Zkuste si napsat polskou maturitní písemku z matematiky II

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 4, 220–240

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149510

ZKUSTE SI NAPSAT POLSKOU MATURITNÍ PÍSEMKU Z MATEMATIKY II

Úvod

Příspěvek tematicky navazuje na předchozí číslo časopisu *Učitel matematiky*, v němž byl otištěn překlad letošní polské maturitní písemky z matematiky v základní úrovni. Tentokrát dáváme čtenářovi možnost seznámit se se zněním, řešením a hodnocením úloh maturitní písemné práce z matematiky ve vyšší úrovni.[2]

Stejně jako v základní úrovni jsou při řešení vyšší úrovně maturity dovoleny pouze tyto pomůcky: pravítko, kružítko, jednoduchá kalkulačka umožňující jen sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování a matematické vzorce [3]. Během maximálně 180 minut je třeba vyřešit 12 otevřených úloh, za něž lze získat až 50 bodů.

Maturitní zkouška z matematiky vyšší úroveň

Úloha 1. ***(4 body)***
Vyřešte nerovnici $|2x-5|-|x+4| \leq 2-2x$.

Úloha 2. ***(4 body)***
Rovnoramennému lichoběžníku se základnami AB a CD je vepsána kružnice o poloměru r. Dokažte, že $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$.

Úloha 3. ***(3 body)***
Vypočtěte, kolik je šesticiferných přirozených čísel, v jejichž zápisu se objevuje 0 právě třikrát a 5 právě jednou.

Úloha 4. ***(4 body)***
Řešte rovnici $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Úloha 5. ***(5 bodů)***

---

[2] Volný překlad [1]a [2] Martina Kašparová. Na rozdíl od původního textu byla v překladu zadání písemné práce vynechána prázdná místa určená pro poznámky, řešení úloh a tabulky pro doplnění hodnocení.

Číselná posloupnost $\{a, b, c\}$ je aritmetická a $a+b+c = 33$, zatímco posloupnost $\{a-1, b+5, c+19\}$ je geometrická. Vypočtěte a, b, c.

Úloha 6. ***(6 bodů)***
Určete všechny hodnoty parametru m, pro které má rovnice

$$x^2 + 2(1-m)x + m^2 - m = 0$$

dva různé reálné kořeny x_1, x_2 splňující podmínku

$$x_1 \cdot x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2.$$

Úloha 7. ***(4 body)***
Přímka o rovnici $3x - 4y - 36 = 0$ protíná kružnici se středem $S = [3, 12]$ v bodech A a B. Délka úsečky AB je rovna 40. Určete rovnici kružnice.

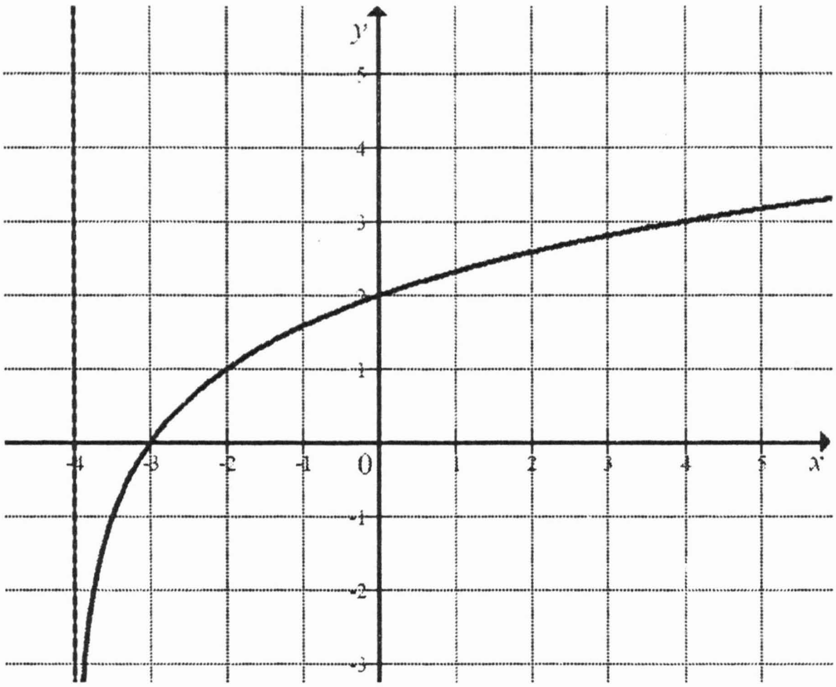
Úloha 8. ***(4 body)***
Zbytek po dělení polynomu $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ dvojčlenem $x + 1$ je roven 20. Určete hodnotu koeficientu m a nulové body tohoto polynomu.

Úloha 9. ***(5 bodů)***
Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AC| = 17$ a $|BC| = 10$. Na straně AB leží bod D tak, že $|AD| : |DB| = 3 : 4$ a $|DC| = 10$. Určete obsah trojúhelníku ABC.

Úloha 10. ***(4 body)***
V jehlanu $ABCS$ je podstavou ABC rovnostranný trojúhelník o straně délky a. Hrana AS je kolmá k rovině podstavy. Vzdálenost vrcholu A od stěny BCS je rovna d. Určete objem tohoto jehlanu.

Úloha 11. ***(4 body)***
Hodíme čtyřikrát symetrickou krychlovou kostkou. Určete pravděpodobnost jevu, že součin počtu ok získaných ve všech čtyřech hodech bude roven 60.

Úloha 12. ***(3 body)***
Na obrázku je výřez grafu logaritmické funkce funkce f definované předpisem $f(x) = log_2(x-p)$.



a) Určete hodnotu p.

b) Nakreslete graf funkce definované předpisem $y = |f(x)|$.

c) Najděte všechny hodnoty parametru m, pro které má rovnice $|f(x)| = m$ dvě řešení s navzájem různými znaménky.

Kritéria pro posuzování odpovědí[3]

Úloha 1.

I. metoda řešení (vyznačení intervalů na číselné ose)

Na číselné ose vyznačíme intervaly:

$$\text{A. } (-\infty, -4), \qquad \text{B. } \langle -4, \tfrac{5}{2}), \qquad \text{C. } \langle \tfrac{5}{2}, +\infty).$$

V jednotlivých intervalech řešíme nerovnici a v každém intervalu vezmeme společnou část příslušného intervalu a získaného řešení nerovnice.

[3]Z prostorových důvodů vynecháváme v překladu „Kritérií" zadání úloh, která jsou součástí polského textu. Rovněž je vynecháno přiřazení úloh ke vzdělávacím standardům, tematickým okruhům a dílčím dovednostem. Zájemci ho mohou najít v polském originále [2].

A. $x \in (-\infty, -4)$	B. $x \in \langle -4, \frac{5}{2})$
$-2x + 5 + x + 4 \leq 2 - 2x$	$-2x + 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$
$x + 9 \leq 2$	$-x + 1 \leq 2$
$x \leq -7$	$x \geq -1$
Řešením nerovnice je v takovém případě $x \leq -7$	Řešením nerovnice je v tomto případě $-1 \leq x < \frac{5}{2}$

C. $x \in \langle \frac{5}{2}, +\infty)$
$2x - 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$
$3x \leq 11$
$x \leq \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$
V tomto případě je řešením soustava nerovnic $\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{11}{3}$

Po sjednocení získaných řešení dáme výslednou odpověď: $x \leq -7$ nebo $-1 \leq x \leq \frac{11}{3}$.
Odpověď: Množinou řešení nerovnic je $(-\infty, -7\rangle \cup \langle -1, \frac{11}{3}\rangle$.

II. metoda řešení (rozlišení čtyř případů)
Zapíšeme čtyři případy:

I. $\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases}$

III. $\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases}$

Pro každý z nich řešíme nerovnici nebo soustavu nerovnic

$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \\ 2x - 5 - x - 4 \leq 2 - 2x \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 < 0 \\ 2x - 5 + x + 4 \leq 2 - 2x \end{cases}$
$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x \geq -4 \\ 3x \leq 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x \geq -4 \\ x \leq 3\frac{2}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x < -4 \\ 5x \leq 3 \end{cases}$
$\frac{5}{2} \leq x \leq 3\frac{2}{3}$	není možné

$\begin{cases} 2x-5<0 \\ x+4\geq 0 \\ -2x+5-x-4\leq 2-2x \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-5<0 \\ x+4<0 \\ -2x+5+x+4\leq 2-2x \end{cases}$
$\begin{cases} x<\frac{5}{2} \\ x\geq -4 \\ x\geq -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x<\frac{5}{2} \\ x< -4 \\ x\leq -7 \end{cases}$
$-1\leq x<\frac{5}{2}$	$x\leq -7$

Po sjednocení získaných řešení udáme výslednou odpověď: $x \leq -7$ nebo $-1 \leq x \leq \frac{11}{3}$.

Hodnocení

Řešení, v němž jsou uvedeny hlavní kroky – **1 bod**. Uchazeč

- vyznačí na číselné ose intervaly $(-\infty, -4)$, $\langle -4, \frac{5}{2})$, $\langle \frac{5}{2}, +\infty)$.

nebo

- zapíše čtyři případy

$$\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+4\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ x+4<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-5<0 \\ x+4\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-5<0 \\ x+4<0 \end{cases}$$

Poznámka

Pokud student udělá chybu při určování intervalů, přidělí se mu **0 bodů**. Podobně získá **0 bodů** uchazeč, který špatně zapsal čtyři případy.

Vyřešení hlavních kroků řešení – **2 body**.

- Uchazeč zapíše nerovnice v jednotlivých intervalech, např.:
  A. pro $x \in (-\infty, -4)$ máme $-2x + 5 + x + 4 \leq 2 - 2x$,
  B. pro $x \in \langle -4, \frac{5}{2})$ máme $-2x + 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$,
  C. pro $x \in \langle \frac{5}{2}, +\infty)$ máme $2x - 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$

nebo

- uchazeč zapíše nerovnice v jednotlivých případech, např.:
  I. je-li $2x - 5 \geq 0$ a $x + 4 \geq 0$, pak $2x - 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$,
  II. je-li $2x - 5 \geq 0$ a $x + 4 < 0$, pak $2x - 5 + x + 4 \leq 2 - 2x$ (nebo zjistí, že tento případ není možný),
  III. je-li $2x - 5 < 0$ a $x + 4 \geq 0$, pak $-2x + 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$,
  IV. je-li $2x - 5 < 0$ a $x + 4 < 0$, pak $-2x + 5 + x + 4 \leq 2 - 2x$.

Řešení provedené do konce, ale s chybami, které nevedou ke správnému řešení (např. drobné početní chyby) – **3 body**.

- Uchazeč správně vyřeší nerovnice a určí společné prvky získaných výsledků a jednotlivých intervalů pouze pro dva intervaly (z intervalů A., B., C.), udělá chybu v třetím intervalu a následně provede řešení do konce

nebo

- uchazeč vyšetří čtyři případy, správně vyřeší nerovnice a určí společné prvky získaných výsledků a jednotlivých intervalů pouze ve dvou případech (z případů I., III., IV.), udělá chybu ve třetím případě a uvede, že případ II. není možný, následně dovede řešení do konce.

Úplné řešení – **4 body**.
Uchazeč zapíše odpověď: $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle -1, \frac{11}{3}\rangle$.

Poznámka
Ve všech zmiňovaných případech může uchazeč uvažovat obě nerovnosti neostré (intervaly oboustranně uzavřené). Jestliže naopak uvažuje všechny nerovnosti ostré (intervaly otevřené), pak hodnotíme celou úlohu o **1** menším počtem **bodů**, než kdyby vyznačil všechny intervaly správně.

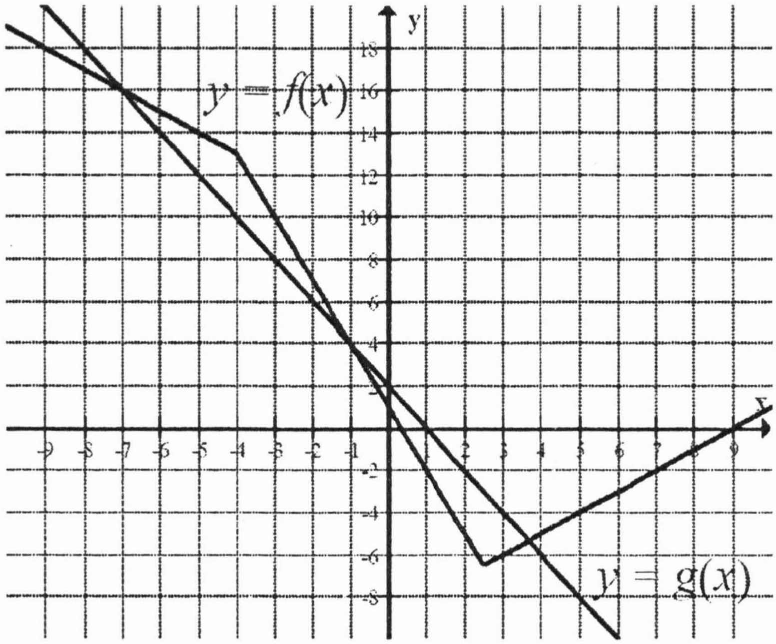
III. metoda řešení (grafické řešení)
Načrtneme grafy funkcí

$$f(x) = |2x - 5| - |x + 4| \quad \text{a} \quad g(x) = -2x + 2.$$

Na číselné ose vyznačíme intervaly: $(-\infty, -4)$, $\langle -4, \frac{5}{2})$, $\langle \frac{5}{2}, +\infty)$. Zapíšeme předpisy funkce f v jednotlivých intervalech bez absolutní hodnoty, např.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 9 & \text{pro } x \in (-\infty, -4) \\ -3x + 1 & \text{pro } x \in \langle -4, \frac{5}{2}) \\ x - 9 & \text{pro } x \in \langle \frac{5}{2}, +\infty) \end{cases}$$

Nakreslíme grafy funkcí f a g.



Vyčteme souřadnice průsečíků grafů funkcí f a g: $x = -7$, $x = -1$, $x = \frac{11}{3}$, prověříme, zda vyhovují rovnici $|2x-5|-|x+4| = 2-2x$, následně vyhovují všechny argumenty, pro které $f(x) \leq g(x)$: $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle -1, \frac{11}{3}\rangle$.

Hodnocení

Řešení, v němž je postup neúplný, ale nutný pro úplné vyřešení – **1 bod**. Uchazeč vyznačí na číselné ose intervaly $(-\infty, -4)$, $\langle -4, \frac{5}{2})$, $\langle \frac{5}{2}, +\infty)$.

Řešení, ve kterém je uveden hlavní postup – **2 body**. Uchazeč zapíše předpisy pro funkci f v jednotlivých intervalech, např.:

A. pro $x \in (-\infty, -4)$ máme $f(x) = -x + 9$

B. pro $x \in \langle -4, \frac{5}{2})$ máme $f(x) = -3x + 1$

C. pro $x \in \langle \frac{5}{2}, +\infty)$ máme $f(x) = x - 9$,

nebo

$$f(x) = \begin{cases} -x+9 & \text{pro } x \in (-\infty, -4) \\ -3x+1 & \text{pro } x \in \langle -4, \frac{5}{2}) \\ x-9 & \text{pro } x \in \langle \frac{5}{2}, +\infty) \end{cases}$$

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **3 body**. Uchazeč nakreslí graf funkce f a přímky o rovnici $y = -2x + 2$.

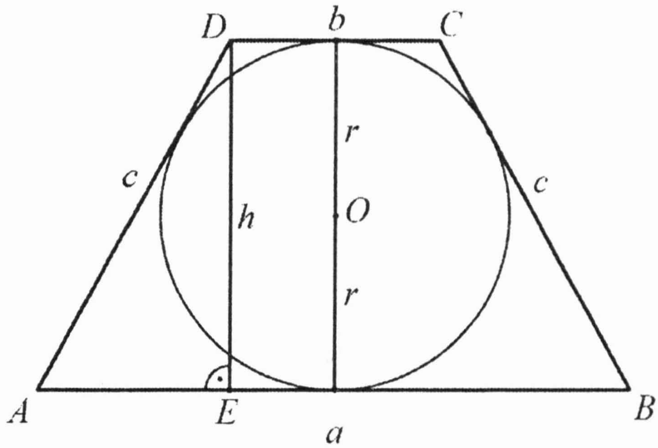
Úplné řešení – **4 body**.

Uchazeč zapíše odpověď: $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle -1, \frac{11}{3}\rangle$.

Úloha 2.

I. metoda řešení

Nakreslíme obrázek a zavedeme označení: $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = c$, r – poloměr kružnice vepsané lichoběžníku, h – výška lichoběžníku.



Protože lichoběžník je rovnoramenný a opsaný kružnici, tak

$$|AE| = \tfrac{a-b}{2}, \quad h = 2r \quad \text{a} \quad a + b = 2c \quad \text{nebo} \quad c = \tfrac{a+b}{2}.$$

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AED dostaneme

$$c^2 = (2r)^2 + \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2, \quad \text{odkud} \quad 4r^2 = c^2 - \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2.$$

Dosazením $c = \frac{a+b}{2}$ získáme

$$4r^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$4r^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4},$$

$$4r^2 = \frac{4ab}{4},$$

$$4r^2 = ab.$$

Tím je důkaz zakončen.

Hodnocení I. metody řešení

Řešení, v němž je postup neúplný, ale nezbytný pro úplné vyřešení – **1 bod**. Uchazeč

- určí délku úsečky AE: $|AE| = \frac{a-b}{2}$

nebo

- určí délku ramene lichoběžníku: $c = \frac{a+b}{2}$.

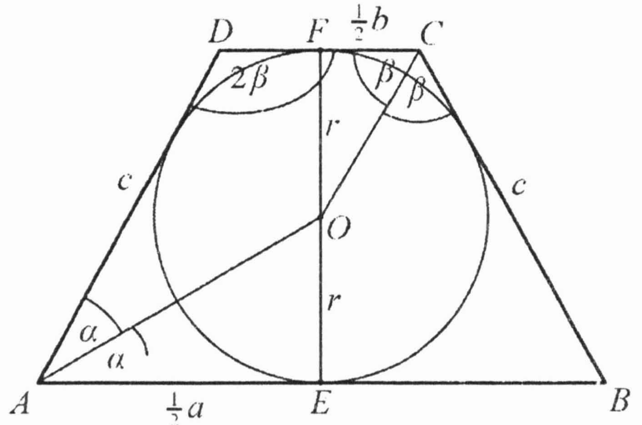
Řešení, ve kterém jsou uvedeny hlavní kroky – **2 body**. Uchazeč určí délku úsečky AE i délku ramene lichoběžníku: $\frac{a-b}{2}$, $\frac{a+b}{2}$.

Řešení, v němž jsou vyřešeny hlavní kroky – **3 body**. Uchazeč použije Pythagorovu větu v trojúhelníku AED a zapíše: $4r^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Řešení úplné – **4 body**. Student dokáže tvrzení: $4r^2 = ab$.

II. metoda řešení

Nakreslíme obrázek a zavedeme označení jako je na obrázku



Poněvadž je do lichoběžníku vepsána kružnice, tak se střed takové kružnice nachází na průsečíku os úhlů lichoběžníka. Z vlastností úhlů střídavých a vedlejších vyplývá, že

$$2\alpha + 2\beta = 180° \quad \text{neboli} \quad \alpha + \beta = 90°.$$

Odtud $\beta = 90° - \alpha$. Z toho vyvodíme, že pravoúhlé trojúhelníky AEO a CFO jsou podobné. Pak

$$\frac{|OE|}{|AE|} = \frac{|FC|}{|FO|} \quad \text{neboli} \quad \frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r}$$

$$\left(\text{nebo } \operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}a},\ \ \operatorname{tg}\beta = \frac{r}{\frac{1}{2}b} \ \text{ a } \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right).$$

Proto $r^2 = \frac{1}{4}ab$ neboli $4r^2 = ab$.

Hodnocení II. metody řešení

Řešení, v němž je postup neúplný, ale nezbytný pro úplné vyřešení – **1 bod**. Uchazeč zapíše vztah $\alpha + \beta = 90°$.

Řešení, ve kterém jsou uvedeny hlavní kroky – **2 body**. Uchazeč

- zdůvodní, že trojúhelníky AEO a CFO jsou podobné a zapíše, že $\frac{|OE|}{|AE|} = \frac{|FC|}{|FO|}$

nebo

- stanoví $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}a}$ a $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{\frac{1}{2}b}$.

Řešení, v němž jsou vyřešeny hlavní kroky – **3 body**. Student

- zapíše rovnost poměrů $\frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r}$

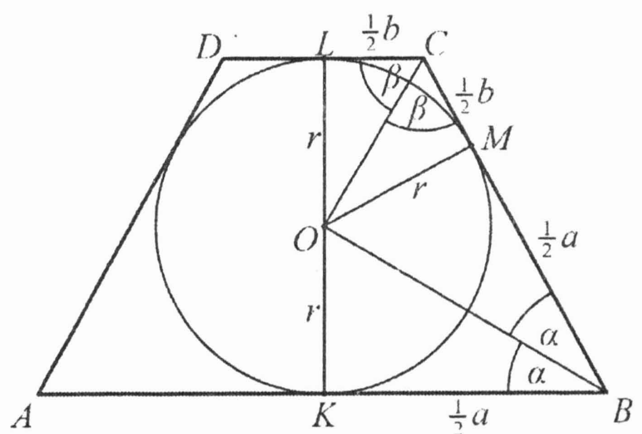
nebo

- použije rovnost $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ a zapíše $\frac{r}{\frac{1}{2}b} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Úplné řešení – **4 body**. Uchazeč dokáže tvrzení: $4r^2 = ab$.

III. metoda řešení (pravoúhlý trojúhelník)

Nakreslíme obrázek a zavedeme označení



Z tvrzení o úsečkách tečen[4] a z vlastností rovnoramenného lichoběžníku vyplývá, že

$$|BM| = |KB| = \tfrac{1}{2}a \quad \text{a} \quad |CM| = |LC| = \tfrac{1}{2}b.$$

[4]Nechť T_1, T_2 jsou body dotyku tečen vedených ke kružnici z bodu A, pak $|AT_1| = |AT_2|$. Pokud je mi známo, neexistuje v naší terminologii název pro tuto vlastnost. V Polsku je označována jako *Twierdzenie o odcinkach stycznych*. (Pozn. překl.)

Vzhledem k tomu, že je do lichoběžníku vepsána kružnice, tak je střed kružnice totožný s průsečíkem os vnitřních úhlů lichoběžníku. Z vlastností úhlů lichoběžníku plyne:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad \text{neboli} \quad \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Odtud vyplývá, že trojúhelník BCO je pravoúhlý. Výška OM tohoto trojúhelníku je geometrickým průměrem délek úseček BM a CM, a tedy

$$r^2 = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}b \qquad \text{neboli} \qquad 4r^2 = a \cdot b,$$

čímž je důkaz dokončen.

Hodnocení III. metody řešení

Řešení, v němž je postup neúplný, ale nezbytný pro úplné vyřešení – **1 bod**. Uchazeč

- napíše, že trojúhelník BCO je pravoúhlý

nebo

- zapíše, že $|BM| = |KB| = \frac{1}{2}a$ a $|CM| = |LC| = \frac{1}{2}b$.

Řešení, ve kterém jsou uvedeny hlavní kroky – **2 body**. Student uvede, že trojúhelník BCO je pravoúhlý a také zapíše, že $|BM| = |KB| = \frac{1}{2}a$ a $|CM| = |LC| = \frac{1}{2}b$.

Poznámka

Pokud student zapíše např. $|OM|^2 = |BM| \cdot |CM|$ a načrtne úsečku OM (nebo zapíše, že je to konec poloměru kružnice vedeného do bodu dotyku kružnice a lichoběžníku), ale neuvede, že $|BM| = \frac{1}{2}a$ nebo $|CM| = \frac{1}{2}b$ (nevyužije tvrzení o úsečkách tečen), získá **2 body**.

Řešení, v němž jsou vyřešeny hlavní kroky – **3 body**. Student

- použije tvrzení o výšce pravoúhlého trojúhelníku spuštěné na přeponu[5] a zapíše např. $|OM| = \sqrt{|BM| \cdot |CM|}$

nebo

- využije podobnost trojúhelníků OMB a OMC a zapíše $\frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r}$.

Úplné řešení – **4 body**. Uchazeč dokáže tvrzení: $4r^2 = ab$.

[5] Tj. použije Eukleidovu větu o výšce. (Pozn. překl.)

Úloha 3.

I. metoda řešení

Z pěti míst vybereme tři, na která vložíme cifru 0, pak zvolíme jedno ze tří míst pro cifru 5 a na zbývající dvě místa rozmístíme cifry různé od 0 a 5.

$$\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2 = 30 \cdot 64 = 1\,920.$$

Hodnocení I. metody řešení

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **2 body**. Uchazeč vybere tři místa z pěti pro cifru 0, vybere jedno ze tří míst pro cifru 5 a rozmístí na zbylá dvě místa cifry různé od 0 a od 5.

Úplné řešení – **3 body**. Student vypočte, kolik je šesticiferných čísel, v jejichž zápise je cifra 0 právě třikrát a cifra 5 právě jedenkrát: 1920.

Poznámka

Jestliže student získá konečný výsledek, ale zachází s ním jako s jedním z několika případů, získá za řešení maximálně **2 body**.

II. metoda řešení

Rozlišíme dva případy

1. cifra 5 se nachází na prvním místě (je to cifra statisíců)

nebo

2. cifra 5 není na prvním místě.

V prvním případě vybereme tři místa (z pěti), na která umístíme cifru 0, a na zbývající dvě místa rozmístíme cifry různé od 0 i 5. Takových šesticiferných čísel je $1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2 = 640$.

Ve druhém případě umístíme na první místo cifru různou od 0 i 5 (takových možností máme 8), následně vybereme místa, na která vepíšeme cifru 5 (máme 5 možností) a pak ze zbývajících čtyř míst vybereme tři, na něž vložíme cifru 0 (můžeme to provést 4 způsoby), na poslední místo položíme cifru různou od 0 a různou od 5 (to můžeme provést 8 způsoby). Proto máme v tomto případě $8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 1\,280$ takových čísel.

Máme tudíž $1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2 + 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 640 + 1\,280 = 1\,920$ šesticiferných čísel splňujících podmínky úlohy.

Poznámka

Ve druhém případě lze provést jiné úvahy: z míst od druhého do šestého vybereme čtyři, na něž umístíme cifru 5 a tři cifry 0 (takových možností máme $5 \cdot 4$), pak na zbývající dvě místa zapíšeme cifry různé od 0 a od 5 (máme 8^2 takových možností). V takovém případě máme tedy $5 \cdot 4 \cdot 8^2 = 1\,280$ takových čísel.

Hodnocení II. metody řešení

Řešení, v němž jsou uvedeny hlavní kroky – **1 bod**. Uchazeč

- zapíše, že je $1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2$ šesticiferných čísel, v jejichž zápise je první cifra 5 a cifra 0 v čísle vystupuje právě třikrát

nebo

- uvede, že existuje $8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8$ šesticiferných čísel, v jejichž zápise první cifra není 5 a cifra 0 se v čísle objevuje právě třikrát.

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **2 body**. Student napíše, že je $1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2$ šesticiferných čísel, v jejichž zápise je první cifra 5 a cifra 0 v čísle vystupuje právě třikrát, a že existuje $8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8$ šesticiferných čísel, v jejichž zápise první cifra není 5 a cifra 0 se v čísle objevuje právě třikrát.

Úplné řešení – **3 body**. Student uvede, že je 1 920 šesticiferných čísel, v jejichž zápise je cifra 0 právě třikrát a cifra 5 pouze jedenkrát.

Poznámka

Jestliže student získá konečný výsledek, ale zachází s ním jako s jedním z několika případů, získá za řešení maximálně **2 body**.

III. metoda řešení

Vybereme čtyři místa, na která položíme cifru 5 a tři cifry 0, na zbývajících místech vepíšeme cifry různé od 0 a 5. Takových šestičlenných posloupností je $\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 8^2 = 3\,840$. Mezi nimi jsou posloupnosti, v nichž se cifra 0 objevuje na prvním místě. Je jich $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2 = 1\,920$. Odtud plyne, že šesticiferných čísel splňujících podmínky úlohy je $\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 8^2 - \binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2 = 3\,840 - 1\,920 = 1\,920$.

Hodnocení III. metody řešení

Řešení, v němž jsou uvedeny hlavní kroky – **1 bod**. Uchazeč

- zapíše počet šestičlenných posloupností, v nichž je cifra 5 pouze jedenkrát a cifra 0 se objevuje právě třikrát: $\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 8^2$

nebo

- uvede počet šestičlenných posloupností, ve kterých je prvním členem 0: $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2$.

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **2 body**. Student napíše, že je $\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 8^2$ šestičlenných posloupností, v nichž je cifra 5 pouze jedenkrát a cifra 0 se objevuje právě třikrát, včetně $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2$ takových posloupností, v jejichž zápisu je první člen 0.

Úplné řešení – **3 body**. Student uvede, kolik je šesticiferných čísel takových, že v jejich zápise vystupuje cifra 0 právě třikrát a jen jedenkrát cifra 5: 1 920.

Poznámka

Jestliže student získá konečný výsledek, ale zachází s ním jako s jedním z několika případů, získá za řešení maximálně **2 body**.

Úloha 4.

I. metoda řešení

Jelikož je $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, tak je rovnice $\cos 2x + \cos x + 1 = 1$ ekvivalentní s rovnicí

$$2\cos^2 x + \cos x = 0,$$

tj. rovnici $\cos x(2\cos x + 1) = 0$. Tato rovnice je ekvivalentní alternativně rovnicím

$$\cos x = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \cos x = -\tfrac{1}{2}.$$

V intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ má rovnice $\cos x = 0$ dvě řešení: $x = \frac{\pi}{2}$ nebo $x = \frac{3}{2}\pi$. Rovnice $\cos x = -\frac{1}{2}$ má v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ dvě řešení: $x = \frac{2}{3}\pi$ nebo $x = \frac{4}{3}\pi$. Odpověď: rovnice $\cos 2x + \cos x + 1 = 1$ má v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ čtyři řešení: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Hodnocení I. metody řešení

Řešení, v němž je postup neúplný, ale nezbytný pro úplné vyřešení – **1 bod.** Uchazeč zapíše rovnici v závislosti na jedné goniometrické funkci téhož argumentu, např. $2\cos^2 x + \cos x = 0$ a tím řešení zakončí.

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **2 body**. Student

- napíše alternativy $\cos x = 0$ nebo $\cos x = -\frac{1}{2}$

nebo

- zavede pomocnou neznámou, např. $t = \cos x$ a uvede $t = 0$ nebo $t = -\frac{1}{2}$ a dále nepokračuje nebo pokračuje s chybami.

Řešení téměř úplné – **3 body**. Uchazeč

- vyřeší rovnici $\cos x = 0$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$: $x = \frac{\pi}{2}$ nebo $x = \frac{3}{2}\pi$

nebo

- vyřeší rovnici $\cos x = -\frac{1}{2}$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$: $x = \frac{2}{3}\pi$ nebo $x = \frac{4}{3}\pi$.

Úplné řešení – **4 body**. Student uvede řešení obou rovnic v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$: $\cos x = 0$ pro $x = \frac{\pi}{2}$ nebo $x = \frac{3}{2}\pi$ ($x = 90°$ nebo $x = 270°$), $\cos x = -\frac{1}{2}$ pro $x = \frac{2}{3}\pi$ nebo $x = \frac{4}{3}\pi$ ($x = 120°$ nebo $x = 240°$).

Poznámky

1. Nevyžadujeme, aby student uvedl podmínku, např. $t \in \langle -1, 1\rangle$, pokud z řešení vyplývá, že student tuto podmínku bere do úvahy.

2. Jestliže uchazeč podá obecné řešení goniometrické rovnice: $\cos x = 0$ pro $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ pro $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ nebo pro $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, kde k je celé číslo, obdrží **3 body**.

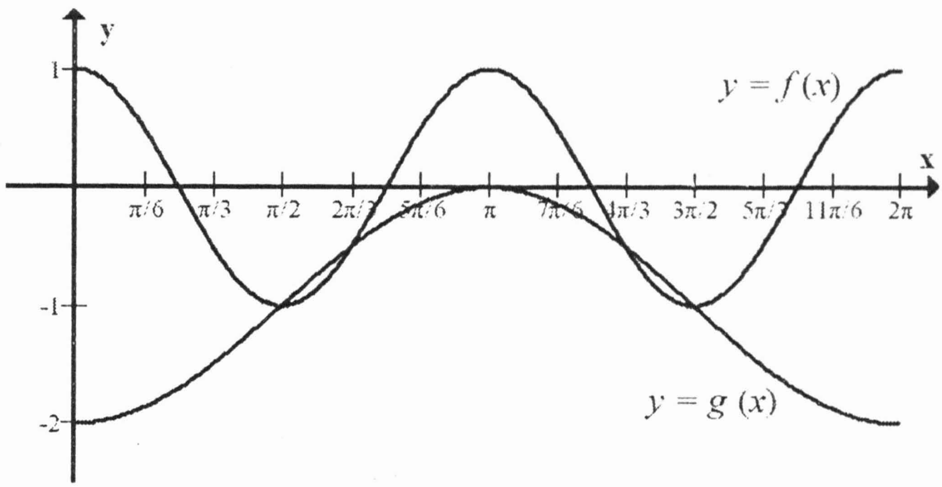
3. Pokud student vydělí obě strany rovnice $2\cos^2 x + \cos x = 0$ výrazem $\cos x$, aniž by uvažoval dva případy a správně vyřeší rovnici $2\cos x + 1 = 0$, pak za celé řešení získá **2 body**.

II. metoda řešení

Rovnici můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\cos 2x = -\cos x - 1.$$

Uvažujeme dvě funkce $f(x) = \cos 2x$ a $g(x) = -\cos x - 1$ a nakreslíme jejich grafy (postačí omezit se na interval $\langle 0, 2\pi \rangle$).



Odečteme řešení rovnice: $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Hodnocení II. metody řešení

Řešení, v němž je postup neúplný, ale nezbytný pro úplné vyřešení – **1 bod**. Uchazeč zapíše rovnici v ekvivalentním tvaru, např. $\cos 2x = -\cos x - 1$, zavede dvě funkce $f(x) = \cos 2x$ a $g(x) = -\cos x - 1$ a načrtne graf jedné z těchto funkcí.

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **2 body**. Student zapíše rovnici v ekvivalentním tvaru, např. $\cos 2x = -\cos x - 1$, zavede dvě funkce $f(x) = \cos 2x$ a $g(x) = -\cos x - 1$ a načrtne jejich grafy.

Úplné řešení – **4 body**. Student zakreslí grafy obou funkcí, najde jejich průsečíky a odečte správně všechna řešení rovnice $\cos 2x = -\cos x - 1$, tj. $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$.[6]

Poznámka

Jestliže student uvede správně tři řešení (špatně odečte čtvrté řešení), získá **3 body**, pokud odečte nejvýše dvě řešení, obdrží **2 body**.

[6] V originálním dokumentu byl patrně omylem uveden stejný text jako v I. metodě řešení, navíc byl vynechán komentář popisující, zač udělit 3 body.

Úloha 5.

I. metoda řešení
Zapíšeme soustavu rovnic

$$\begin{cases} a+b+c=33 \\ a+c=2b \\ (b+5)^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$$

Za $a+c$ v první rovnici dosadíme výraz $2b$ a obdržíme rovnici $3b=33$, odkud $b=11$. Soustava rovnic má potom tvar:

$$\begin{cases} b=11 \\ a+c=22 \\ 16^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$$

Druhá a třetí rovnice tvoří soustavu se dvěma neznámými, kterou vyřešíme dosazením výrazu $22-a$ za neznámou c ve třetí rovnici. Tím dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou a:

$$a^2-42a+297=0.$$

Proto $a=33$ nebo $a=9$.

Pokud je $a=33$, pak $c=-11$ a zbývající $b=11$. Tím získáme aritmetickou posloupnost $\{33,11,-11\}$ a po provedení příslušných operací geometrickou posloupnost $\{32,16,8\}$.

Pro $a=9$ je $c=13$ a $b=11$. Nyní dostaneme aritmetickou posloupnost $\{9,11,13\}$ a po vykonání odpovídajících operací geometrickou posloupnost $\{8,16,32\}$.

Hledanými čísly jsou tedy: $a=33$, $b=11$, $c=-11$ nebo $a=9$, $b=11$, $c=13$.

Hodnocení I. metody řešení
Řešení, v němž je postup neúplný, ale nezbytný pro úplné vyřešení – **1 bod**. Uchazeč využije vlastnosti aritmetické (geometrické) posloupnosti a zapíše odpovídající rovnici, např. $2b=a+c$ nebo $(b+5)^2=(a-1)(c+19)$, a tím řešení skončí nebo dělá chyby.

Řešení, které obsahuje hlavní kroky úlohy – **2 body**. Student využije vlastnosti obou posloupností (aritmetické i geometrické) a zapíše soustavu rovnici umožňující nalezení čísel a, b, c, např.

$$\begin{cases} a+b+c=33 \\ a+c=2b \\ (b+5)^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$$

a tím řešení zakončí nebo pokračuje, ale s chybami.

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **3 body**. Uchazeč transformuje soustavu rovnic na kvadratickou rovnici s neznámou a nebo c, např.

$$a^2-42a+297=0 \qquad \text{nebo} \qquad c^2-2c-143=0,$$

a dále v řešení nepokračuje nebo pokračuje s chybami.

Řešení do konce, ale s chybami, které nevedou ke správnému řešení (např. početní chyby) – **4 body**. Uchazeč

- správně vyřeší kvadratickou rovnici, zamítne jedno z řešení a správně určí druhou trojici čísel

nebo

- převede soustavu rovnic na kvadratickou rovnici o jedné neznámé s početní chybou, např. chyba při redukci členů nebo v přepisu, následně provede řešení do konce (za předpokladu, že má kvadratická rovnice dva reálné kořeny)

Úplné řešení – **5 bodů**. Student určí hledaná čísla: $a=33$, $b=11$, $c=-11$ nebo $a=9$, $b=11$, $c=13$.

Poznámky

1. Pokud student použije vlastnosti aritmetické posloupnosti pro geometrickou posloupnosti (nebo naopak), pak za celé řešení obdrží **0 bodů**.

2. Jestliže uchazeč zapíše odpověď ve tvaru, z něhož není možné jednoznačně zjistit, že existují dvě trojice hledaných čísel, např. zapíše: $a=33$ nebo $a=9$, $b=11$, $c=-11$ nebo $c=13$, dostane **4 body**.

II. metoda řešení

Označme: a – první člen aritmetické posloupnosti, r – diferenci takové posloupnosti. Pak je $b = a + r$, $c = a + 2r$. Z vlastnosti aritmetické posloupnosti a ze zadání získáme rovnici $a + (a + r) + (a + 2r) = 33$ a odtud $a + r = 11$. Aritmetickou posloupnost proto můžeme zapsat následovně: $\{11 - r, 11, 11 + r\}$. Posloupnost $\{a - 1, b + 5, c + 19\}$, a tedy posloupnost $\{10 - r, 16, 30 + r\}$ je geometrická, tudíž můžeme zapsat rovnici, např.

$$16^2 = (10 - r)(30 + r).$$

Po úpravách a přerovnání členů dostaneme kvadratickou rovnici

$$r^2 + 20r - 44 = 0.$$

Řešením této rovnice je $r = 2$ nebo $r = -22$. Následně získáme a, b, c. Hledanými čísly jsou : $a = 9$, $b = 11$, $c = 13$ nebo $a = 33$, $b = 11$, $c = -11$.

Hodnocení II. metody řešení

Řešení, v němž je postup neúplný, ale nezbytný pro úplné vyřešení – **1 bod**. Uchazeč zavede označení: a – první člen aritmetické posloupností a r – diference této posloupnosti a využije definici aritmetické posloupnosti pro zápis odpovídající rovnice, např.

$$a + (a + r) + (a + 2r) = 33 \qquad \text{nebo} \qquad a + r = 11,$$

a tím řešení zakončí nebo je další řešení chybné.

Řešení, které obsahuje hlavní kroky úlohy – **2 body**. Student

- použije vlastnosti geometrické posloupnosti a zapíše soustavu rovnic, např.

$$\begin{cases} a + r = 11 \\ (a + r + 5)^2 = (a - 1)(a + 2r + 19) \end{cases}$$

nebo

- zapíše členy geometrické posloupnosti v závislosti na r, např. $\{10 - r, 16, 30 + r\}$ a dále nepokračuje v řešení nebo pokračuje s chybami.

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **3 body**. Uchazeč převede soustavu rovnic na rovnici s neznámou r, např.

$$(11-r+r+5)^2 = (11-r-1)(11-r+2r+19) \text{ či } r^2+20r-44=0$$

a dále v řešení nepokračuje nebo pokračuje s chybami.
Řešení do konce, ale s chybami, které nevedou ke správnému řešení (např. početní chyby) – **4 body**. Uchazeč

- správně vyřeší kvadratickou rovnici, zamítne jedno z řešení, např. $r < 0$, a správně určí druhou trojici čísel

nebo

- převede soustavu rovnic na kvadratickou rovnici o jedné neznámé s početní chybou, např. chyba při redukci členů nebo v přepisu, následně provede řešení do konce (za předpokladu, že má kvadratická rovnice dva reálné kořeny)

Úplné řešení – **5 bodů**. Student určí dvě trojice čísel: $a = 33$, $b = 11$, $c = -11$ nebo $a = 9$, $b = 11$, $c = 13$.

Poznámky

1. Pokud student použije vlastnosti aritmetické posloupnosti pro geometrickou posloupnost (nebo naopak), pak za celé řešení obdrží **0 bodů**.

2. Jestliže uchazeč zapíše odpověď ve tvaru, z něhož není možné jednoznačně zjistit, že existují dvě trojice hledaných čísel, např. zapíše: $a = 33$ nebo $a = 9$, $b = 11$, $c = -11$ nebo $c = 13$, dostane **4 body**.

Dokončení příště

Zdroje

[1] Centralna Komisja Egzaminacyjna. *Egzamin maturalny z matematyki.* Poziom rozszerzony. Maj 2013 [online]. Warszawa: CKE, 2013. [Cit. 17. 7. 2013].

Dostupné z http://www.cke.edu.pl/files/file/Arkusze-2013/Matura-2013/matematyka_PR.pdf

[2] Centralna Komisja Egzaminacyjna. *Egzamin maturalny 2013. Matematyka.* Poziom rozszerzony. Kryteria oceniania odpowiedzi. Maj 2013 [online]. Warszawa: CKE, 2013. [Cit. 17. 7. 2013]. Dostupné z http://www.cke.edu.pl/files/file/Arkusze-2013/Matura-2013/Kryteria-Oceniania/matematyka-PR.pdf

[3] Centralna Komisja Egzaminacyjna. Wybrane wzory matematyczne [online]. Warszawa: CKE, 2013. [Cit. 28. 6. 2013]. ISBN 978-83-7400-263-9. Dostupné z http://www.cke.edu.pl/images/stories/Tablice/tablice_matematyczne.pdf