PARADOXNÍ PŘÍKLADY Z PRAVDĚPODOBNOSTI

PAVEL TLUSTÝ

Stejně jako ostatní vědní disciplíny, také matematika popisuje a zkoumá různé situace reálného světa. Je proto zcela přirozené, že historie matematiky zná řadu zajímavých paradoxních případů, které se pak nezřídka staly hybnou silou dalšího rozvoje poznání. Speciálně teorie pravděpodobnosti je na paradoxy velmi bohatá. Ukažme si několik příkladů, jejichž výsledek je nečekaný a překvapující.

Příklad 1: Uvažujme následující hru pro dva hráče. Hráč A má šťastné číslo 3, zatímco šťastným číslem hráče B je číslo 7. Každý z hráčů vylosuje z intervalu $(0,1)$ náhodně jedno číslo (hráč A číslo a, hráč B číslo b). Všechna čísla a,b z intervalu $(0,1)$ jsou stejně pravděpodobná (rovnoměrné rozdělení). Pokud je 3 první nenulová cifra zlomku $\frac{a}{b}$, vyhrává hráč A, pokud je první nenulovou cifrou 7, znamená to, že zvítězil hráč B. Je uvedená hra spravedlivá? Jaká cifra dává největší šanci vyhrát?

Mohlo by se zdát, že vzhledem k tomu, že uvažujeme rovnoměrné rozdělení, budou všechny cifry $1,2,3,\dots,9$ stejně dobré.

Řešení: Pokud číslo tažené hráčem A (resp. hráčem B) naneseme na osu x (resp. osu y), můžeme si celou situaci představit tak, jako bychom náhodně z jednotkového čtverce vybírali bod o souřadnicích $[a,b]$. Tak převedeme řešení úlohy na geometrický problém.

Vyšetříme postupně pravděpodobnost toho, že první nenulová cifra podílu $\frac{a}{b}$ je $1,2,3,\dots,9$.

Začneme cifrou 1.
Je-li první nenulová cifra podílu $\frac{a}{b}$ rovna 1, pak číslo $\frac{a}{b}$ leží v některém z následujících intervalů:

$$\dots \langle 0.001,\, 0.002), \langle 0.01,\, 0.02), \langle 0.1,\, 0.2) \tag{1}$$
$$\langle 1,\, 2), \langle 10,\, 20), \langle 100,\, 200), \dots \tag{2}$$

Uvažme nejprve intervaly typu (1), tj.

$$0.1 \le \frac{a}{b} < 0.2 \;\Rightarrow\; b \le 10a,\; 5a < b$$

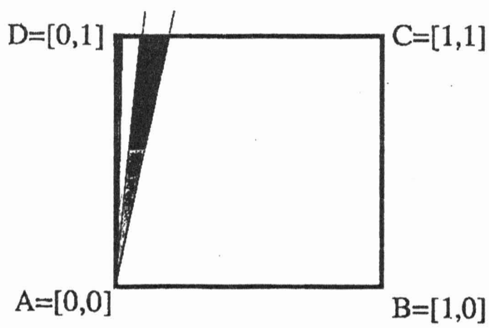
analogicky

$$0.01 \le \frac{a}{b} < 0.02 \;\Rightarrow\; b \le 100a,\; 50a < b,$$

atd.

Hledaná a, b splňující výše uvedené podmínky představují souřadnice bodů v jednotkovém čtverci, které leží uvnitř trojúhelníků s vrcholem v bodě A=[0,0], výška $v_a = 1$ a strana a je na úsečce spojující body D=[0,1] a C=[1,1] (viz obr. 1). Součet ploch trojúhelníků typu (1) je

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) = \frac{1}{18}.$$



Obr. 1

Nyní se zabývejme intervaly typu (2), tj.

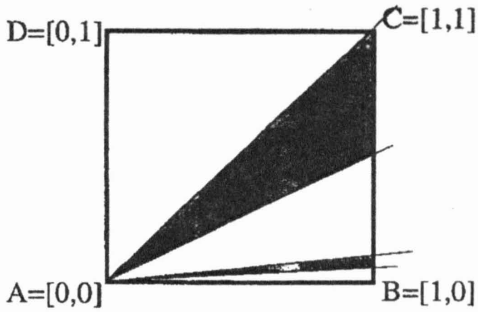
$$1 \le \frac{a}{b} < 2 \;\Rightarrow\; b \le a,\; 0.5a < b$$

analogicky

$$10 \leq \frac{a}{b} < 20 \Rightarrow 10b \leq a,\ 0.05a < b,$$

atd.

Hledaná a, b splňující výše uvedené podmínky představují souřadnice bodů v jednotkovém čtverci, které leží uvnitř trojúhelníků s vrcholem v bodě A=[0,0], výška $v_a = 1$ a strana a je na úsečce spojující body B=[1,0] a C=[1,1] (viz obr. 2).



Obr. 2

Součet ploch trojúhelníků typu (2) je

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{200} + \dots\right) = \frac{5}{18}.$$

Dohromady tak dostáváme, že

$$p_1 = \frac{1}{18} + \frac{5}{18} = \frac{1}{3} = 0.333.$$

Analogickým způsobem lze odvodit, že

$$p_2 = 0.148,\ p_3 = 0.102,\ p_4 = 0.084,\ p_5 = 0.074,$$

$$p_6 = 0.069,\ p_7 = 0.065,\ p_8 = 0.063,\ p_9 = 0.062.$$

Vidíme, že v tomto případě dostaneme poněkud překvapující výsledek. Rozdělení cifer $1, 2, \dots, 9$ **není rovnoměrné** (jak bychom mohli očekávat). Nejpravděpodobnější cifrou bude 1, naopak nejméně pravděpodobná je 9.

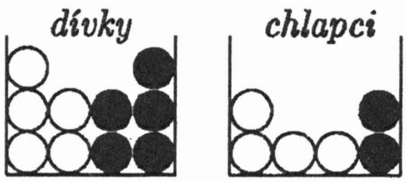
Příklad 2: V tomto příkladu budeme sledovat úspěšnost dvou maturitních tříd (4.A a 4.B) při přijímacích pohovorech na VŠ. Zajímá nás, zda jsou v přijímacím řízení úspěšnější dívky nebo chlapci. Zkoumejme nejprve zvlášť humanitní a přírodovědné obory a pak porovnáme úspěšnost chlapců a dívek bez ohledu na typ VŠ. Obě třídy mají 33 žáků (17 dívek a 16 chlapců).

Řešení: Začneme nejprve třídou 4.A.
Situaci si můžeme schematicky znázornit na obrázku (viz obr. 3). Plné, resp. prázdné kolečko vyjadřuje úspěch, resp. neúspěch při přijímacích pohovorech. Z obr. 3a) vidíme, že na humanitní obory se hlásilo 10 dívek a 5 jich bylo přijato, zatímco z 6 chlapců byli pouze dva úspěšní. Chceme-li porovnat úspěšnost dívek a chlapců, lze si každou skupinku studentů představit jako krabici, ve které je odpovídající počet černých a bílých koulí. Náhodně vytáhneme kouli z krabice a hledáme pravděpodobnost, že je černá (úspěch u pohovorů). Odtud plyne, že při pohovorech na humanitní obory byly dívky 4.A úspěšnější než chlapci, neboť

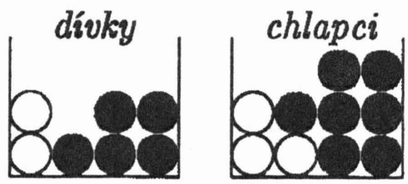
$$\frac{5}{10} > \frac{2}{6}.$$

Také v pohovorech na přírodovědné obory (viz obr. 3 b)) byly dívky lepší, protože

$$\frac{5}{7} > \frac{7}{10}.$$



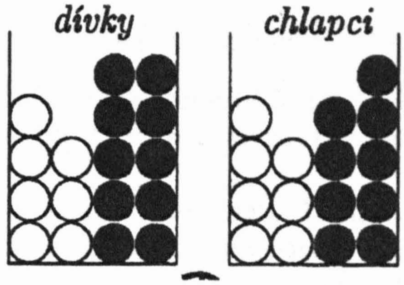
Obr. 3a *humanitní obory*



Obr. 3b *přírodovědné obory*

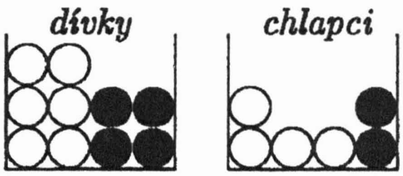
Pokud se podíváme na 4.A bez ohledu na typ VŠ, asi nás nepřekvapí, že celkově (viz obr. 4) dívky uspěly i pohovorů lépe než chlapci (vždyť byly lepší v humanitních i přírodovědných oborech), neboť

$$\frac{10}{17} > \frac{9}{16}.$$

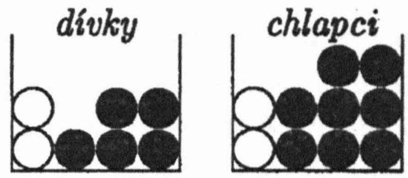


Obr. 4 *4.A – Celkem*

Zabývejme se nyní třídou 4.B.
Úspěšnost studentů při přijímacích pohovorech je znázorněna na obr. 5 a), b)



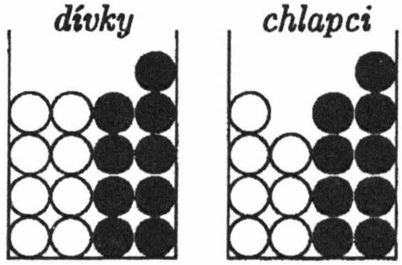
Obr. 5a *humanitní obory*



Obr. 5b *přírodovědné obory*

Vidíme, že i v této třídě si dívky vedly lépe u pohovorů jak na humanitní ($\frac{4}{10} > \frac{2}{6}$), tak i na přírodovědné obory ($\frac{5}{7} > \frac{8}{10}$).

Podívejme se na celkovou úspěšnost 4.B bez ohledu na typ VŠ.



Obr. 6 *4.B – Celkem*

Z obrázku 6 je patrné, že i když byly dívky úspěšnější než chlapci v humanitních i přírodovědných oborech, tak celkově byli úspěšnější chlapci, neboť

$$\frac{9}{17} < \frac{9}{16}.$$

Dostáváme tak poněkud paradoxní a neočekávaný závěr.

LITERATURA

[Maj] M. Major, B. Nawolska, *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, 1999.

[Ploc] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa a statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, 1997.

[Ren] A. Rényi, *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1972.

[Sze] G. J. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

Doc. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
Katedra matematiky Ped. fak. JČU
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice
email: tlusty@pf.jcu.cz