Radka Smýkalová

Eulerova reforma goniometrie

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 1, 14–27

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150498

EULEROVA REFORMA GONIOMETRIE

RADKA SMÝKALOVÁ

Leonhard Euler se narodil 15. dubna roku 1707 v Basileji (Švýcarsko). Položil základy nových matematických teorií a podstatně přispěl k rozvoji teorií dřívějších. My se v následujícím budeme zabývat pouze jednou vědeckou disciplínou – goniometrií.

Obr. 1. Leonhard Euler

Hlavní rysy Eulerovy reformy

Z obecného pohledu na goniometrii je nejvýraznější Eulerovou zásluhou, že různé (do té doby pouze numericky vyčíslované a tabelizované) trigonometrické hodnoty *přetvořil ve funkce.* Toto tvrzení vzhledem ke složitému historickému vývoji pojmu funkce nyní vysvětlíme a upřesníme.

V dnešní době je termín funkce matematickým názvem pro *zobrazení* z nějaké množiny M do množiny čísel (většinou reálných nebo komplexních), nebo do množiny vektorů (pak se mluví o vektorové funkci). Je to tedy jakýkoliv předpis, který každému prvku z M jednoznačně přiřazuje nějaké číslo nebo vektor (hodnotu funkce). Někdy se však slovo funkce používá pro libovolné zobrazení.

Pro Eulera, od něhož pochází označení $y = f(x)$ z roku 1748, však pojetí funkce znamenalo existenci analytického výrazu obsahujícího x, z něhož se dá y vypočítat. Na funkci tedy musela být dána určitá formule, do které mohlo být za proměnnou x dosazeno číslo – reálné či komplexní. Euler pak rozděloval funkce na dvě skupiny, a to na funkce *algebraické* a *transcendentní*. Nejjednodušší tvary algebraických funkcí s proměnnou x podle Eulera jsou:

$$y = a + x,\ y = a - x,\ y = ax,\ y = \frac{a}{x},\ y = x^a,\ y = \sqrt[a]{x},$$

všechny ostatní algebraické funkce dostane jejich skládáním. Transcendentní funkce jsou podle Eulera takové, které nelze úkony algebraickými konečným tvarem vyjádřit. Patří sem funkce exponenciální, goniometrické, logaritmické a cyklometrické. Tak pro dříve výlučně geometricky chápané hodnoty sinu a kosinu Euler objevil analytické formule ve tvaru (nekonečných) řad

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Tyto formule odstranily pochybnosti, jak definovat hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro čísla x, která nevyjadřují velikost ostrých úhlů.

Do doby Eulerovy bylo v trigonometrii mnoho nedořešených problémů. Jak jsme právě naznačili, nebyla ještě vyjasněna otázka znamének goniometrických funkcí úhlů v různých kvadrantech. To bylo příčinou toho, že často vznikal zmatek v převodních vzorcích. Neexistovala jednotná symbolika, každý vzorec se odvozoval geometricky pomocí zvláštního náčrtku atd.

Hodnoty goniometrických funkcí Euler důsledně spojoval s pravoúhlým trojúhelníkem o jednotkové přeponě. Právě Eulerovou zásluhou je myšlenka považovat goniometrické hodnoty za čísla. Euler tedy chápal hodnoty sinu a kosinu nikoli jako délky úseček, jak tomu bylo ve starověku a ve středověku, nýbrž jako čísla, která vyjadřovala poměr příslušných goniometrických délek k poloměru kružnice. Přitom poloměr kružnice jakožto *plný sinus* kladl Euler rovný číslu 1.

Euler nemá ani v níže rozebíraném díle *Introductio*, ani nikde jinde definované trigonometrické funkce explicitně jako podíly délek stran pravoúhlého trojúhelníka, to znamená jako čísla. Avšak podle autora [8] pro ty, kteří jeho spisy přesně znají, neexistuje žádná pochybnost, že Euler goniometrické funkce jako takové chápal, neboť na různých místech jeho prací se vyskytují přímo napsané poměry. Je důležité ještě jednou poukázat na fakt, že pro Eulera to nebyly pouhé podíly délek stran v trojúhelníku, ale byly to skutečné (analytické) funkce úhlů.

Tím, že se Euler díval na hodnoty goniometrických funkcí jako na čísla bez geometrického rozměru, mu umožnilo je začít používat ve vzorcích, aniž by narušil jejich homogenitu. Krásným příkladem je kosinová věta; v rovnosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

je poslední člen – stejně jako tři předchozí – skalární veličina rozměru rovinného obsahu. Sám Euler o tom píše: „Domnívám se, že jsem první zavedl do algebry siny a tangenty úhlu tak, aby se s nimi mohlo zacházet jako s ostatními čísly a nerušeně provádět operace všeho druhu."

Označování stran trojúhelníka malými písmeny latinské abecedy a, b, c, protějších úhlů pak velkými písmeny téže abecedy A, B, C umožnilo Eulerovi značně zjednodušit trigonometrické vzorce, které tak nabyly známé symetrie. Témuž účelu sloužilo Eulerem zavedené zkrácené označení goniometrických funkcí úhlu z znaky $\sin.z$, $\cos.z$, $\mathrm{tang}.z$, $\cot.z$, $\sec.z$, $\mathrm{cosec}.z$ nebo $\sin.A.z$, $\cos.A.z$ atd. Písmeno A u posledních zápisů je počátečním písmenem latinského slova „arcus" - oblouk. Tu a tam se také v jeho spisech vyskytuje $\sin.v.z$ namísto sinvers („sinus versus" – latinsky – vzepětí oblouku, hodnota daná vzorcem $v = \mathrm{versin}\,\alpha = 1 - \cos\alpha$).

Euler stanovil neobyčejně jednoduchý a nečekaný vztah mezi goniometrickými a exponenciálními funkcemi (v komplexní rovině), který lze vyjádřit vzorcem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$.

Přestože Euler nenapsal žádné dílo věnované ucelenému výkladu goniometrických funkcí, jeho práce byly již v 18. století vědeckým podkladem pro sestavení některých učebnic trigonometrie a goniometrie, na svou dobu velice pokrokových. Jednou z prvních byla např. učebnice akademika M. J. Golovina *Rovinná a prostorová trigonometrie s algebraickými důkazy*, vydaná v Rusku roku 1789. Tato učebnice obsahovala všechny nejdůležitější goniometrické vzorce a funkce téměř v tom tvaru, v jakém jich používáme v nynější době.

V další kapitole podrobněji popíšeme místa, kde goniometrické funkce vystupují v jedné z Eulerových stěžejních knih, která se stala základní učebnicí infinitezimálního počtu a podnítila další rozvoj matematické analýzy ve druhé polovině 18. století.

Introductio in Analysin infinitorum (1748)

Ve svém díle *Úvod do analýzy* z roku 1748 Euler vytvořil z trigonometrie skutečnou vědu o goniometrických funkcích, podal její analytický výklad a odvodil řadu goniometrických vztahů z několika základních vzorců. Pro ně byl v knize poprvé užit nový způsob zápisu, který zcela odpovídá dnešnímu.

V § 127 knihy *Introductio* Euler zmiňuje hodnoty sinus a kosinus pro úhly $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, uvádí rovnosti

$$\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \ \sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \ \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

a definuje

$$\text{tang } z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\text{tang } z}.$$

Pak v dalších paragrafech zmiňuje součtové vzorce obou základních funkcí a odvozuje vzorce pro zvětšení nezávislé proměnné o celé periody a poloviny period. K nim ještě v § 129 připojuje vzorce pro

$$\sin(2y + z), \ \sin(3y + z), \ \sin(4y + z)$$

a

$$\cos(2y + z), \cos(3y + z), \cos(4y + z).$$

To, že by k tomu měl nejprve dokázat platnost součtových vzorců, nechal Euler ovšem bez povšimnutí. V § 130 následují vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu, ke kterým se připojují v § 131 rovnosti, pomocí kterých jsou součty a rozdíly $\sin a$ a $\sin b$, $\cos a$ a $\cos b$ převedeny na součiny. Paragraf 132 pak přináší rovnost pro násobení komplexních jednotek

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

která je ještě rozšířena na podobnou rovnost pro tři nezávislé proměnné. Protože je zákon tvoření takových součinů ihned rozpoznatelný, Euler pokračuje v následujících paragrafech uvedením vzorce

$$\cos \cdot nz = \frac{(\cos \cdot z + \sqrt{-1}\sin \cdot z)^n + (\cos \cdot z - \sqrt{-1}\sin \cdot z)^n}{2}$$

a obdobným vzorcem pro $\sin \cdot nz$. Odtud získává pomocí binomické věty známé výrazy pro $\cos \cdot nz$ a $\sin \cdot nz$ ve tvaru mnohočlenů proměnných $\cos \cdot z$ a $\sin \cdot z$. Dále v § 134 pokračuje: pokud je z oblouk tak malý, že $\sin \cdot z = z$ a $\cos \cdot z = 1$, a za n uvažujeme nekonečně velké číslo, takže nz bude konečný oblouk v, pak bude $\sin \cdot z = z = \frac{v}{n}$ a odtud dostaneme známé mocninné řady pro $\sin \cdot v$ a $\cos \cdot v$. Je to historicky první odvození sinové a kosinové řady bez integrálního počtu. Pokud sem dosadíme za $v = \frac{m}{n}90°$, pak dostaneme mocninné řady pro $\sin \cdot A\frac{m}{n}90°$ a $\cos \cdot A\frac{m}{n}90°$, které Euler vypisuje až k 29., resp. 30. mocnině zlomku $\frac{m}{n}$ a jejich koeficienty uvádí s přesností na 28 desetinných míst. Tyto řady ostatně oznámil už v roce 1739 v pojednání *Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes, tam naturales, quam artificiales.* V § 135 díla *Introductio* se nachází řady pro $\text{tang} \cdot A\frac{m}{n}90°$ a $\cot \cdot A\frac{m}{n}90°$, ve kterých se 13-ti místnými koeficienty dochází Euler až k mocnině $\left(\frac{m}{n}\right)^{25}$, ovšem bez udání odvození. Zmiňuje, že tyto řady můžeme nacházet pomocí dělení sinových a kosinových řad, později ale dodává jejich jiné podrobné odvození. Spočívá v tom, že se snadno určí nulové body funkcí $\cos\frac{x\pi}{2n} + \operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}\cdot\sin\frac{x\pi}{2n}$ a tyto se pak s jejich pomocí rozvinou v nekonečné součiny. Tím, že pak na druhé straně vypíšeme mocninné řady pro $\cos\frac{x\pi}{2n}$ a $\sin\frac{x\pi}{2n}$ a nekonečné součiny roznásobíme, dostaneme pomocí porovnání koeficientů u stejně vysokých mocnin x součty různých řad, z nichž ta první je tvaru:

$$\frac{\pi}{4mn}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n} = \frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{25n^2-m^2} + \cdots.$$

Podobně získáme součet řady

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n} =$$
$$= \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \frac{1}{36n^2-m^2} + \cdots\right).$$

Nyní Euler jednotlivé členy těchto řad rozvíjí v nekonečné geometrické řady a po přeskupení sčítanců dostane řadu z mocnin zlomku $\frac{m}{n}$ opatřených koeficienty tvaru

$$1 + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{5^{2p}} + \frac{1}{7^{2p}} + \cdots \text{ resp. } \frac{1}{4^{2p}} + \frac{1}{6^{2p}} + \frac{1}{8^{2p}} + \cdots.$$

Sčítání takových řad, které se Jakobovi Bernoullimu zdálo býti nepřekonatelnou překážkou, si Euler dovolil již v letech 1734–35.

V § 136 a § 137 *Introductia* jsou zmíněny prostředky k úplnému sestavení tabulek hodnot goniometrických funkcí na základě dříve odvozených řad. K tomu Euler podotýká, že s pomocí již od Vièta známých vzorců

$$\sin(30°+z) = \cos z - \sin(30°-z) \text{ a } \cos(30°+z) = \cos(30°-z) - \sin z$$

mohou být pouhým sčítáním a odečítáním nalezeny hodnoty sinu a kosinu úhlů převyšujících 30° z hodnot pro úhly menší než 30°. Pak Euler ze vzorce pro $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ vyvozuje vzorce

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} \text{ a } \operatorname{ctg} 2a = \frac{\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} a}{2}$$

a z druhého pro $a = 30° - b$ dostává třetí vzorec

$$\operatorname{tg}(30° + 2b) = \frac{\operatorname{ctg}(30° - b) - \operatorname{tg}(30° - b)}{2}.$$

Z těchto tří vzorců již můžeme počítat kotangenty a tangenty úhlů převyšujících 30° (z hodnot pro úhly menší než 30°).

Další §138 přináší analytickou definici funkcí sinus a kosinus pomocí exponenciálních funkcí. Euler roku 1740 podotknul, že výrazy

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin(\pi\sqrt{-q})} \quad \text{a} \quad \frac{\pi\sqrt{-q}}{\operatorname{tg}(\pi\sqrt{-q})}$$

mají reálné hodnoty

$$\frac{2\mathrm{e}^{\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{q}} - 1} \quad \text{a} \quad \frac{(\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{q}} + 1)\pi\sqrt{q}}{\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{q}} - 1}.$$

Pravděpodobně se tím zabýval blíže, protože 9. prosince 1740 Goldbachovi napsal, že našel pozoruhodný paradoxon, že se výraz

$$\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

blíží $\frac{10}{13}$, přesněji že se jeho skutečná hodnota rovná

$$\cos 39°42'51''52'''9''''.$$

Z toho však v souladu s výše zmíněnými rovnostmi, ze kterých Euler vyjádřil $\sin\pi\sqrt{-q}$ a $\operatorname{tg}\pi\sqrt{-q}$, plyne, že již tehdy měl k dispozici vzorce

$$\cos v = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}v}}{2} \quad \text{a} \quad \sin v = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}v}}{2\mathrm{i}}.$$

Na odvození téhož z rovností

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{\mathrm{i}v}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{\mathrm{i}v}{n}\right)^n}{2} \quad \text{a} \quad \sin v = \frac{\left(1 + \frac{\mathrm{i}v}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{\mathrm{i}v}{n}\right)^n}{2\mathrm{i}}$$

pro $n = \infty$, které udává v § 138 *Introductia*, však přišel teprve po obdržení zprávy, kterou mu napsal Mikuláš I. Bernoulli v dopise ze 13. července 1742. Uvedl v něm, že již v roce 1728 seznámil svého strýce (Johanna Bernoulliho) se vzorcem

$$\sin nA = \frac{\left(\sqrt{1-z^2}+\mathrm{i}z\right)^n - \left(\sqrt{1-z^2}-\mathrm{i}z\right)^n}{2\mathrm{i}}, \text{ kde } z = \sin A,$$

který pro $A = \frac{v}{n}$ při nekonečně velkém n přechází do výše uvedeného vzorce pro $\sin v$. Na to Euler v jednom pojednání z r. 1743 bez dalšího důkazu uvedl vzorce

$$\mathrm{e}^z = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n_{(n=\infty)} \quad \text{a} \quad \sin s = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{2\mathrm{i}},$$

ale teprve v *Introductio* oba vzorce sestavil, udal jejich odvození a jako důsledek ještě získal zápisy komplexních jednotek ve tvaru

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \cos v + \mathrm{i}\sin v, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}v} = \cos v - \mathrm{i}\sin v.$$

O rok později (1749) opublikoval také vyjádření hodnot $\sin(x+iy)$ a $\cos(x+iy)$ z hodnot $\cos x$, $\sin x$, e^y, e^{-y}.

V obou následujících paragrafech 139 a 140 Euler doplňuje tuto skupinu vzorců tak, že ještě odvozuje vztah mezi logaritmem a tangentou

$$z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{\cos z + \mathrm{i}\sin z}{\cos z - \mathrm{i}\sin z} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,z}{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,z}.$$

Z toho pak získává pomocí řady

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

řadu pro arkustangens

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

a odtud pak volbou $x = 1$ Leibnizovu řadu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Doplnění k rozvojům $\sin n\varphi$ a $\cos n\varphi$ do mnohočlenů v proměnných $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ (uváděných v 8. kapitole *Introductia*) Euler uvedl o šest let později v pojednání *Subsidium calculi sinuum*, ve kterém na rozdíl od dokázané Moivreovy věty pro přirozená n vyjádřil $\cos^n\varphi$ a $\sin^n\varphi$ pomocí kosinu a sinu násobků úhlu φ. Získal tak vztahy:

$$2^{n-1}\cos^n\psi = \sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}} \binom{n}{p} \cos(n-2p)\psi,$$

$$2^{4n-1}\sin^{4n}\psi = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^p \binom{4n}{p} \cos(4n-2p)\psi,$$

$$2^{4n-2}\sin^{4n-1}\psi = \sum_{p=0}^{p=2n-1} \binom{4n-1}{p} \sin(4n-2p-1)\psi,$$

$$2^{4n-3}\sin^{4n-2}\psi = \sum_{p=0}^{p=2n-1} (-1)^{2p+1} \binom{4n-2}{p} \cos(4n-2p-2)\psi,$$

$$2^{4n-4}\sin^{4n-3}\psi = \sum_{p=0}^{p=2n-2} (-1)^p \binom{4n-3}{p} \sin(4n-2p-3)\psi.$$

Do těchto rovností, které jsou správné pro přirozená n, Euler bez rozpaků dosazuje celá záporná n, aniž by se staral o konvergenci nebo divergenci takto vznikajících nekonečných řad, ačkoliv ho Mikuláš I. Bernoulli na nezbytnost zkoumání konvergence v roce 1743 upozornil. Tak Euler dospěl k různým nesprávným výsledkům, které tu dále nebudeme vypisovat. Místo toho ještě uvedeme, že Euler řovněž sestavil rozvoje do podobných řad pro funkce $\sin^m\varphi\cos^n\varphi$ a nakonec dokázal větu, že pokud lze najít součet řady

$$Z = Az^m + Bz^{m+n} + Cz^{m+2n} + \cdots,$$

mohou být určeny také součty

$$S = A\cos m\varphi + B\cos(m+n)\varphi + C\cos(m+2n)\varphi + \cdots,$$

$$T = A\sin m\varphi + B\sin(m+n)\varphi + C\sin(m+2n)\varphi + \cdots.$$

K tomu Euler dodává, že pomocí této věty může být sčítáno mnoho řad sestavených ze sinů nebo kosinů násobků téhož úhlu. V příkladech, které uvádí, jsou poprvé vyjádřeny racionální funkce nezávislé proměnné (tedy úhlu) pomocí takových řad. Mnoho let poté (1773 a 1776) se Euler opět k této větě vrátil.

Pár slov nyní věnujeme sčítání konečných řad

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} \sin(s+\mu u) \text{ a } \sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} \cos(s+\mu u),$$

které Euler zmínil již v roce 1743 v VII. svazku *Miscelanea Berolinensia*, protože je potřeboval k výpočtu jistého integrálu. Také k nim se vrátil ve 14. kapitole *Introductia* (§ 258–261), ve které je chápe jako speciální případ nekonečných řad

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} z^\mu \sin(s+\mu u) \text{ a } \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} z^\mu \cos(s+\mu u)$$

pro $z=1$ a jejich součty dostává jako rozdíly dvou uvedených, ve skutečnosti divergentních nekonečných řad.

Tyto výzkumy o funkcích úhlů, které vytvářejí aritmetické posloupnosti, Eulera později přivádějí ke studiu vztahů mezi funkcemi takových úhlů, které jsou členy geometrických posloupností. Euler přitom vychází z rovnosti

$$s = \frac{\sin s}{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s}{4}\cos\frac{s}{8}\cdots},$$

kterou zveřejnil v roce 1737, a dostává některé řady, které mu pak posloužily k výpočtu π.

Velkou roli v Eulerových analytických výzkumech sehrála vyjádření trigonometrických funkcí nekonečnými součiny, protože díky nim mohl Euler úplně vyřešit Johanem Bernoullim nastolený problém sčítání řad tvaru

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\cdots,$$

kde parametr m je přirozené číslo. Již v pojednání *De summit serierum reciprocarum* z let 1734–35 Euler odvodil rozklad sinu na nekonečný součin, když uvážil rovnici

$$0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{3!y} - \frac{s^5}{5!y} + \cdots,$$

kde je $y = \sin s$, jako rovnici (s parametrem y a neznámou s) o nekonečně vysokém stupni a podle analogie s mnohočleny rozložil její pravou stranu pomocí od Moivra známé periodicity sinu do nekonečného součinu kořenových činitelů

$$\left(1-\frac{s}{A}\right)\cdot\left(1-\frac{s}{p-A}\right)\cdot\left(1-\frac{s}{-p-A}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{s}{2p+A}\right)\cdot\left(1-\frac{s}{-2p+A}\right)\cdots,$$

přičemž A znamenalo nejmenší kladné $\arcsin y$ a p bylo psáno místo π. Z Viètových vztahů mezi kořeny rovnice a jejími koeficienty pak vycházejí hodnoty elementárních symetrických funkcí těchto kořenů a pomocí Newtonova vzorce rovněž hodnoty součtů jejich mocnin daného stupně.

Pro případ, že $y = \sin A = 1$, tedy $A = \frac{\pi}{2}$ (Euler píše q), můžeme žádané součty řad vyjádřit pomocí mocnin π. Tak dostaneme např. součet Leibnizovy řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4},$$

součty

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},\ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

atd. Tímto postupem se dá získat součet řady $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2m}}$ pro jakékoliv přirozené m. Nás ovšem více zajímá přímé vyjádření sinu jako nekonečného součinu, ke kterému Euler uvedené rozvoje připojil. Sinová řada

$$y = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + \cdots$$

totiž pro $y = 0$ dává

$$0 = s\left(1 - \frac{s^2}{3!} + \frac{s^4}{5!} - \frac{s^6}{7!} + \cdots\right)$$

a protože úhly, jejichž sinus je roven nule, se rovnají $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, \ldots$, platí podle stejného principu rozklad

$$\sin s = s\left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

Mikuláš I. Bernoulli dvakrát Eulera dopisem upozornil na to, že tato odvození nejsou v žádném případě korektní, že není dokázána ani konvergence sinové řady a že Viètovy vztahy o rovnicích konečného stupně se nedají rozšířit bezprostředně na rovnice o nekonečně vysokém stupni. Euler svůj způsob odvození přesto také později zopakoval; tak je tomu ve dvou pojednáních z let 1740 a 1743, kde sestavil nekonečné součiny pro $\sin \frac{m}{n}\pi$, $\cos \frac{m}{n}\pi$, stejně tak jako v *Introductio*, kde jsou mocninné řady rovněž pojaty jako mnohočleny nekonečně vysokého stupně. Přesto v posledním díle Euler modifikoval sestavení nekonečných součinů způsobem, že nejprve hyperbolické funkce

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

rozložil na součiny a pak po dosazení $\mathrm{i}x$ za x přešel k trigonometrickým funkcím.

Když pak Euler dosadil speciálně $x = \frac{m\pi}{2n}$, vyplynula mu vyjádření koeficientů rozvojů funkcí $\sin \frac{m\pi}{2n}$ a $\cos \frac{m\pi}{2n}$, ke kterým se přidružily ještě dva další, když se píše $n - m$ místo m (§ 184). Z nich vyplynuly odpovídající rozvoje dalších čtyř funkcí (§ 186), stejně tak jako praktické řady k výpočtu logaritmů sinu a kosinu úhlů $\frac{m}{n}90°$, ve kterých Euler pokračoval až ke 30., popř. 38. mocnině $\frac{m}{n}$. Koeficienty těchto řad počítal na 20 desetinných míst.

V *Introductio* se Euler také pečlivě zabýval problémem násobení a dělení trigonometrických funkcí (kapitola 14). Předtím však pro hodnotu $\sin nz$ odvodil jistou rovnici n-tého stupně (n liché) ze součtového teorému a mnohočlen rovnice rozložil do n faktorů (§ 237). Taková rovnice již dříve byla stanovena Newtonem ve tvaru

$$\sin nz = n \sin z + \frac{(1-n^2)n}{3!} \sin^3 z + \frac{(1-n^2)(9-n^2)n}{5!} \sin^5 z + \cdots$$

a Jakobem Bernoullim ve tvaru

$$\sin nz =$$
$$= n \sin z \cos^{n-1} z - \binom{n}{3} \sin^3 z \cos^{n-3} z + \binom{n}{5} \sin^5 z \cos^{n-5} z + \cdots .$$

Podobným způsobem sestavil také rovnici pro sudé n, umocnil ji na druhou, aby ji změnil na racionální, a našel $2n$ kořenů

$$\pm \sin z,\ \pm \sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right),\ \pm \sin\left(\frac{2\pi}{n} - z\right),\ \pm \sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right), \cdots .$$

Konečně také vyjádřil $\cos nz$ pomocí součinu kořenových činitelů.

Pro rozvoj funkce tangens Euler uplatnil týž postup, který již deset let před ním použil J. Machin. Vztah

$$\mathrm{tg}\ nx = \frac{(1 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{tg}\ x)^n - (1 - \mathrm{i} \cdot \mathrm{tg}\ x)^n}{(1 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{tg}\ x)^n + (1 - \mathrm{i} \cdot \mathrm{tg}\ x)^n} \cdot \mathrm{i}$$

poskytl Eulerovi „dělící“ rovnici

$$0 = 1 - \binom{n}{1} \frac{\mathrm{tg}\ z}{\mathrm{tg}\ nz} - \binom{n}{2} \frac{\mathrm{tg}^2 z}{\mathrm{tg}\ nz} + \binom{n}{3} \frac{\mathrm{tg}^3 z}{\mathrm{tg}\ nz} + \cdots$$

s kořeny tg z, tg $\left(\frac{\pi}{n} - z\right)$, tg $\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \ldots, n$ (§ 249 - 250). Později se znovu vrátil k tomuto rozkladu a vytvořil jej pod jiným úhlem pohledu.

Shrňme předchozí výklad. V díle *Introductio* je Eulerova podstatná zásluha o prvotní část vědního oboru *trigonometrie*. Euler totiž velice brzy rozpoznal potřebu zpracovat *trigonometrii* formálním způsobem, a to jinak, než tomu bylo doposud. To se mu ve zmíněném popsaném díle dokonale povedlo.

Literatura

[1] Maor, Eli, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, 1998

[2] Červený, Martin, *Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích – diplomová práce*, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007

[3] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_strana`

[4] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html`

[5] Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, John Wiley and sons, INC, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989

[6] Katz, Victor J., *A History of Mathematics*, Addison Wesley, Menlo Park, New York, Harlow, Don Mills, Sydney, Mexico City, Madrid, Amsterdam, 1998

[7] `http://www.geneze.info/jmena/osobnosti.htm`

[8] von Braunmühl, Dr. A., *Geschichte der Trigonometrie*, 1900

[9] Veselý, Jiří, *Matematická analýza pro učitele*, 1997

[10] Koževrov, P. J., *Trigonometrie*, 1955.

[11] Grattan-Guinness, Ivor, *The Rainbow of Mathematics*, 1997

Mgr. Radka Smýkalová
Ústav matematiky a statistiky PřF MU Brno
Kotlářská 2, 611 37 Brno
e-mail: xsmykal@math.muni.cz