

Emil Calda

Může být částečný součet harmonické řady celé číslo?

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 1, 9–10

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150560>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2009

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MŮŽE BÝT ČÁSTEČNÝ SOUČET HARMONICKÉ ŘADY CELE ČÍSLO?

EMIL CALDA

Odpověď je samozřejmě kladná, neboť n -tý částečný součet harmonické řady, tj. součet

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n},$$

je pro $n = 1$ roven jedné. Tím je otázka v záhlaví zodpovězena a touto odpovědí by mohl celý článek skončit. Protože však je jasné, že takové triviální tvrzení žádného čtenáře neuspokojí, budeme pokračovat a ukážeme, že tento součet pro žádné $n > 1$ celé číslo není.

Je zřejmé, že stačí dokázat, že pro žádné $n > 1$ není celé číslo ani součet

$$s'_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Všimněme si nejprve, že mezi všemi těmito sčítanci existuje aspoň jeden zlomek, jehož jmenovatel je mocnina dvou, a vyberme z nich ten, v jehož jmenovateli má číslo dvě největší exponent – nechť je to zlomek $\frac{1}{2^k}$. V součtu

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

proto platí

$$\frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Vyjádríme nyní každý zlomek $\frac{1}{i}$, $i = 2, 3, \dots, n$, ve tvaru $\frac{1}{2^j \cdot m_i}$, kde 2^j je jedna z mocnin $2^0, 2^1, \dots, 2^k$ a m_i je liché číslo, a za

jejich společného jmenovatele vezmeme výraz $2^k \cdot m$, kde $m = m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_n$.

Převědeme-li dále všechny sčítance našeho součtu na tento společný jmenovatel a sečteme-li je, bude součet s_n roven zlomku, jehož číselník je

$$\frac{2^k \cdot m}{2} + \frac{2^k \cdot m}{3} + \frac{2^k \cdot m}{4} + \dots + \frac{2^k \cdot m}{2^k - 1} + \frac{2^k \cdot m}{2^k} + \frac{2^k \cdot m}{2^k + 1} + \dots + \frac{2^k \cdot m}{n}.$$

Protože číslo $2^k \cdot m$ je dělitelné každým z čísel $2, 3, 4, \dots, n$, je každý z těchto $n - 1$ sčítanců celé číslo a podíváme-li se pozorně, zjistíme, že všechna – až na jedno – jsou sudá; jediným lichým sčítancem je číslo $\frac{2^k \cdot m}{2^k} = m$. Číselník zlomku s_n je tedy číslo liché a vzhledem k tomu, že jeho jmenovatel $2^k \cdot m$ je číslo sudé, není tento zlomek celé číslo. Tím jsme dokázali, že platí:

Pro žádné přirozené $n > 1$ součet $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$ není celé číslo.

Jak bylo uvedeno na začátku, znamená to, že pro žádné přirozené $n > 1$ není celé číslo ani součet

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Uveďme na závěr, že podobným způsobem si může čtenář dokázat, že také součet

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1}$$

se pro žádné přirozené n celému číslu nerovná.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz