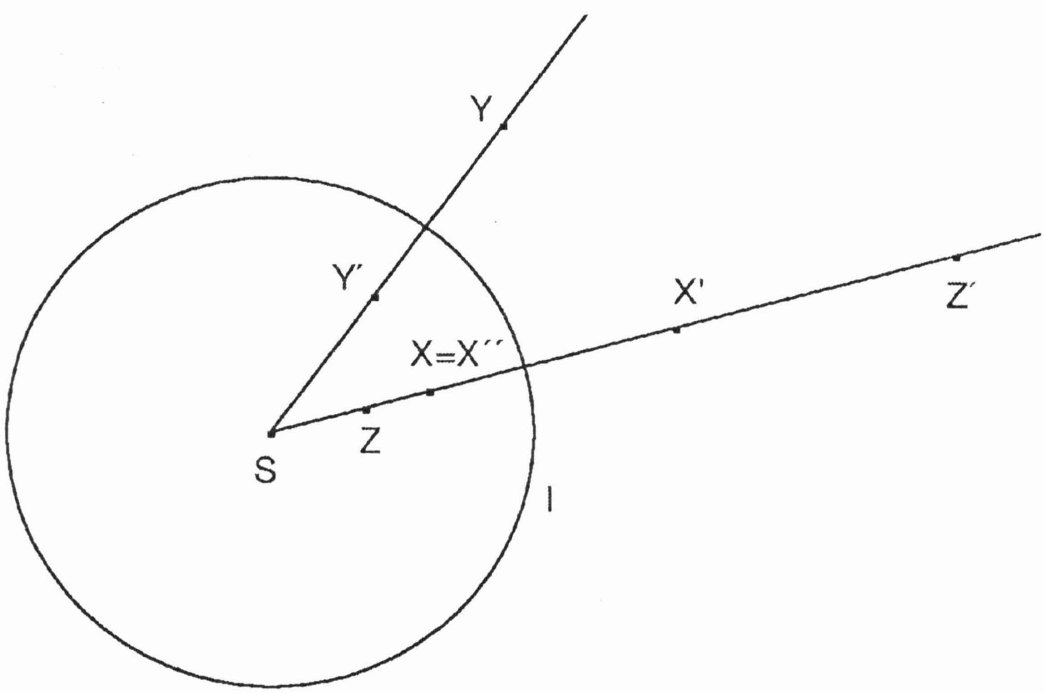
[2]Kruhovou inverzi lze uvažovat obecněji pro $\lambda \neq 0$, ale v tomto textu vystačíme s jednodušším případem $\lambda > 0$.

každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X', který leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$, přičemž

$$|SX| \cdot |SX'| = \lambda\,. \tag{1}$$

Všimněme si několika jednoduchých skutečností, které z uvedené definice vyplývají.

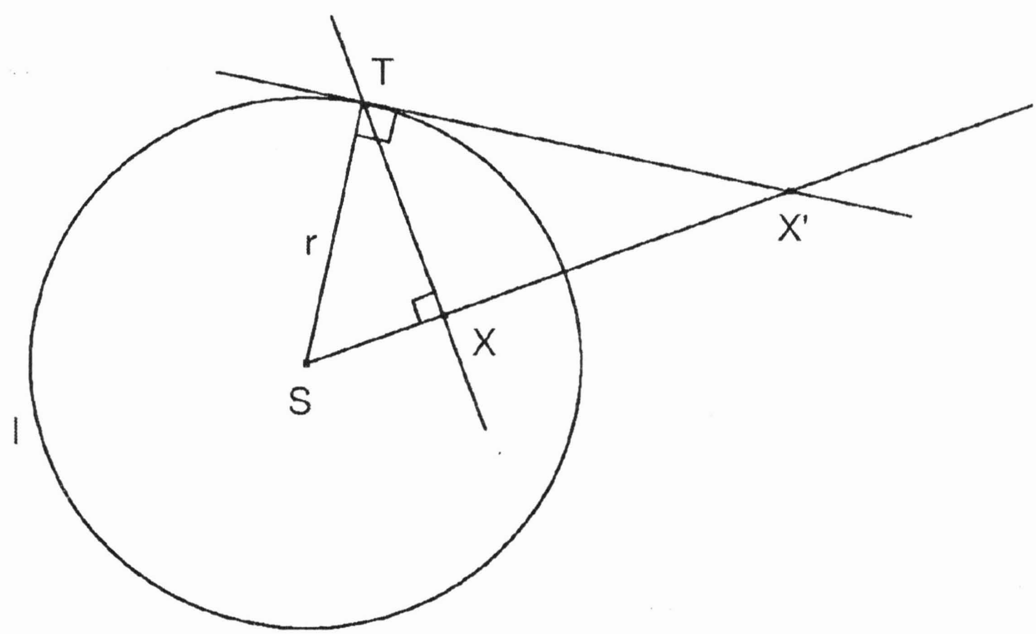
1. Pro daný bod $X \neq S$ je polopřímka $\overrightarrow{SX}$ určena jednoznačně. Protože z (1) vypočteme $|SX'| = \lambda/\,|SX|$, známe tím vzdálenost bodu X' od bodu S, takže poloha bodu X' je určena rovněž jednoznačně. Není tedy možné, aby k nějakému vzoru X existovalo více obrazů X'. To znamená, že kruhová inverze je skutečně zobrazením, jak bylo v definici zmíněno.



Obr. 1: K základním vlastnostem

2. Každý bod, který leží na kružnici $l\left(S; \sqrt{\lambda}\right)$ je samodružný (tj. $X = X'$), neboť podle (1) pro všechny body kružnice l platí $|SX| = |SX'| = \sqrt{\lambda}$. Z (1) dále plyne následující fakt. Pokud $|SX| < \sqrt{\lambda}$, pak $|SX'| > \sqrt{\lambda}$. A opačně. Jestliže $|SX| > \sqrt{\lambda}$, pak $|SX'| < \sqrt{\lambda}$. Jinak řečeno. Když je X bodem z vnitřní oblasti kružnice l, je jeho obraz X' bodem z vnější oblasti kružnice l. Je-li naopak Y bodem z vnější oblasti kružnice l, je jeho obraz Y'

bodem z vnitřní oblasti této kružnice (viz obrázek). Popsaná skutečnost zdůvodňuje název studovaného zobrazení. Vnitřek kruhu s hraniční kružnicí l totiž zobrazí do její vnější oblasti a „inverzně" k tomu vnější oblast kružnice l zobrazí do její oblasti vnitřní. Kruhová inverze je podle definice jednoznačně zadána středem S a koeficientem λ. Pro konstrukční úvahy je však vhodné si uvědomit, že jednoznačně je zadána též pomocí kružnice l (jejímž středem je bod S). Proto se kružnice l nazývá kružnicí kruhové inverze. V dalším se tedy budeme zajímat o to, jak zobrazit bod z vnitřní oblasti kružnice l a ve druhém případě jak zobrazit bod z vnější oblasti kružnice l.



Obr. 2: Zobrazení bodu z vnitřní oblasti

3. Zobrazíme-li bod X' znovu v téže kruhové inverzi, dostaneme bod X'', který splývá s původním vzorem X. To znamená, že složením týchž dvou kruhových inverzí získáme identitu. Učeně říkáme, že kruhová inverze je involutorním zobrazením. Tuto vlastnost má například středová či osová souměrnost, ale nemá ji však posunutí.

4. Na příkladu konkrétní polohy bodů X a Z z vnitřní oblasti kružnice kruhové inverze l (viz obrázek) si můžeme všimnout, že kruhová inverze nezachovává délky (je evidentní, že $|XZ| \neq$

$\neq |X'Z'|$), ani jejich poměry ($|XZ| < |X'Z'|$ ale $|X'Z'| > |X''Z''| = |XZ|$), takže kruhová inverze není ani shodným ani podobným zobrazením. Středoškolští studenti se patrně s příkladem takového zobrazení dosud nesetkali a už jen toto zjištění pro ně může být zajímavé.

5. Z doposud uvedeného je patrné, že dva různé vzory se vždy zobrazí do dvou různých obrazů, takže kruhová inverze je prostým zobrazením. Dále libovolný bod X' roviny s výjimkou bodu S může být obrazem některého bodu $X \neq S$ v uvažované kruhové inverzi. Vztah (1) totiž na polopřímce $\overrightarrow{SX'}$ existenci takového bodu X zajišťuje. Dohromady to znamená, že kruhová inverze je bijektivním zobrazením ($\mathbb{E}_2 - \{S\} \longrightarrow \mathbb{E}_2 - \{S\}$). Díky tomuto vzájemně jednoznačnému „spárování" bodů do dvojic, kdy jeden bod z této dvojice leží uvnitř kružnice l a druhý vně, můžeme tvrdit, že bodů ve vnitřní oblasti kružnice l je „stejně mnoho" jako v její vnější oblasti, což je pro studenty další překvapivé a nečekané zjištění.

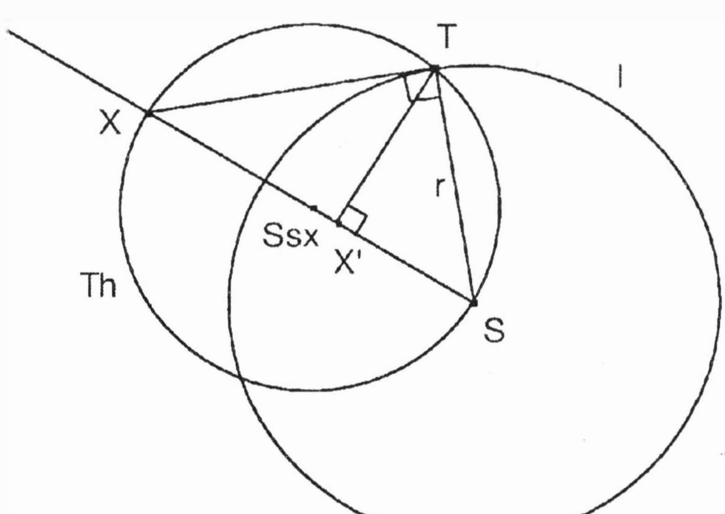
6. Uvážíme-li polopřímku $\overrightarrow{SX}$ a začneme-li po ní vzor $X \neq S$ posouvat směrem k bodu S, bude se jeho obraz X' po této polopřímce od bodu S naopak vzdalovat. Má-li totiž výsledek součinu $|SX| \cdot |SX'|$ zůstat konstantní, je jasné, že se při zmenšení prvního musí ten druhý zvětšit. Takto studentům můžeme vysvětlit, že bod S by se vlastně zobrazil do nekonečna a opačně nekonečně vzdálený bod by se zobrazil do středu kruhové inverze. Toto je možné studentům hezky demonstrovat pomocí vhodného software (např. Cabri geometrie).

Zobrazení bodu z vnitřní oblasti kružnice kruhové inveze

Uvažujme kružnici kruhové inverze $l(S; r)$, kde $r = \sqrt{\lambda}$ a bod $X \neq S$, pro který platí $|SX| < r$. Podle (1) má platit $|SX| \cdot |SX'| = r^2$. Konstrukci bodu X' tedy můžeme provést s využitím Eukleidovy věty o odvěsně. Úsečka SX' má totiž být přeponou pravoúhlého trojúhelníku $SX'T$ ($T \in l$), přičemž známý bod X je patou výšky z bodu T. Nejprve tedy najdeme bod T v průsečíku kružnice l s kolmicí vedenou bodem X k polopřímce $\overrightarrow{SX'}$. (Popsané průsečíky existují dva, stačí však zvolit libovolný z nich.) Hledaný bod X' pak leží v průsečíku polopřímky $\overrightarrow{SX'}$ s kolmicí vedenou bodem T k úsečce ST.

Zobrazení bodu z vnější oblasti kružnice kruhové inveze

Uvažujme kružnici kruhové inverze $l\,(S;r)$, kde $r = \sqrt{\lambda}$ a bod X takový, že $|SX| > r$. Opět má platit $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, takže konstrukci bodu X' zase provedeme pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, pouze jiným postupem. Tentokrát uvážíme pravoúhlý trojúhelník SXT ($T \in l$) s přeponou SX. Hledaný bod X' pak má být patou výšky z bodu T. Bod T získáme jako průsečík Thaletovy kružnice nad průměrem SX a kružnice l. (Tyto průsečíky zase existují dva, opět stačí vybrat libovolný z nich.) Vedením kolmice bodem T k úsečce SX na ní sestrojíme bod X'.

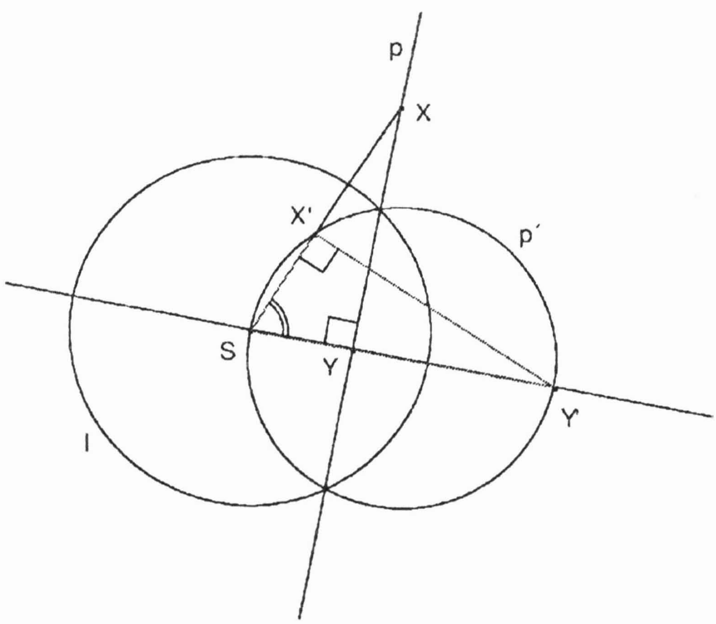


Obr. 3: Zobrazení bodu z vnější oblasti

Tímto jsme tedy popsali, jak zobrazit bod $X \neq S$ v jakékoliv poloze. Již v definici je uvedeno, že bod X' leží na polopřímce

$\overrightarrow{SX}$. To znamená, že každý bod přímky, která prochází bodem S, se zobrazí do (obecně jiného) bodu téže přímky. Každá přímka procházející středem kruhové inverze je tedy slabě samodružná a způsob jejího zobrazení je tudíž triviální. Jak se však zobrazí přímka, která bodem S neprochází?

Zobrazení přímky neprocházející středem kruhové inveze



Obr. 4: Zobrazení přímky neprocházející středem kruhové inverze

Nechť je dána kružnice kruhové inverze $l\left(S; \sqrt{\lambda}\right)$ a přímka p taková, že $S \notin p$. Označme Y kolmý průmět bodu S na přímku p a Y' jeho obraz v uvažované kruhové inverzi. Dále uvažujme libovolný bod $X \neq Y$ přímky p a jeho obraz X'. Dle (1) platí

$$|SX| \cdot |SX'| = |SY| \cdot |SY'| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|SX|}{|SY'|} = \frac{|SY|}{|SX'|}. \tag{2}$$

Neboť dále $|\sphericalangle XSY| = |\sphericalangle Y'SX'|$, jsou trojúhelníky SXY a $SY'X'$ podobné podle věty *sus*, což znamená, že odpovídající si úhly mají stejné velikosti. Vzhledem k tomu, že úhel SYX je pravý, musí být pravý též úhel $SX'Y'$. Takže z bodu X', který neleží na polopřímce $\overrightarrow{SY'}$, je úsečku SY' vidět pod pravým úhlem. Proto bod X' leží na Thaletově kružnici s průměrem SY'. Uvedené nejen dokazuje, že obrazem přímky p je kružnice p', ale též dává návod, jak ji zkonstruovat. Stačí k tomu zobrazit vhodný bod (tj. bod Y), což jsme již vyložili, a sestrojit příslušnou Thaletovu kružnici.

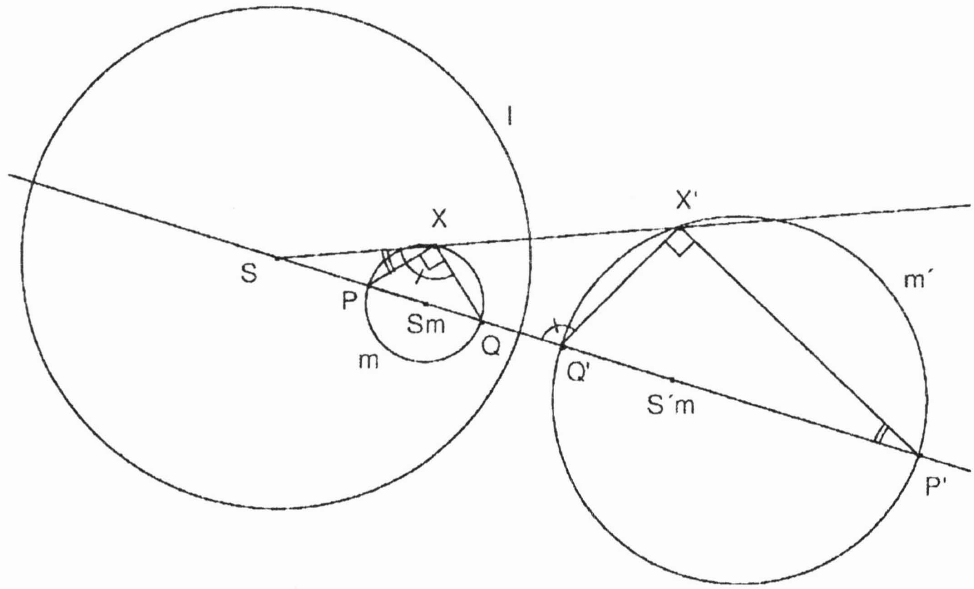
V kruhové inverzi se tedy přímka neprocházející středem kruhové inverze nezobrazí na přímku, jak byli studenti doposud zvyklí, ale zobrazí se na kružnici, o níž jsme dále zjistili, že prochází středem kruhové inverze. Mám vyzkoušeno pomocí Cabri geometrie, že pro studenty bývá obzvlášť působivá demonstrace této skutečnosti zejména v situaci, kdy nechám vzor pohybovat po přímce p, přičemž se odpovídajícím způsobem pohybuje jeho obraz po kružnici p'. To také znamená, že v kruhové inverzi neexistují jiné samodružné přímky než ty, které prochází jejím středem. Na tomto místě tedy můžeme studentům již poměrně snadno zdůvodnit, že ani kružnice se nemusí zobrazit na kružnici. Díky faktu, že kruhová inverze je bijektivním zobrazením, totiž platí též opačně, že obrazem kružnice procházející středem kruhové inverze je vždy přímka, která středem kruhové inverze neprochází. Zbývá nám tedy vysvětlit, jak se zobrazí kružnice neprocházející středem kruhové inverze.

Zobrazení kružnice neprocházející středem kruhové inveze

Nechť je dána kružnice kruhové inverze $l\left(S;\sqrt{\lambda}\right)$ a kružnice $m\left(S_m,r\right)$ taková, že $S \notin m$. Označme P průsečík kružnice m s úsečkou SS_m, Q průsečík kružnice m s polopřímkou opačnou k $\overrightarrow{PS}$, P' a Q' po řadě obrazy bodů P, Q v kruhové inverzi určené kružnicí l. Uvažujme dále libovolný bod X kružnice m takový, že $P \neq X \neq Q$ a jeho obraz X' v uvažované kruhové inverzi. Provedeme-li stejnou úvahu jako ve (2), ovšem s tím, že bod Y nahradíme nejprve bodem P a jeho obraz Y' bodem P', odvodíme tak podobnost trojúhelníků SXP a $SP'X'$ (úhly $\sphericalangle XSP$

a $\sphericalangle P'SX'$ jsou zřejmě shodné) podle věty *sus*. Proto platí

$$|\sphericalangle SXP| = |\sphericalangle SP'X'| \,. \tag{3}$$



Obr. 5: Zobrazení kružnice neprocházející středem kruhové inverze

Když ve (2) bod Y nahradíme bodem Q a jeho obraz Y' bodem Q', zjistíme vzhledem k evidentní shodností úhlů $\sphericalangle XSQ$ a $\sphericalangle Q'SX'$, že podle věty *sus* jsou podobné také trojúhelníky SXQ a $SQ'X'$, takže

$$|\sphericalangle SXQ| = |\sphericalangle SQ'X'| \,. \tag{4}$$

Protože bod P je vnitřním bodem úsečky SQ, platí dále

$$|\sphericalangle SXQ| = |\sphericalangle SXP| + |\sphericalangle PXQ| \,, \text{ přičemž } |\sphericalangle PXQ| = 90^\circ \,, \tag{5}$$

neboť bod X leží na Thaletově kružnici nad průměrem PQ. Užitím známého tvrzení o rovnosti velikosti vnějšího úhlu $\sphericalangle SQ'X'$ v trojúhelníku $Q'X'P'$ a součtu velikostí odpovídajících dvou úhlů vnitřních zjistíme, že

$$|\sphericalangle SQ'X'| = |\sphericalangle Q'X'P'| + |\sphericalangle Q'P'X'| = |\sphericalangle Q'X'P'| + |\sphericalangle SP'X'| \,. \tag{6}$$

Z (6) užitím (4) a (3) dostáváme

$$|\sphericalangle Q'X'P'| = |\sphericalangle SQ'X'| - |\sphericalangle SP'X'| = |\sphericalangle SXQ| - |\sphericalangle SXP| \,.$$

Odtud již podle (5) vypočteme

$$|\sphericalangle Q'X'P'| = |\sphericalangle SXP| + |\sphericalangle PXQ| - |\sphericalangle SXP| = |\sphericalangle PXQ| = 90^\circ \,.$$

To ale znamená, že z bodu X', který neleží na úsečce $Q'P'$, tuto úsečku vidíme pod pravým úhlem, takže bod X' leží na Thaletově kružnici m' nad průměrem $Q'P'$. Dokázali jsme tedy, že obrazem kružnice, která neprochází středem kruhové inverze, je kružnice, která rovněž středem kruhové inverze neprochází. Kdybychom totiž připustili, že $S \in m'$, pak by dle výše uvedeného mělo platit, že $m = m''$ (m'' značí obraz kružnice m' v uvažované kruhové inverzi), přičemž m'' by, jak víme, musela být přímka, zatímco m je kružnice, což by byl spor. Současně jsme provedeným důkazem rovněž dali návod, jak vlastní zobrazení kružnice m pomocí nalezení obrazů bodů P a Q konstrukčně provést. Kružnici m totiž nelze zobrazit pomocí zobrazení jejího středu S_m, jak jsou studenti zvyklí při užití jiných zobrazení. Označme S'_m obraz středu S_m kružnice m. Všimněme si skutečnosti, která je na obrázku jasně patrná, že bod S'_m není středem kružnice m'. Přestože je tedy obrazem kružnice m kružnice m', nezobrazí se přitom střed S_m kružnice m do středu kružnice m'. Tato skutečnost bývá pro studenty rovněž překvapivá.

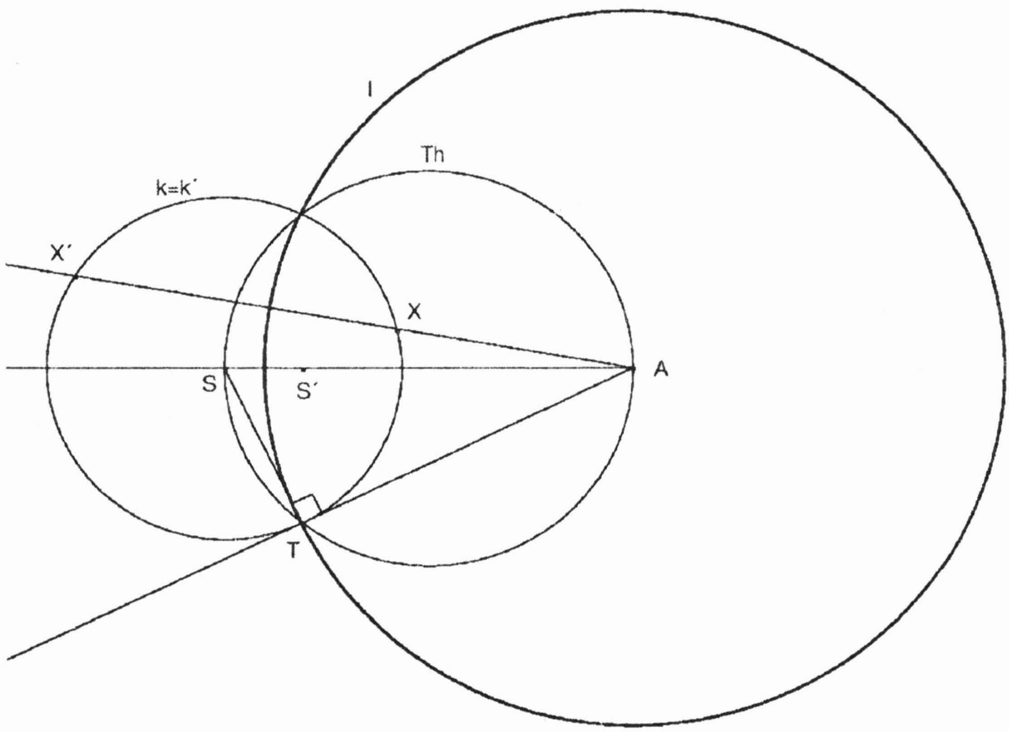
Existence samodružné kružnice

Uvažujme nyní kružnici $k(S; r)$ a bod A takový, že $|SA| > r$. Hledejme odpověď na otázku, je-li možné najít kruhovou inverzi se středem v bodě A takovou, aby v ní kružnice k byla samodružná, tzn. aby se jakýkoliv bod X kružnice k zobrazil do bodu X', který je rovněž bodem kružnice k. K odpovědi se dostaneme pomocí mocnosti bodu A ke kružnici k. Jejím užitím dostáváme

$$|AX| \cdot |AX'| = |AT|^2 \,,$$

kde T značí dotykový bod libovolné tečny vedené bodem A ke kružnici k s kružnicí k. Uvážíme-li tedy kružnici kruhové inverze

$l\,(A;|AT|)$, bude v ní kružnice k slabě samodružná. Ještě si můžeme povšimnout, že $S \notin l$, což znamená, že pro obraz S' středu kružnice S platí $S' \neq S$. To znamená, že dokonce ani v situaci, kdy je kružnice k samodružná, se její střed S nezobrazil do středu kružnice k'.

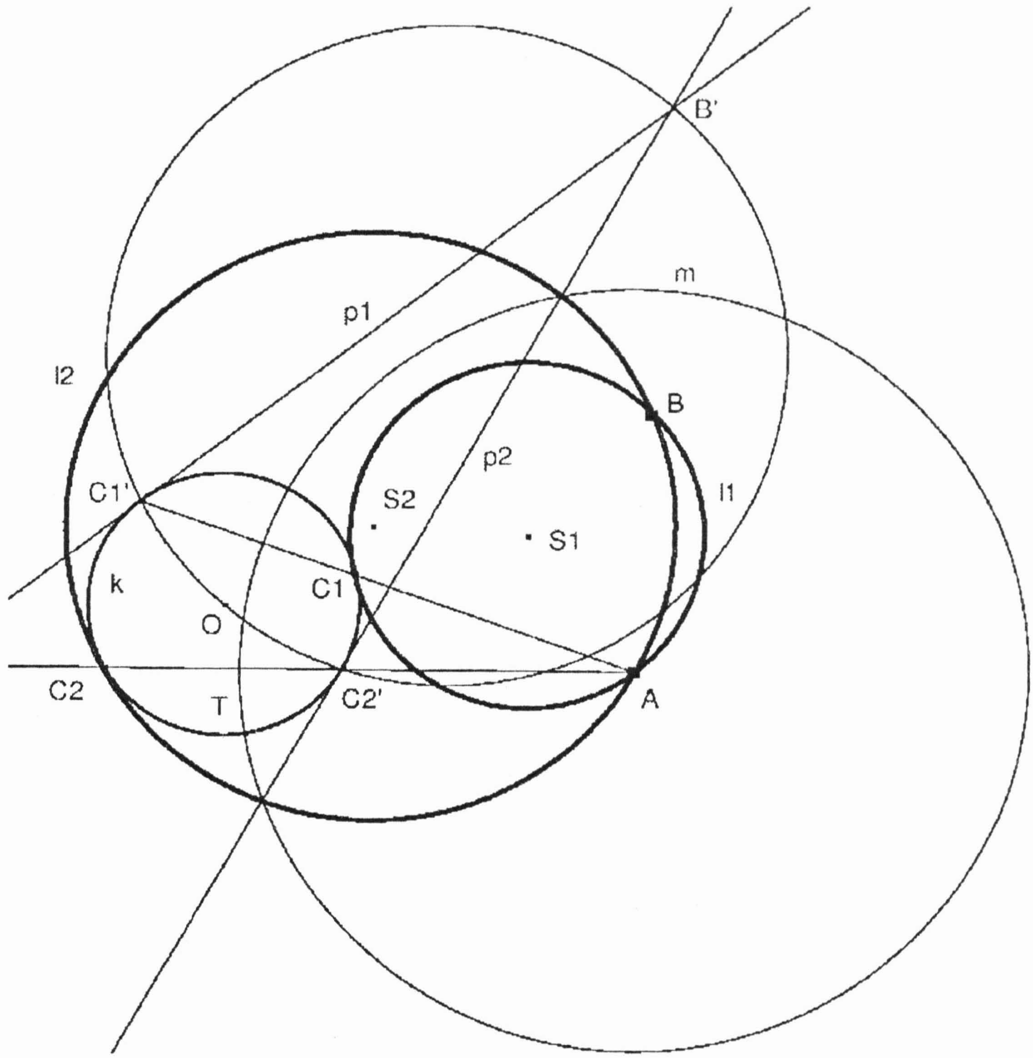


Obr. 6: Slabě samodružná kružnice v kruhové inverzi

Aplikační úloha

Vlastnosti kruhové inverze nejsou jen jakousi „hříčkou", která poslouží pouze k vyvrácení několika mylných představ, které studenti často mají, ale lze ji využít k řešení řady úloh. Závěrem tedy ještě rozebereme jednu z Apolloniových úloh, jejíž řešení by pro středoškolské studenty bez zde uvedených poznatků nebylo dostupné.

Je dána kružnice $k\,(O;r)$ a různé body A a B, které leží v její vnější oblasti. Naší úlohou je sestrojit kružnici l, která se kružnice k dotýká a přitom prochází body A a B.



Obr. 7: K řešení úlohy

Uvažujme kruhovou inverzi se středem v bodě A (její koeficient zvolíme později). Hledaná kružnice l bodem A prochází, proto se zobrazí na přímku, označme ji p. Kružnice k bodem A neprochází, proto se zobrazí na kružnici, označme ji k'. Označme ještě B' obraz bodu B v uvažované kruhové inverzi. Z předchozího víme, že kruhovou inverzi lze zvolit tak, aby $k = k'$, což bude pro konstrukci pohodlné (ale není to nutné). Kružnice takové kruhové inverze je v obrázku označena m. Protože kružnice k a l mají ze zadání jediný společný bod, musí mít také jejich obrazy $k' = k$ a p' opět jediný společný bod. Tím jsme ovšem řešený problém převedli na úlohu, kdy je úkolem sestrojit tečny kružnice k vedené bodem B', kterou umíme s využitím Thaletovy kružnice nad průměrem OB' řešit. Dotykové body těchto tečen jsou označeny C_1' a C_2'. Dotykové body C_1 a C_2 kružnic k a l najdeme pomocí opětovného zobrazení bodů C_1' a C_2' v kruhové inverzi. Body C_1 a C_2 proto leží v průsečících polopřímek $\overrightarrow{AC_1'}$ a $\overrightarrow{AC_2'}$ s kružnicí k (různých od bodů C_1' a C_2'). Dokončení konstrukce, totiž sestrojení kružnice procházející třemi různými body, které už nyní známe, je již zřejmé. Doplňme, že úloha má $0-2$ řešení podle toho, kolik existuje tečen kružnice k vedených bodem B'.

Jak už bylo z předchozího textu patrné, dodávám, že při své výuce se téma kruhové inverze snažím zařazovat. Samozřejmě v míře, která zohledňuje zaměření dané třídy. Stále je pro mě přitom velmi silným a krásným zážitkem, když si mohu všimnout, že to některé studenty hodně zaujalo (snad i obohatilo) a že se mi tím podařilo poodhalit jim jednu z mnoha krás a pozoruhodností matematiky. Pokud se tedy rozhodnete některé z uvedených myšlenek do své výuky také zahrnout, přeji vám vnímavé studenty, jimž je opravdová radost „něco“ předávat.

Do výuky přitom lze začlenit třeba jen některé výše prezentované části. Několik uvedených problémů lze též studentům formulovat jako úlohy a ve vybraných případech přitom dokonce není potřeba hovořit o kruhové inverzi. Například úvahy o zobrazení bodu z vnější či vnitřní oblasti kružnice l je možné využít jako cvičení na aplikaci Eukleidových vět.

Mgr. Aleš Kobza, Ph.D.
Gymnázium, tř. Kpt. Jaroše 14, 658 70 Brno
e-mail: kobza@jaroska.cz

Abstract

The paper presents basic properties of circle projection. They are described and proved. The article extends secondary school curriculum but is still applicable for secondary school students and their teachers. The theory is used in an application problem.