Gabriela Novotná

Vyjádření vztahu celek-část zlomkem se zaměřením na spojitý a diskrétní model v řešeních žáků 2. stupně

Učitel matematiky, Vol. 30 (2022), No. 2, 104–126

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150457

VYJÁDŘENÍ VZTAHU CELEK–ČÁST ZLOMKEM SE ZAMĚŘENÍM NA SPOJITÝ A DISKRÉTNÍ MODEL V ŘEŠENÍCH ŽÁKŮ 2. STUPNĚ

Gabriela Novotná[1]

1. Úvod

Obtížnost zlomků z nich činí výzkumně populární téma. Zlomky jsou opakovaně zařazovány mezi nejobtížnější oblasti matematiky na základní škole (např. Hejný et al., 2004; Hejný & Kuřina, 2009; Vondrová et al., 2015). Rendl et al. (2013) je dokonce označují za jedno z kritických míst matematiky. Za prvé, pochopení zlomků je nezbytné pro zvládnutí mnohých partií matematiky, má tedy smysl se zabývat porozuměním žáků a prohlubováním jejich poznání v této oblasti. Za druhé, porozumění zlomkům je mnohovrstevnaté. Žáci nejdříve intuitivně vnímají jejich izolované modely a teprve postupně se jejich poznání dostává na abstraktní úroveň. Porozumění zlomkům a operacím s nimi lze tedy zkoumat na různé úrovni a napříč celým 2. stupněm základní školy.

Zvládnutí vztahu mezi celkem a částí je vnímáno jako základní pro dobré porozumění zlomkům (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) stejně jako práce s různými modely, čímž se zamezí jednostranné představě (Rendl et al., 2013). Grafická reprezentace zlomků a práce s různými modely bývá ve škole často zanedbávána (Rendl & Páchová, 2013), otázkou tedy zůstává, jak žáci s různými typy modelů pracují.

[1]Výzkum byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy (projekt č. 424119).

Provedli jsme výzkum na čtyřech základních fakultních školách v Praze, kde jsme žákům jedné třídy každého ročníku zadali mj. diagnostický test v oblasti zlomků. Jeho část zaměřená na vztah celek–část bude představena zde. Zajímalo nás, jak žáci zvládají grafickou reprezentaci tohoto vztahu a jaké nejčastější chyby se v jejich řešení objevují.

2. Teoretické pozadí

Zlomky bývají některými žáky vnímány jen jako uspořádaná dvojice čísel bez hlubšího pochopení jejich vztahu (Hejný, 2004b; Tichá & Macháčková, 2006; Vondrová & Žalská, 2013), což mívá pro žákovo porozumění zlomkům trvalé následky. I proto byla zlomkům už věnována velká výzkumná pozornost, u nás např. M. Tichou (Tichá & Macháčková, 2006 adal.), v zahraničí např. M. Behrem et al. (1983), T. Kierenem (1976) a mnohými dalšími. Žáci se v těchto případech nesnaží zlomky pochopit a dávají přednost učení se zpaměti (Hejný, 2004b). Jedním z důvodů může být současný způsob zavedení zlomků, kdy podle řady učitelů není přes přeplněné kurikulum na vybudování důkladných představ o zlomcích čas (Hejný & Kuřina, 2009). Hejný upozorňuje také na význam tzv. kmenových zlomků (tj. takových zlomků, jejichž čitatel je roven jedné), které mají podle něj v poznávacím procesu žáka nezastupitelnou roli. Dříve než si žák stihne vybudovat hloubkové porozumění pojmu kmenový zlomek (např. generický model), přicházejí nicméně „do vědomí žáka separované modely zlomků s čitatelem různým od 1 a v představách žáka dochází v důsledku uvedené ‚rozmazanosti' dvou pojmů k tápání, které končí metakognitivním rozhodnutím ‚budu se držet pravidel, ta jsou jistá'" (Hejný, 2004b, s. 350). Vondrová a Žalská (2013) také upozorňují, že intuitivní porozumění zlomku ještě neznamená, že žák zvládne pracovat s jeho formální matematickou formou. Představu o zlomku i jeho formu je podle nich nutné opakovaně propojovat. Rendl (2015, s. 250) dodává, že „samotné početní řešení úlohy prostřednictvím algoritmických výpočtů nemusí znamenat, že žák má jasnou představu o zlomkové strukturaci".

2.1. Zlomky v RVP ZV

V České republice se zlomky v celé šíři probírají většinou v 7. ročníku (v souladu s dobou, kdy ještě byly platné jednotné osnovy), nicméně s jednotlivými (izolovanými) modely se žák seznámí už dříve. Úvod do tématu zlomků a základní práce s nimi (např. právě vztah celek–část) se probírá již na prvním stupni, v roce 2013 byla základní práce se zlomky zařazena do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) už do 2. období 1. stupně (4. a 5. ročník). S pojmy jako polovina, třetina, tři čtvrtiny apod. se žák běžně setká i mimo školní prostředí.

Podle aktuálního RVP ZV[2] by žák na konci 1. stupně měl z oblasti zlomků (a oblastí jim blízkým) zvládnout např. následující výstupy:

- modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku,
- porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel.

Podle aktuálního RVP ZV by žák na konci 2. stupně měl z oblasti zlomků (a oblastí jim blízkým) zvládnout např. následující výstupy:

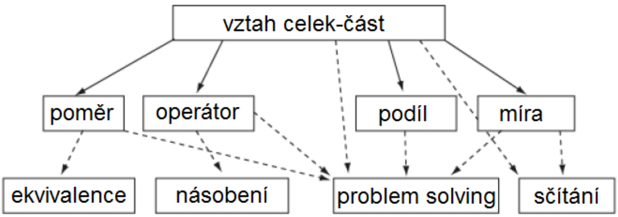
- užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem),
- pracuje se zlomky a smíšenými čísly, používá vyjádření vztahu celek–část (zlomek, desetinné číslo, procento).

2.2. Vztah celek–část

Důkladné porozumění pojmu zlomek zahrnuje porozumění zlomku v jeho různých rolích. V literatuře se hovoří o tzv. subkonstruktech, resp. slovy M. Rendla (2015) subkonceptech. S touto myšlenkou poprvé přišel T. Kieren (1976), který navrhl, že koncept

[2] Aktuální verze RVP ZV je z května 2017, s účinností od 1. 9. 2017, viz `http://www.msmt.cz/file/43792/`.

zlomků je ve skutečnosti složen ze čtyř různých subkonceptů: poměr (ratio), operátor (operator), podíl (quotient) a míra (measure). Vztah celek–část podle něj prostupuje všemi čtyřmi výše zmíněnými konstrukty, proto jej nevnímal jako pátý subkoncept. Behr et al. (1983) jeho myšlenky dále rozvinuli a doporučili vnímat vztah celek–část jako pátý samostatný subkoncept, nadřazený zbývajícím čtyřem. Také sestavili model, kde jednotlivé subkoncepty propojili se základními operacemi se zlomky a s řešením problémů (problem solving) (viz obr. 1).



Obr. 1: Teoretický model propojující subkoncepty zlomků s operacemi se zlomky a řešením problémů (Behr et al., 1983)

Autoři se vesměs shodují, že tyto subkoncepty jsou propojené jak matematicky, tak psychologicky a jejich porozumění je předpokladem pro to, aby žáci uměli řešit problémy v oblasti zlomků (např. Kieren, 1976; Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Vztah celek–část společně s dělením na stejně velké části je považován za základ vzniku kvalitního porozumění zbývajícím čtyřem subkonceptům zlomků (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Diagnostika porozumění žáků v oblasti zlomků by tedy měla být zaměřena na všechny subkoncepty, jako to bylo i v našem výzkumu (Novotná, 2020). Zde se však zaměříme jen na subkoncept vztah celek–část (dále nazýván jako subkoncept C–Č).

V subkonceptu C–Č zlomek vyjadřuje porovnání mezi počtem částí dělené jednotky (čitatel) a celkovým počtem částí, na které je tato jednotka rozdělena (jmenovatel). Žáci musejí především zvládnout následující (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007): Části, na které je celek rozdělený, musí mít stejnou velikost. Části dohromady musí dát celek. Na čím více částí je celek rozdělený, tím menší jednotlivé části jsou. Vztah mezi částí a celkem je zachovaný, nehledě na velikost, tvar, umístění a orientaci jednotlivých částí.

V českém kurikulu je vztah celek–část zmiňován z uvedených pěti subkonceptů nejčastěji. Bývá to také první interpretace zlomků, se kterou se žáci setkají. Vztah celek–část je tedy zpravidla pro děti nejpřirozenější interpretací zlomků (Behr et al., 1983, s. 93).

Uvedeme tři úlohy, které se liší tím, co je dáno a co hledáme:

- V celku vyznačte, kolik je jeho $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ...
- Na obrázku je $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ... z celku, nakreslete celek.
- Na obrázku jsou $\frac{2}{3}$ z celku, nakreslete co nejpřesněji $\frac{5}{6}$ stejného celku.

2.3. Spojité a diskrétní modely

Pro důkladné porozumění zlomkům a případnou reedukaci je žádoucí pracovat s různými izolovanými modely, které mají potenciál stát se generickými modely. Různí autoři dělí modely různě, v této práci je užíváno následující rozdělení (podle Novotné, 2015, s. 38–39, s oporou o různé zdroje literatury):

a) diskrétní modely:

počet uspořádaný – diskrétní jednotky uspořádané podle určitého schématu (např. krabice bonbónů),

počet neuspořádaný – diskrétní jednotky volně „rozsypané“ vedle sebe (např. sáček kuliček),

b) spojité modely:

úsečka (tyč, špejle) – určitou modifikací tohoto modelu je číselná osa, na rozdíl od úsečky obsahuje jednotku,

kruh (koláč, pizza, dort) – model dělíme spojnicemi středu a bodů na obvodu kruhu, určitou modifikací je ciferník, který obsahuje po obvodu 60 dílků (minut), je tedy vhodný pro zlomky se jmenovatelem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 a 60, *obdélník* – model dělíme spojnicemi bodů na obvodu,

čokoláda – na rozdíl od obdélníku má předrozdělené dílky, podle kterých se dá dělit svisle a/nebo vodorovně.

Hloubkové poznání v oblasti zlomků podporujeme a ověřujeme například prací s různými modely zlomku, konstruktivistickým odvozováním algoritmů pro operace se zlomky, použitím nestandardních (školsky netypických) úloh apod. Právě v těchto oblastech pak žáci s algoritmickým poznáním[3] často selhávají. Takové úlohy jsou zařazeny i v našem diagnostickém testu (viz kapitola 3).

Obtížnost práce s různými modely se pro žáky může lišit. Např. Hiebert a Tonnessen (1975) zjistili, že děti ve věku 5–8 let dokáží mnohem lépe rozdělit na stejné části diskrétní modely než modely spojité. Poukázali tím také na fakt, že při dělení různých modelů používají žáci pravděpodobně odlišné strategie. Obdobné tendence byly prokázány i v našem kvalitativním výzkumu (Novotná, 2020), např. žákyně (6. ročník) umí rozdělit na třetiny kruh, ale ne obdélník.

K podobným výsledkům dospěli i Boyce a Mossová (2017), kteří zkoumali řešení úloh se zlomky v závislosti na modelu (diskrétní, obdélník a kruh) mezi učiteli prvního stupně. Zjistili, že výsledky úloh s kruhovým modelem nejlépe odpovídaly empirické trajektorii vývoje porozumění zlomků u žáků. Výsledky úloh s diskrétními modely však dopadaly výrazně lépe než úlohy s kruhovým modelem. Jedinou výjimkou byla situace, kdy kruhový model představoval celek o velikosti jeden kruh (oproti celku o jiné velikosti, např. dva kruhy).

3. Metodologie výzkumu

Výzkum proběhl začátkem školního roku 2019/2020 na čtyřech fakultních školách v Praze. Testování proběhlo vždy v jedné třídě

[3]Poznání, kde se žák snaží použít naučený postup řešení, zobecnit způsob řešení či definici pojmu či aplikovat algoritmus, i když pojmům a postupům zcela nerozumí. Nesnaží se pochopit, jak postupy a vzorce vznikly, řešení si mechanicky zapamatuje a dál ho nepromýšlí. Opakem je pro nás hloubkové porozumění (viz Novotná, 2020).

každého ročníku druhého stupně, testováni byli všichni přítomní žáci. Žákům byl zadán diagnostický test (viz níže) a dotazník (není součástí tohoto článku), zadání bylo provedeno autorkou. Složení respondentů je k dispozici v tabulce 1.

Tab. 1: Respondenti studie

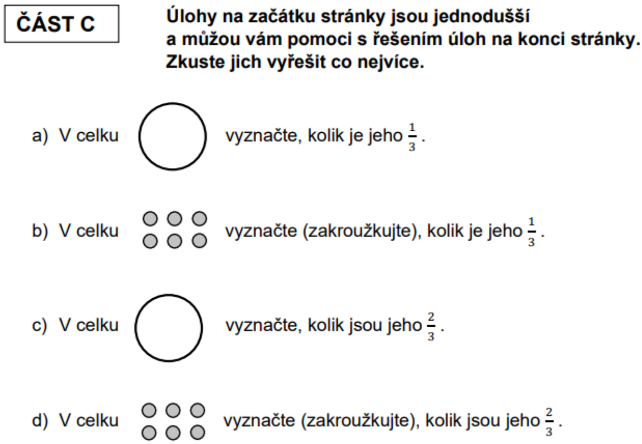
	škola A	škola B	škola C	škola D	celkem
6. ročník	21	13	17	19	70
7. ročník	21	21	24	15	81
8. ročník	16	15	22	31	84
9. ročník	20	21	24	26	91
celkem	78	70	87	91	326

3.1. Diagnostický test

Na základě studia odborné literatury a rozhovorů s několika učiteli matematiky 1. i 2. stupně byl sestaven diagnostický test, který je zaměřený na pět subkonceptů zlomků (viz oddíl 2.2). Jeho cílem bylo diagnostikovat úroveň a hloubku poznání žáků v této oblasti. Vycházeli jsme především z indikátorů formálního poznání a typů nestandardních úloh (např. Hejný, 2004a; Hejný & Kuřina, 2009). Úlohy jsou řazeny gradovaně, jinými slovy, úlohy na začátku jsou snazší a mohou žákovi pomoci řešit úlohy následující.

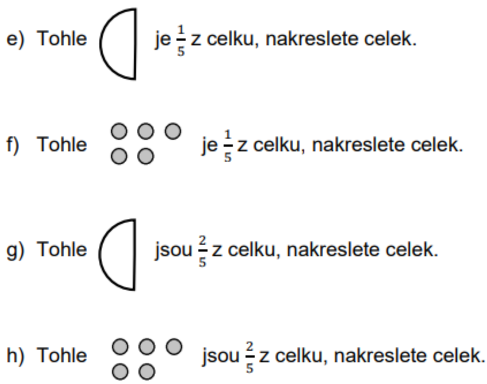
Byly vytvořeny čtyři verze testu, které se liší jen pořadím subkonceptů. Část věnovaná subkonceptu C–Č byla vždy na druhém místě. Dále už se v článku zaměříme jen na tuto část diagnostického testu. Žádná z úloh nevyžaduje postupy řešení, které se probírají až na druhém stupni základní školy. Předpokládali jsme tedy, že i žáci 6. a 7. ročníků by měli úlohy zvládnout vyřešit, i když pro ně mohou být řešení obtížnější než pro žáky 9. ročníku. Tato část testu obsahuje devět úloh rozdělených do tří bloků (viz obr. 2, 3 a 4).

V úlohách *a*–*d* je obrázkem zadaný celek a žák má vyznačit nejprve $\frac{1}{3}$ tohoto celku, následně $\frac{2}{3}$ celku (úlohy $a+c$ kruhový model, úlohy $b+d$ diskrétní [kuličkový] uspořádaný model). Ve všech čtyřech úlohách tedy zjišťujeme část z celku.



Obr. 2: Zadání diagnostického testu, úlohy *a–d*

V úlohách *e–h* je obrázkem zadaná část celku a žák má nakreslit celek. Nejprve je dána $\frac{1}{5}$, poté $\frac{2}{5}$ (úlohy $e+g$ kruhový model, úlohy $f+h$ diskrétní [kuličkový] uspořádaný model). Ve všech čtyřech úlohách tedy z části zjišťujeme celek.



Obr. 3: Zadání diagnostického testu, úlohy e–h

Úloha *i* je kombinací obou předešlých bloků. Žákům je zadán obdélník a instrukce (viz obr. 4).

i) Na obrázku jsou $\frac{2}{3}$ z celku, nakreslete co nejpřesněji $\frac{5}{6}$ stejného celku.

Obr. 4: Zadání diagnostického testu, úloha *i*

3.2. Analýza dat

Vypracované didaktické testy žáků byly anonymizovány, jejich řešení úloh bodově ohodnocena a zakódována podle vyskytujících se chyb a správných kroků řešení. Hodnocení všech úloh bylo provedeno jedním hodnotitelem podle manuálu. Bodové hodnocení úloh bylo zdrojem kvantitativních výzkumných dat. Bylo zvoleno čtyřstupňové kódování, na základě bodového zisku pak byla vypočítána průměrná úspěšnost každé úlohy:

- 3 body – úloha vyřešena správně, včetně odpovídající grafické reprezentace,
- 2 body – správný postup, který by vedl ke správnému výsledku, kdyby žák neudělal numerickou/kreslicí chybu, pravděpodobně způsobenou nepozorností nebo nepřesností,
- 1 bod – náznak částečně správného řešení, ale špatný/nedořešený výsledek,
- 0 bodů – neřešeno nebo špatný výsledek bez dalšího postupu řešení.

Za správné řešení je považováno takové řešení, za které získal žák alespoň 2 body. Před samotnou kvalitativní analýzou dat byla provedena deskriptivní statistická analýza žákovských chyb (četnosti, párové t-testy, F-testy). Je však nutné podotknout, že analýza se zakládá pouze na písemných řešeních žáků, jde tedy o naši interpretaci poskytnutého řešení. Samotná řešení úloh byla analyzována i kvalitativně z hlediska postupů řešení a chyb žáků. Před hodnocením žákovských řešení byly pro každou úlohu vytipovány očekávané chyby a postupy řešení. Hodnocení úloh pak proběhla podle sestaveného manuálu, kdy byly zaznamenávány výskyty konkrétních chyb a kroků správného řešení u každé úlohy respondenta.

3.3. Výzkumné otázky

Stanovili jsme si následující výzkumné otázky:

Jak řeší žáci 2. stupně základní školy zadané úlohy? Jaké jsou jejich postupy řešení a jaké jsou jejich chyby?

Je úspěšnost žáků vyšší v úlohách s oporou o spojitý model nebo o diskrétní model?

Závisí jejich preference modelu na typu úlohy?

4. Empirická zjištění

Průměrný zisk žáka z celé části testu byl 14,84 bodů ($\sigma = 7{,}44$) z 27 možných, jen 5 žáků získalo plný počet bodů. Žáci nejčastěji zkoušeli řešit úlohy a (98,5 %) a c (97,6 %). Úlohy a–d zkoušeli žáci řešit zhruba pětkrát častěji než úlohy e–h. Nejméně často pak řešili úlohu i (64,4 %). S výjimkou prvních tří úloh se snižoval počet žáků, kteří se následující úlohu pokusili řešit.

Průměrné bodové výsledky jednotlivých úloh jsou k dispozici v tabulce 2. Nejlépe žáci řešili úlohy b, d, a, nejhůře úlohu i. Bodové ohodnocení ve třech blocích úloh se snižovalo.

Tab. 2: Průměrné bodové výsledky úloh, směrodatná odchylka a počet vynechání

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
průměr	2,05	2,44	1,86	2,29	1,53	1,62	1,16	1,15	0,74
σ	0,76	1,16	1,86	1,27	1,44	1,42	1,43	1,39	1,10
průměr	8,64				5,46				0,74
σ	3,18				4,79				1,10
vynechalo žáků	5	16	8	29	46	57	76	90	116

Nejčastěji žáci škrtali v úlohách f, h, e. Největší kreslicí nepřesnosti se vyskytly v úlohách a a c, a to zhruba u 56 % žáků. Výpočty se v řešení žáků téměř neobjevily, 16 žáků jej uvedlo v řešení úlohy i.

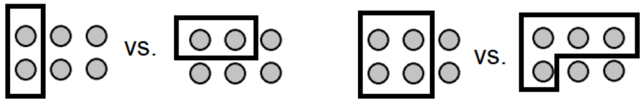
Nyní se podíváme na různé typy úloh a modelů a na rozdíly mezi jednotlivými ročníky a školami.

4.1. Z celku zjistit část

Úlohy *a*–*d* (obr. 5) dopadly v celkovém hodnocení nejlépe. Úlohy s diskrétním modelem získaly lepší bodové ohodnocení než úlohy s kruhovým modelem, úlohy s kmenovými zlomky dopadly lépe než úlohy se zlomky s čitatelem dva. Přes 81 % žáků rozdělilo (alespoň přibližně) kruh modelem „mercedes“, tedy tak, že žák z horní části kruhu spustil svislý poloměr ke středu a ze středu pak dva další poloměry směřující dolů doleva a doprava tak, že poloměry kruh dělí na třetiny tvarem připomínajícím logo Mercedesu (viz obr. 5 část *a*). 6–7 % žáků kruh rozdělilo, ale nevyznačilo (např. vyšrafováním) příslušnou část. Jen minimum žáků se snažilo dělit kruh na pruhy, zhruba u šesti procent se objevila snaha o jiné rozdělení (především na polovinu a dvě čtvrtiny, dále na dvě poloviny nebo na čtyři čtvrtiny). Pokud žák správně rozdělil kruh na třetiny v úloze *a*, v naprosté většině pak rozdělil správně kruh i v úloze *c* (párový t-test, $p = 0{,}03$), stejná situace ale neplatí pro vyznačení části. Přibližně polovina žáků, kteří rozdělili kruh, ale nevyznačili část v úloze *a*, ji pak vyznačili v úloze *c*.

Obr. 5: Úlohy *a*–*d* s možným (správným) řešením

Přes 97 % žáků diskrétní modely nijak nerozdělovalo, žáci v obrázku rovnou vyznačili výsledek. Zhruba třikrát častěji se v úloze *b* objevilo správné vyznačení kuliček pod sebou (vs. vedle sebe) a zhruba pětkrát častěji v úloze d ve čtverci (vs. ve tvaru písmene L), viz obrázek 6.



Obr. 6: Různá (správná) označení části z celku v úlohách b a d

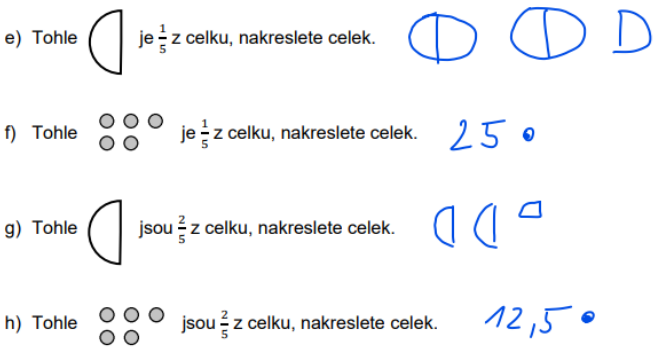
Všechny čtyři úlohy a–d vyřešilo správně 64 % žáků. Jak již bylo zmíněno výše, tato čtveřice úloh dopadla v testu nejlépe. Na základě párového t-testu bylo zjištěno, že žáci často vyřešili správně buď obě z úloh a a c, nebo ani jednu ($p = 0{,}02$), stejně tak úlohy b a d ($p = 0{,}003$). Závislost mezi bodovým ohodnocením úloh $a+b$ a $c+d$ nebyla t-testem zjištěna. Všichni žáci, kteří vynechali úlohu s kruhovým modelem (pro úlohu a $N = 5$, pro c $N = 8$), vynechali i úlohu s diskrétním modelem (pro b $N = 16$; pro d $N = 29$).

Mezi nejčastějšími žákovskými chybami se objevilo především (v sestupném pořadí):

- nepřesné rozdělení kruhu na třetiny,
- metodicky špatné rozdělení kruhu na třetiny (typicky polovina a dvě čtvrtiny), respektive špatná představa o dělení zlomku,
- rozdělení kruhu, ale nevyznačení části,
- vyznačení (s rozdělením nebo bez) jiné části než třetiny.

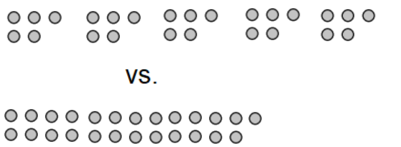
4.2. Z části zjistit celek

Úlohy e a f s kmenovými zlomky (obr. 7) měly zhruba o půl bodu lepší průměrné bodové ohodnocení než úlohy g a h se zlomky s čitatelem dva. Zvyšovalo se postupně i procento žáků, kteří úlohu vynechali (z 14 % u úlohy e na 28 % u úlohy h). Žáci celek zhruba o třetinu častěji kreslili jako celé kruhy a část (dva a půl kruhu v úloze e a kruh a čtvrt v g) než jako půlkruhy (pět půlkruhů v úloze e a dva půlkruhy a čtvrtkruh v g).



Obr. 7: Úlohy e–h s možným (správným) řešením

Na úlohy s diskrétním modelem žáci nejčastěji odpovídali zápisem typu „25 kuliček/puntíků“ (42 %)[4], nebo kreslili uspořádaný celek (26 %). Jen tři žáci nakreslili celek bez uspořádání. Pětiny (pět kuliček) v úloze f žáci častěji oddělovali, než spojovali do jednoho celku (viz obr. 8).



Obr. 8: Nejčastější typy uspořádání celku (kuliček) v úloze f

Nemůžeme říct, zda existuje vztah mezi správným řešením úloh e+g, ani f+h, jelikož párový t-test nedovolil zamítnout nulovou hypotézu (tedy že mezi řešením úloh není statisticky významný vztah). Nicméně jen devět žáků (3 %), kteří vyřešili správně úlohu g, nevyřešilo správně úlohu e, všichni tito žáci navíc získali v úloze g plné tři body. Úlohu e tři z těchto devíti žáků vynechali, tři nakreslili jako odpověď jeden kruh a tři nakreslili jiný celek. Osm jiných žáků, kteří vyřešili správně úlohu h, nevyřešilo správně úlohu f, opět všichni se ziskem tří bodů. Jeden z těchto žáků úlohu f vynechal, dva žáci nakreslili dvacet kuliček a pět z nich nakreslilo jiný (různý) počet kuliček.

[4]Toto řešení jsme považovali za správné.

14 % žáků zaměnilo zadání úlohy e a vyznačili jednu pětinu z celku podobně jako v úlohách a–d. U dalších úloh už ale k záměně docházelo méně často, u úlohy h v necelém 1 % případů.

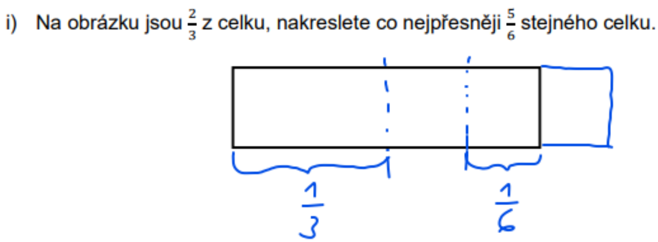
Všechny čtyři úlohy této části vyřešilo správně 24 % žáků, žádnou z nich necelých 10 %. Pokud žák vyřešil správně právě dvě úlohy, jednalo se buď o úlohy s kmenovými zlomky (e+f), nebo o dvojici úloh se stejným modelem (e+g, nebo f+h).

Mezi nejčastějšími žákovskými chybami se objevily především (v sestupném pořadí):

- záměna zadání, vyznačení části z celku místo nalezení celku (především v úloze e),
- nakreslení celku jako jednoho kruhu v úlohách s kruhovým modelem,
- nerozdělení zadané části (kruhu nebo kuličky) v úlohách g a h.

4.3. Z části zjistit jinou část

Úloha i (viz obr. 9) byla zařazena v této části diagnostického testu jako poslední a pro žáky byla rozhodně nejobtížnější, vynechalo ji téměř 36 % respondentů. 22 % žáků však vyřešilo úlohu správně, z toho zhruba dvě třetiny získaly tři body.



Obr. 9: Úloha i s možným (správným) řešením

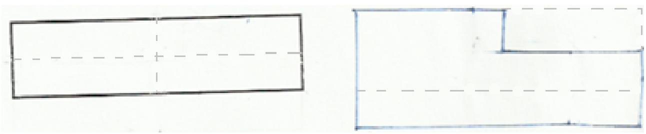
37 % žáků zvládlo rozdělit obdélník na dvě poloviny a získat tak jednu třetinu, zhruba třetina z nich pak získala šestinu rozdělením na další poloviny. Většina žáků se správným řešením dokreslila k obdélníku šestinu (13 % ze všech žáků), někteří původní

obdélník rozdělili a pod něj nakreslili nový obdélník (5 %), někteří jen nakreslili nový obdélník bez naznačení dělení původního obdélníku (2 %).

Nejčastější strategie řešení byla ta zaznamenaná na obrázku 10. Několik dalších žáků rozdělilo obdélník nejprve na čtyři díly, dva z nich k zadanému obdélníku přidali a škrtli (nevybarvili) jeden původní díl (viz obr. 7).

Obr. 10: Ukázka žákovského řešení úlohy i

Většina žáků rozdělovala obdélník svisle, pouze několik respondentů vodorovně. Jen respondent č. 12 zvolil kombinaci, kdy obdélník rozdělil dvěma čarami spojujícími středy jeho stran. Následně překreslil obdélník zvětšený o dva vodorovné dílky a vygumoval dílek vpravo nahoře (viz obr. 8, gumované čáry doplněny přerušovaně autorkou).



Obr. 11: Ukázka žákovského řešení úlohy i, respondent č. 12

Žáci, kteří vyřešili úlohu i správně, měli z testu průměrně o 8,3 bodů více než žáci, kteří ji nevyřešili.

4.4. Spojité vs. diskrétní modely

V tomto oddíle porovnáme práci žáků se spojitými (kruhovými) a diskrétními modely v úlohách a–h. Úlohu i pro její specifičnost a obtížnost z této analýzy vynecháme.

Jak již bylo zmíněno výše, úlohy s diskrétním modelem byly hodnoceny lépe než úlohy s kruhovým modelem pro úlohy a–f. V druhém bloku úloh (e–h) už bylo hodnocení vyrovnanější (lépe byly ohodnoceny úlohy f a g). Ve dvojicích úloh stejného typu ale žáci ve všech případech vynechávali častěji úlohy s diskrétním modelem, viz tabulka 3. Při porovnání s tabulkou 1 tedy můžeme tvrdit, že úlohy s diskrétními modely žáci sice častěji vynechávali, avšak pokud už se je rozhodli řešit, pak dopadala jejich řešení vždy lépe než řešení úloh s kruhovým modelem.

Tab. 3: Počet žáků, kteří vynechali úlohy

	$a+b$		$c+d$		$e+f$		$g+h$	
vynechalo žáků	5	16	8	29	46	57	76	90
vynechalo procent	1,5 %	4,9 %	2,5 %	8,9 %	14,1 %	17,5 %	23,3 %	27,6 %

Žáci v diskrétních modelech v naprosté většině nijak nerozdělovali kuličky na části celku, ale výsledek rovnou zakreslili. Naznačení dělení celku se nejčastěji objevilo v úloze h (u 4 žáků). Většina žáků odpověď u úloh f a h zapsala pomocí čísla, což však může být způsobeno vyšším množstvím kuliček, které měli kreslit. Pokud kreslili, pak většinou model uspořádaný ve stejné struktuře jako zadání.

Spojité modely naopak žáci častěji spojovali do celých kruhů, než by opakovaně zakreslovali jeho část. Celkem 98 žáků (30 %) mělo alespoň v jedné úloze problém s rozdělením kruhu na třetiny, ačkoliv se o to pokusili (a neuspěli, použili jiné rozdělení než „mercedes“). Dalších 230 žáků (70,5 %) mělo alespoň v jedné úloze rozdělený kruh na třetiny viditelně nepřesně, jen 37 žáků (11 %) mělo v obou případech rozdělený kruh na třetiny metodicky správně i přesně[5].

4.5. Ročníky a školy

Mezi výsledky jednotlivých škol jsou rozdíly jak v průměrných bodových ziscích, tak ve vyrovnanosti žáků v jedné třídě (viz tab. 4). Nejlepších výsledků dosahovali žáci na škole A, kde se zároveň ob-

[5] Tím rozumíme, že tři části kruhu vypadaly zhruba stejně velké; alespoň podobně jako na obrázku 5.

jevily i nejmenší rozdíly mezi žáky v jedné třídě. Naopak nejhorší výsledky a největší rozdíly se vyskytly na škole B. Vzhledem k velikosti vzorku však z těchto zjištění nemůžeme vyvozovat zásadní závěry. Neklademe si za cíl ani školy srovnávat, jelikož školy nebyly před provedeným šetřením výkonnostně škálovány ani porovnávány. Výsledky uvádíme spíše pro informaci, v jakém bodovém rozmezí se jednotlivé třídy a ročníky pohybují.

Tab. 4: Bodové zisky žáků jednotlivých tříd, podle škol

třída	**min**	**max**	**průměr**	σ	**průměr**	σ
A6	6	25	16,9	2,8	18,3	2,9
A7	3	25	16	3,6		
A8	12	27	21,3	2,8		
A9	11	27	19,9	2,2		
B6	0	24	8,1	2,7	10,7	3,2
B7	0	22	7,8	2,3		
B8	0	24	11,7	2,9		
B9	2	25	14,4	3,5		
C6	9	26	16,9	2,9	14,9	3,4
C7	0	21	9	2,6		
C8	1	25	13	3,4		
C9	11	26	21	2,5		
D6	5	25	13,8	3,2	15,1	3,3
D7	0	24	10,4	3,7		
D8	4	27	16,3	3,3		
D9	2	26	17,2	2,8		

Výsledky stejné analýzy podle ročníků jsou v tabulce 5. Nejlepších výsledků dosáhli žáci 9. ročníků (vč. nejmenších rozdílů mezi nimi), nejhorší ohodnocení měli žáci 7. ročníků. Tyto výsledky jsou shodné i pro jednotlivé úlohy, pro všechny typy úloh a modelů.

Tab. 5: Průměrné bodové zisky žáků, podle ročníků

	úlohy *a–d*	úlohy *e–h*	úloha *i*	spojité modely	diskrétní modely	celkem	σ	min	max
6. r.	8,5	5,4	0,6	6,8	7,0	14,4	2,9	0	26
7. r.	7,4	3,1	0,4	5,0	5,4	10,8	3,1	0	25
8. r.	8,9	5,9	0,8	6,7	8,1	15,6	3,1	0	27
9. r.	9,6	7,3	1,2	7,8	9,2	18,1	2,8	2	27

5. Diskuze

Nejprve je nutné podotknout, že respondenti 6. a 7. ročníků[6] ještě neměli téma zlomky na druhém stupni probrané. Při řešení zadaných úloh by to však nemělo žákovi s dobrou představou pojmu zlomek (z prvního stupně) vadit. Analýza dat nicméně ukázala, že 6. a 7. ročníky dopadly o něco hůře než 8. a 9. ročníky. Všichni žáci průměrně získávali jen málo přes polovinu možných bodů, což naznačuje, že řešení úloh pro ně bylo obtížné. Alarmující je také zjištění, že i nejjednodušší úlohy v testu (*a–d*) vyřešily správně jen necelé dvě třetiny respondentů. Velká část žáků tedy pravděpodobně nemá vybudovanou dobrou představu pojmu zlomek, což koneckonců ukazuje již mnoho předchozích výzkumů (např. Hejný & Kuřina, 2009; Rendl & Vondrová, 2013; Samková & Tichá, 2017). Počet žáků, kteří úlohy řešili, a bodové ohodnocení jejich řešení se s postupujícími úlohami snižuje a odpovídá tak našemu gradování úloh v jednotlivých částech testu. Většina žáků řešila úlohy pouze graficky, bez výpočtů, což je v souladu s povahou zadaných úloh.

V obou částech testu žáci častěji vynechávali úlohy s diskrétními modely, avšak jejich řešení pak dopadala lépe (s výjimkou dvojice úloh $g+h$, kde úloha g dopadla průměrně o setinu bodu lépe). Obdobné výsledky potvrzují i Boyce a Mossová (2017). Můžeme jen odhadovat, čím je to způsobeno. Jedním z vodítek může být zjištění, že v českých učebnicích se s kruhovými modely pracuje častěji než s modely diskrétními (Vejmelková, 2014),

[6] S výjimkou sedmé třídy na škole A, která v době testování se zlomky začínala pracovat (zhruba týden). Jejich řešení dopadla ze 7. ročníků nejlépe.

tudíž si na řešení úloh s diskrétními modely častěji troufali žáci, kteří byli přesvědčení o svém správném postupu. Dalším vysvětlením může být fakt, že žáci zkrátka používají při práci s různými modely různé strategie řešení (viz Hiebert & Tonnessen, 1975). Naše analýzy navíc naznačují, že mezi dvojicemi úloh, které se lišily jen užitím kruhového nebo diskrétního modelu, žáci často neviděli souvislost a úlohy řešili izolovaně.

Oproti našemu očekávání se jen minimum žáků pokusilo dělit kruhový model na pruhy, o něco větší množství žáků pak rozdělilo kruh na čtvrtiny a tři díly (polovinu a dvě čtvrtiny) označili jako třetiny. Úlohy s kruhovým modelem e a g pak tito žáci většinou přeskočili. Těmto žákům uniká jedna z nejvýznamnějších zásad práce se zlomky, že části (jmenovatel), na které celek dělíme, musí být stejně velké. Nejčastější chyby při práci s kruhovým modelem tedy vznikaly v nepřesném rozdělení na třetiny modelem „mercedes“, případně ve (zhruba) správném rozdělení a nevyznačení požadované části. Prvně uvedená chyba je pravděpodobně způsobena jen nedostatečným tréninkem, jelikož podstata dělení kruhu na třetiny žákovi problém nedělá. Na druhou stranu, jen asi 11 % žáků mělo v úlohách a i c rozdělený kruh na třetiny správně a přesně. Nevyznačení požadované části pak může být způsobeno špatným přečtením/porozuměním zadání.

Ve druhé části testu pak žáci poloviny kruhu častěji spojovali do celých kruhů, oproti tomu v diskrétních modelech od sebe častěji jednotlivé části oddělovali. Rozdíl může být způsoben počtem útvarů, které měli žáci kreslit. U spojitých modelů se totiž jednalo o 2,5 a 1,25 kruhu, u diskrétních modelů o 25 a 12,5 kuliček. Zápisy výsledků u diskrétních modelů možná i proto žáci často zkracovali zápisem čísla, či kreslili uspořádaný celek.

V několika případech došlo ve druhé části testu k záměně zadání. Někteří žáci pokračovali v řešení zadání z první části testu (především v úloze e), což mohlo být způsobeno především jejich nepozorností. Několikrát se také objevila odpověď, že celek je jeden kruh. Část těchto žáků uvedla shodnou odpověď u úloh $e+g$, čímž poukazují na to, že úlohy buď řešili nepozorně (což se vzhledem k jejich zbylým odpovědím nezdá pravděpodobné), nebo že s kruhovým modelem neuvažují nad celkem větším než jedna. Druhá skupina těchto žáků úlohu g vynechala. Tito pravděpodobně řešení úlohy e jen odhadovali.

Žákovská řešení úlohy i nám ukázala především pestrost správných řešení. Žáci obdélník nejčastěji dělili svisle, avšak objevila se i řešení vodorovně či křížem. Někteří z nich překreslili obdélník vedle, jiní přidali požadovanou část ke stávajícímu obdélníku, či dokonce část přidali a část od původního obdélníku odebrali.

6. Omezení, důsledky a závěr

Předložený výzkum má přirozeně svá omezení; v první řadě je to velikost a složení vzorku. Školy byly vybrány na základě dostupného výběru, proto si v žádném případě neklademe za cíl výsledky generalizovat na žáky všech (pražských) základních škol. Rádi bychom však poskytli vhled do této ne zcela prozkoumané problematiky. Střední velikost vzorku nám na jednu stranu poskytuje větší pestrost žákovských řešení, na druhou stranu nám však neumožňuje pracovat s jednotlivými žáky individuálně při řešení úloh. Naše analýza je tedy založená na ohodnocení výsledku úlohy, ne na reálném postupu jejího řešení (který můžeme jen odhadovat). Vhodným doplněním analýzy by mohly být rozhovory s žáky o jejich řešeních[7] či propojení s analýzou používané učebnice a učebního stylu učitele.

Za přínos považujeme poukázání na rozdílnou práci žáků s diskrétními a spojitými modely, ať už jde o (ne)řešení úlohy či správnost řešení. Pro učitele mohou být zajímavé i naznačené strategie řešení jednotlivých úloh žáky a nejčastější chyby, které se mezi žáky vyskytly. Jako závažné zjištění vnímáme především to, jak velké množství žáků řešilo úlohy nesprávně, přičemž některým stále unikají základní principy práce se zlomky. Pro autory učebnic přinášíme další pohled na to, s čím by se žáci mohli setkávat častěji. Doufáme, že naše analýza bude inspirací pro další výzkumy, které jsou v této oblasti jistě třeba.

[7] Ty byly provedeny s šesti žáky, kteří se účastnili další části studie popsané v (Novotná, 2020). Vzhledem k jejich malému počtu a k jinému zaměření studie zde však výsledky neuvádíme.

Literatura

[1] Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (s. 91–125). Academic Press.

[2] Boyce, S., & Moss, D. (2017). Role of Representation in Prospective Teachers' Fractions Schemes. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Oct 5–8, 2017).

[3] Hejný, M., Novotná, J., & N. Stehlíková (Eds.) (2004), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[4] Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Portál.

[5] Hejný, M. (2004a). Mechanizmus poznávacího procesu. In M. Hejný, J. Novotná, & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 23–42). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[6] Hejný, M. (2004b). Zlomky. In Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 343–355). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[7] Hiebert. J., & Tonnessen, L. H. (1975). Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(5), 374–378.

[8] Charalambous, Y. C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293–316. DOI: 10.1007/s10649-006-9036-2.

[9] Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh

(Ed.), *Number and measurement. Papers from a research workshop* (s. 101–150). ERIC.

[10] Novotná, G. (2015). *Reedukace formálních poznatků v matematice v prostředí individuálního doučování.* [Diplomová práce, Univerzita Karlova]. Dostupné z: `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/149433/`

[11] Novotná, G. (2020). *Vnímání kvality vlastního poznání v matematice a jeho souvislost s individuálním doučováním* [Disertační práce, Univerzita Karlova]. Dostupné z: `https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/121355`

[12] Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, & E., Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[13] Rendl, M., & Páchová, A. (2013). Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. In Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, & E., Žalská, J. (2013), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 127–184). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[14] Samková, L., & Tichá, M. (2017). On the way to observe how future primary school teachers reason about fractions. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, 10*(4), 93–100. `https://doi.org/10.7160/eriesj.2017.100401`

[15] Tichá, M., & Macháčková, J. (2006). Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu.* JČMF. Dostupné z: `https://www.suma.jcmf.cz/news/texty-z-projektu-esf-podil-ucitele-matematiky-zs-na-tvorbe-svp/`

[16] Vejmelková, E. (2014). Zlomky – některé obtíže žáků a didaktické přístupy učitelů. [Diplomová práce, Univerzita

Karlova. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/71444

[17] Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Univerzita Karlova v Praze.

[18] Vondrová, N., & Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, & E., Žalská, J., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 63–126). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Abstract

Fractions are one of the most challenging topics in primary school mathematics. The relationship between whole and part is considered to be a key one for their deep understanding. We conducted a study with 326 lower secondary school pupils in Prague to investigate how they work with the circle and discrete models in problems focusing on the part-whole relationship. We found that pupils are more likely to skip problems with the discrete model, but if they choose to solve them, they solve them more correctly than problems with the circle model. Pupils are also likely to often use different strategies when solving the same problem with a different model and to view problems in isolation. Among the most common pupil errors were, for example, incorrect or inaccurate division of the circle into thirds, not marking the required part, or confusion of the task (to determine the part from the whole vs. from the part to the whole). Different pupil strategies for solving these problems are also discussed, which may be of interest not only to mathematics teachers.

Gabriela Novotná
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: gabriela.novotna@jeida.cz