Emil Calda
Důkaz, který se mi líbí

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 1, 14–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150338

DŮKAZ, KTERÝ SE MI LÍBÍ

Emil Calda

V následujících řádcích dokážeme nepříliš významnou větu o algebraických rovnicích s celými koeficienty, která praví:

Rovnice $P(x) = 0$, kde $P(x)$ je polynom n-tého stupně s celočíselnými koeficienty, nemá žádné celé kořeny, jsou-li obě čísla $P(0)$ a $P(1)$ lichá.

Toto tvrzení je uvedeno v Kořínkových *Základech algebry*, kde ve cvičení ke kapitole *Kořeny algebraických rovnic* je požadován jeho důkaz; čtenáři se přitom doporučuje, aby použil známou větu, jejíž pomocí se dají určit všechny racionální kořeny algebraické rovnice s racionálními koeficienty. Ukážeme si, že při důkazu se bez této věty obejdeme.

Mějme tedy polynom $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ s celočíselnými koeficienty a nechť čísla $P(0)$, $P(1)$ jsou obě lichá; máme dokázat, že potom žádný kořen rovnice $P(x) = 0$ není celé číslo.

Zvolme libovolně celá čísla r, s taková, že obě jsou buď lichá anebo obě sudá, a utvořme rozdíl $P(r) - P(s)$; dostaneme

$$P(r) - P(s) = a_0\left(r^n - s^n\right) + a_1\left(r^{n-1} - s^{n-1}\right) + \cdots + a_{n-1}(r - s).$$

Vzhledem k tomu, že nejen rozdíl $r - s$ je sudé číslo, ale že jsou sudé všechny rozdíly $r^m - s^m$ v závorkách na pravé straně poslední rovnosti, je sudé číslo i rozdíl $P(r) - P(s)$. Na základě tohoto výsledku usoudíme:

Pro $s = 0$ a každé sudé číslo r je rozdíl $P(r) - P(0)$ sudý, neboť čísla r a 0 jsou obě sudá. Protože však $P(0)$ je podle předpokladu číslo liché, je číslo $P(r)$ rovněž liché; znamená to, že je $P(r) \neq 0$ pro všechna sudá čísla r.

Pro $s = 1$ a každé liché číslo r je rozdíl $P(r) - P(1)$ sudý, neboť čísla r a 1 jsou obě lichá. Protože však $P(1)$ je podle předpokladu číslo liché, je číslo $P(r)$ rovněž liché; znamená to, že je $P(r) \neq 0$ pro všechna lichá čísla r.

Zjistili jsme tak, že $P(r) \neq 0$ pro všechna celá čísla, což znamená, že rovnice $P(x) = 0$ nemá celočíselné kořeny.

Čtenář se užitím dokázané věty může přesvědčit o tom, že například rovnice

$$x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 8x - 9 = 0$$

celočíselné kořeny vskutku nemá.

Pokusím se ještě vysvětlit, proč se mi tento důkaz líbí. Zdá se mi, že názorně ukazuje, jak vhodným seskupením a uspořádáním samozřejmých poznatků (parita součtu a rozdílu sudých a lichých čísel) se dá logickými úvahami dospět k výsledkům, které už tak triviální být nemusí. Není to náhodou způsob, kterým každá věda dospívá k výsledkům a závěrům, které nejsou na první pohled zřejmé? Dosáhla matematika a fyzika dnešní úrovně jinak než vyvozováním závěrů z postupně nashromážděných faktů více méně samozřejmých? Kromě toho mám navíc dojem, že důkazy uvedeného typu mohou výrazným způsobem přispět k dosažení cíle, který si vyučování matematice klade. Člověk může výše uvedenou větu zapomenout a nikdy ji nemusí použít, ale úvahy, jimiž byla dokázána, se mu někdy mohou hodit, dokonce i v běžném životě. Skoro se domnívám, že bychom měli lepší zákony a že by se společnost nacházela v lepším stavu, kdyby všichni poslanci a politici byli ve škole v tomto smyslu více ovlivněni.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz