MŮŽE BÝT ČÁSTEČNÝ SOUČET HARMONICKÉ ŘADY CELÉ ČÍSLO?

EMIL CALDA

Odpověď je samozřejmě kladná, neboť n-tý částečný součet harmonické řady, tj. součet

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n},$$

je pro $n = 1$ roven jedné. Tím je otázka v záhlaví zodpovězena a touto odpovědí by mohl celý článek skončit. Protože však je jasné, že takové triviální tvrzení žádného čtenáře neuspokojí, budeme pokračovat a ukážeme, že tento součet pro žádné $n > 1$ celé číslo není.

Je zřejmé, že stačí dokázat, že pro žádné $n > 1$ není celé číslo ani součet

$$s'_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Všimněme si nejprve, že mezi všemi těmito sčítanci existuje aspoň jeden zlomek, jehož jmenovatel je mocnina dvou, a vyberme z nich ten, v jehož jmenovateli má číslo dvě největší exponent – nechť je to zlomek $\frac{1}{2^k}$. V součtu

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

proto platí

$$\frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Vyjádříme nyní každý zlomek $\frac{1}{i}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, ve tvaru $\frac{1}{2^j \cdot m_i}$, kde 2^j je jedna z mocnin $2^0, 2^1, \ldots, 2^k$ a m_i je liché číslo, a za jejich společného jmenovatele vezmeme výraz $2^k \cdot m$, kde $m = m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Převedeme-li dále všechny sčítance našeho součtu na tento společný jmenovatel a sečteme-li je, bude součet s_n roven zlomku, jehož čitatel je

$$\frac{2^k \cdot m}{2} + \frac{2^k \cdot m}{3} + \frac{2^k \cdot m}{4} + \cdots + \frac{2^k \cdot m}{2^k - 1} + \frac{2^k \cdot m}{2^k} + \frac{2^k \cdot m}{2^k + 1} + \cdots + \frac{2^k \cdot m}{n}.$$

Protože číslo $2^k \cdot m$ je dělitelné každým z čísel $2, 3, 4, \ldots, n$, je každý z těchto $n - 1$ sčítanců celé číslo a podíváme-li se pozorně, zjistíme, že všechna – až na jedno – jsou sudá; jediným lichým sčítancem je číslo $\frac{2^k \cdot m}{2^k} = m$. Čitatel zlomku s_n je tedy číslo liché a vzhledem k tomu, že jeho jmenovatel $2^k \cdot m$ je číslo sudé, není tento zlomek celé číslo. Tím jsme dokázali, že platí:

Pro žádné přirozené $n > 1$ součet $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ není celé číslo.

Jak bylo uvedeno na začátku, znamená to, že pro žádné přirozené $n > 1$ není celé číslo ani součet

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Uveďme na závěr, že podobným způsobem si může čtenář dokázat, že také součet

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n + 1}$$

se pro žádné přirozené n celému číslu nerovná.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz