Učitel matematiky

Jindřich Bečvář; Vlastimil Dlab

Rozdělení čtyřúhelníku na čtyři části stejného obsahu

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 4, 213–221

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150599`

ROZDĚLENÍ ČTYŘÚHELNÍKU NA ČTYŘI ČÁSTI STEJNÉHO OBSAHU

Jindřich Bečvář, Vlastimil Dlab

V tomto příspěvku se opět jedná o *dokonalé porozumění elementární matematice*, jak je zavedla Liping Ma ve své knize [6]. Tento článek volně navazuje na práce [1], [2] a [3].

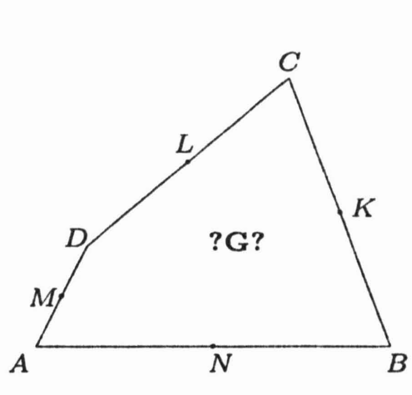
Následující příklad může vzbudit pozornost studentů. Diskuse o tom, jak úlohu řešit, mohou být pro ně velmi motivující.

Problém dědictví. Čtyři sourozenci zdědili velký stavební pozemek ve tvaru konvexního čtyřúhelníku. Dohodli se, že si jej rozdělí na čtyři čtyřúhelníky, a to tak, aby dvě strany každého z nich byly určeny jedním z vrcholů původního čtyřúhelníku a půlícími body sousedních stran. Samozřejmou podmínkou je, aby čtyři vzniklé čtyřúhelníky měly stejný obsah.

Otázky.

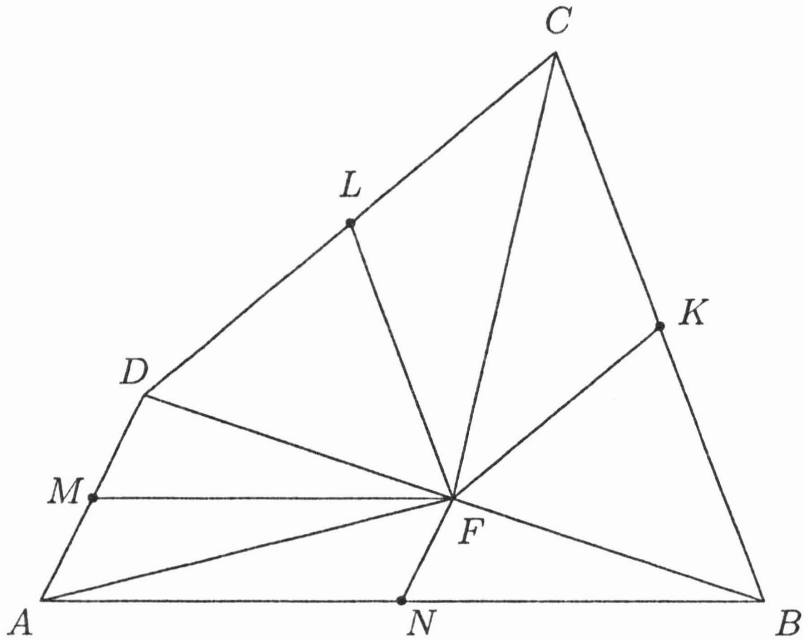
1. Existuje takové řešení?
2. Jestliže řešení existuje, je jediné?
3. Jestliže řešení existuje, nalezněte konstrukci pro rozdělení pozemku!

Řešíme tedy následující matematický problém: Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s půlícími body K, L, M, N jednotlivých stran (viz obr. 1). Máme nalézt takový bod G, aby čtyřúhelníky $ANGM$, $BKGN$, $CLGK$ a $DMGL$ měly stejný obsah.



Obr. 1

První řešení. Bylo by dobré vědět, jak je velká čtvrtina čtyřúhelníku $ABCD$. Rozdělme proto tento čtyřúhelník úhlopříčkou BD na dva trojúhelníky a označme F její půlící bod. Vzpomeňme, že každý trojúhelník umíme rozdělit na čtyři trojúhelníky stejného obsahu. Čtyřúhelník $ABCD$ tak rozdělíme na osm částí (viz obr. 2).



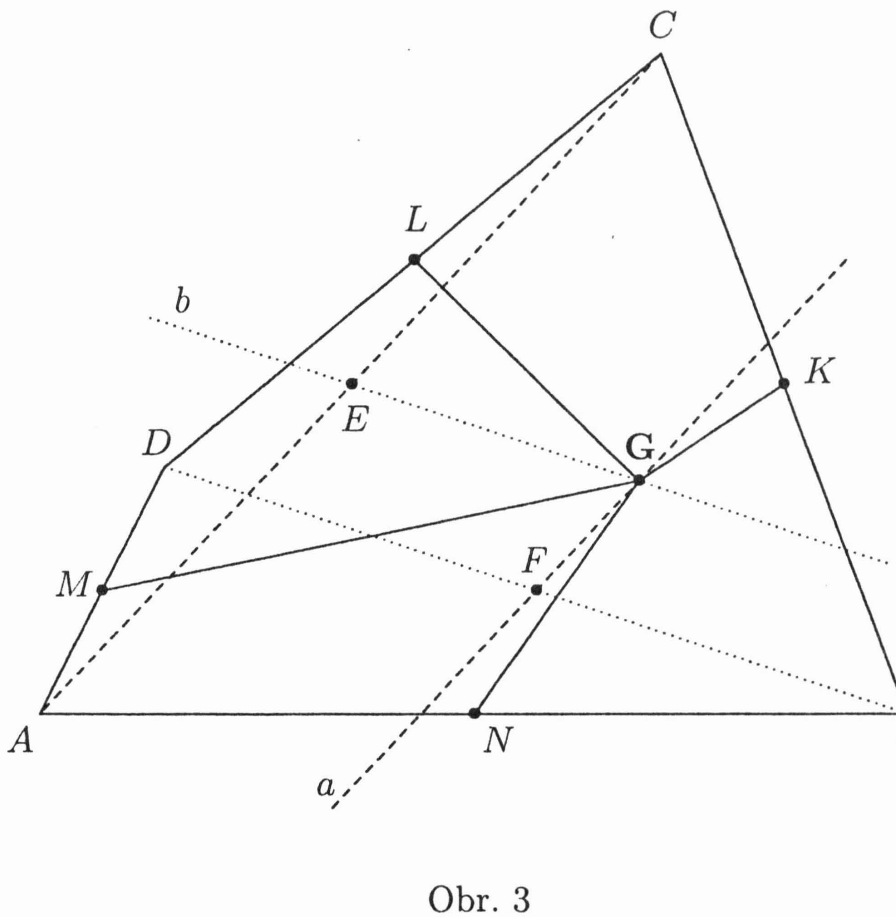
Obr. 2

Všimněme si dvou faktů. Za prvé: čtyřúhelník $BKFN$ a čtyřúhelník $DMFL$ má obsah rovný čtvrtině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Za druhé: obsah čtyřúhelníku $BKFN$ se rovná součtu obsahů trojúhelníku BKN a trojúhelníku KFN, obsah čtyřúhelníku $DMFL$ se rovná součtu obsahů trojúhelníku DML a trojúhelníku MFL.

V dalším využijeme následující známý fakt: dva trojúhelníky se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný obsah. Pohybuje-li se tedy bod Z po rovnoběžce s úsečkou XY, mají všechny trojúhelníky XYZ stejný obsah.

Pro každý bod F^* ležící na přímce a procházející bodem F a rovnoběžné s úsečkou NK, a tedy s úhlopříčkou AC, mají čtyřúhelníky BKF^*N a DMF^*L obsah rovný čtvrtině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$ (viz obr. 3).

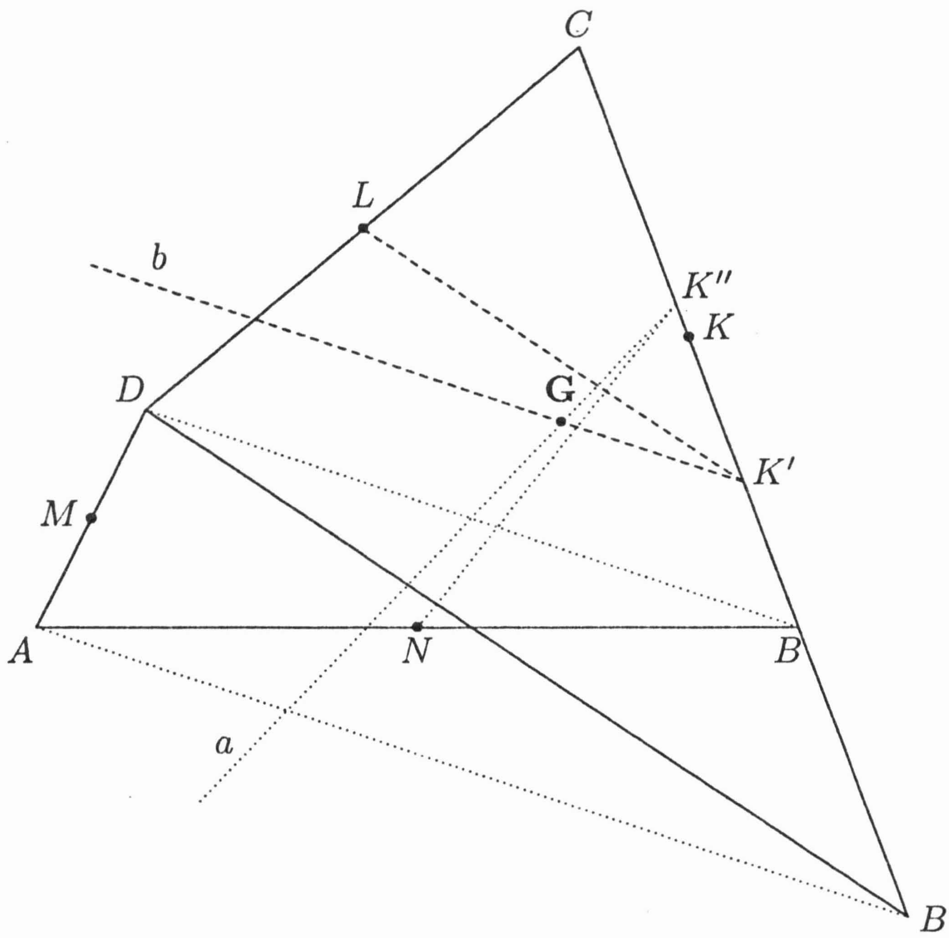
Stejnou úvahu můžeme nyní provést pro úhlopříčku AC a její střed E. Pro každý bod E^* na přímce b procházející bodem E a rovnoběžné s úhlopříčkou BD má čtyřúhelník ANE^*M a čtyřúhelník CLE^*K obsah rovný čtvrtině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Odtud plyne, že pro průsečík G přímek a a b mají čtyřúhelníky $ANGM$, $BKGN$, $CLGK$ a $DMGL$ stejný obsah, který je rovný čtvrtině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Dostali jsme kladné odpovědi na první a druhou otázku.



Obr. 3

Konstrukce. Středem F úhlopříčky BD vedeme rovnoběžku a s úhlopříčkou AC, středem E úhlopříčky AC vedeme rovnoběžku b s úhlopříčkou BD. Průsečík přímek a, b je hledaným bodem G (viz obr. 3).

Jiné zdůvodnění. Přetvořme známým způsobem čtyřúhelník $ABCD$ na rovnoplochý trojúhelník $DB'C$ (viz obr. 4).



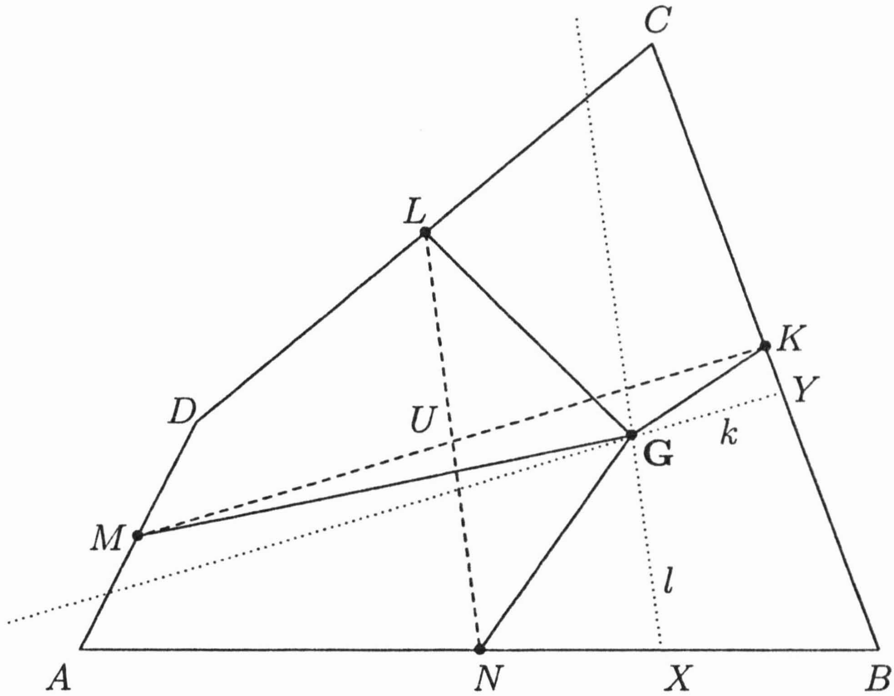
Obr. 4

Nechť K' je středem strany $B'C$. Úsečka LK' je střední příčkou trojúhelníku $DB'C$, obsah trojúhelníku CLK' je tedy čtvrtinou obsahu trojúhelníku $DB'C$, a tedy též čtvrtinou obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Trojúhelník CLK' přetvoříme na rovnoplochý čtyřúhelník $CLGK$, bude-li bod G ležet na rovnoběžce b s úsečkou LK (tj. s úhlopříčkou BD), která vede bodem K'. Vede též středem E úhlopříčky AC (stejnolehlost se středem C).

Přetvoříme-li obdobným způsobem čtyřúhelník $ABCD$ na rovnoplochý trojúhelník ABC' (bod C' leží na přímce BC) a uvažujeme-li střed K'' strany BC', pak má trojúhelník BNK'' obsah rovný jedné čtvrtině čtyřúhelníku $ABCD$. Hledaný bod G leží na rovnoběžce a s úhlopříčkou AC, která vede bodem K''. Vede též středem F úhlopříčky BD.

Druhé řešení. Úlohu můžeme rovněž řešit porovnáváním obsahů sousedních čtyřúhelníků (viz obr. 5). Zjistíme, že geometrickým místem bodů Z, pro něž se obsahy čtyřúhelníků $ANZM$ a $BKZN$ rovnají, je polopřímka l rovnoběžná s úsečkou NU, kde U je středem úsečky KM, vycházející z bodu X na hraně AB, který je určen podmínkou

$$\frac{d(X,A)}{d(N,A)} = \frac{d(K,AB)}{d(U,AB)};$$



Obr. 5

přitom symbolem $d(*,*)$ značíme vzdálenost dvou bodů, resp. vzdálenost bodu od přímky. Toto tvrzení snadno ověříme užitím analytické geometrie: jestliže položíme

$$A = [0,0], \quad B = [2d,0], \quad C = [2p,2q], \quad D = [2m,2n],$$

potom

$$K = [p+d,q], \qquad M = [m,n],$$

$$U = \left[\frac{p+d+m}{2}, \frac{q+n}{2}\right], \qquad X = \left[\frac{2dq}{n+q}, 0\right].$$

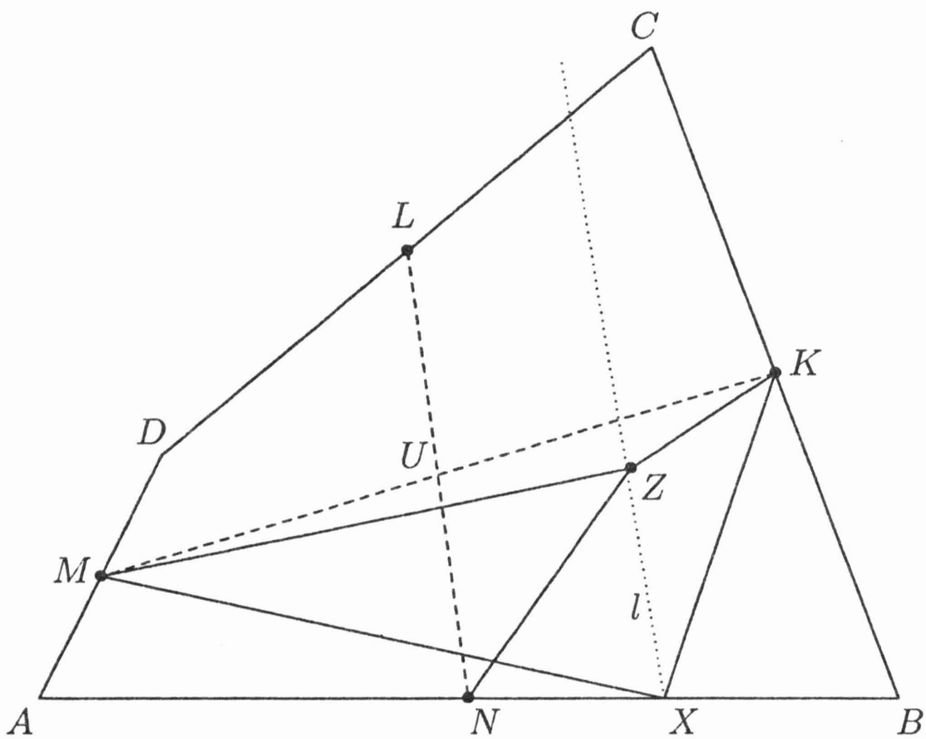
Směrnice polopřímky l je

$$\frac{n+q}{p-d+m}.$$

Provedeme-li obdobně porovnání obsahů čtyřúhelníků $BKZN$ a $CLZK$, získáme bod Y a polopřímku k. Hledaný bod G je průsečíkem polopřímek l a k.

Syntetický komentář. Následujícím postupem lze poměrně snadno ukázat, že všechny body výše uvedené polopřímky l mají požadovanou vlastnost (viz obr. 6). Bod X zvolme na straně AB tak, aby byly obsahy trojúhelníků AXM a BXK stejné. Označíme-li v_M, v_U, v_K po řadě vzdálenosti bodů M, U, K od přímky AB, je

$$AX \cdot v_M = BX \cdot v_K = (AB - AX) \cdot v_K = (2AN - AX) \cdot v_K.$$



Obr. 6

Odtud

$$AX(v_M + v_K) = 2AN \cdot v_K,$$

neboli

$$AX \cdot v_U = AN \cdot v_K,$$

což je výše uvedený vztah určující polohu bodu X na straně AB. Odtud

$$AX = \frac{AN \cdot v_K}{v_U} = \frac{2dq}{n+q}.$$

Nechť je Z bodem rovnoběžky l s přímkou NU vedené bodem X. Označme e vzdálenost bodu K od přímky NU (stejná je vzdálenost bodu M od přímky NU) a f vzdálenost polopřímky l a přímky NU. Obsah čtyřúhelníku $BNZK$ je o obsahy trojúhelníků ZXK a ZXN větší než obsah trojúhelníku XBK; je tedy větší o $ZX \cdot e$.

Obsah čtyřúhelníku $ANZM$ získáme tak, že přičteme k obsahu trojúhelníku AXM obsah trojúhelníku XZM a odečteme obsah trojúhelníku ZXN; přičteme tedy $ZX \cdot (e+f)$ a odečteme $ZX \cdot f$. Čtyřúhelníky $BNZK$ a $ANZM$ tedy mají stejný obsah.

Podobným způsobem lze ukázat, že body neležící na polopřímce l uvedenou vlastnost nemají.

Poznámka. Zatímco při prvním řešení jsme získali bod G jako průsečík rovnoběžek s úhlopříčkami čtyřúhelníku $ABCD$, při druhém řešení je bod G průsečíkem rovnoběžek se středními příčkami tohoto čtyřúhelníku.

Třetí řešení. K nalezení bodu G opět použijeme analytickou geometrii. Ponechme označení souřadnic bodů z předchozího řešení. Použijeme-li pro obsah S čtyřúhelníku, jehož vrcholy mají souřadnice

$$[x_1, y_1], \quad [x_2, y_2], \quad [x_3, y_3], \quad [x_4, y_4],$$

známý vzorec

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{cc} x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_4 \end{array} \right|,$$

obdržíme po chvíli počítání porovnáním obsahů čtyřúhelníků $ANZM$, $BKZN$, $CLZK$ a $DMZL$ pro souřadnice $[x,y]$ bodu Z tři lineární rovnice, které jsou ekvivalentní následující soustavě dvou rovnic:

$$\begin{aligned} (n+q)x + (d-m-p)y &= 2dq, \\ nx + (d-m)y &= dq + pn - qm. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy rovnic získáme jednoznačně určené souřadnice hledaného bodu G:

$$G = \left[p + m + d - \frac{2dpn}{qd - qm + pn},\quad q + n - \frac{2dqn}{qd - qm + pn}\right].$$

Poznamenejme, že *důkladné porozumění elementární matematice* bude předmětem článků [4] a [5].

Literatura

[1] Bečvář, J., Dlab, V., Hrubý, D., Kuřina, F., Education of Mathematics Teachers (In Algebra and Geometry, in Particular), *Proceedings of the* 5^{th} *European Summer University* (eds. E. Barbin, N. Stehlíková, C. Tzanakis), Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, 439-448.

[2] Dlab, V., Výchova budoucích učitelů matematiky. Předstírání k nápravě nepomůže: „Učitelé se tváří, že vyučují, a studenti, že studují.", Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008, 6.–8. listopadu 2008, Srní (ed. M. Lávička, B. Bastl), Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, 101-104.

[3] Dlab, V., Důkladné porozumění elementární matematice, *Učitel matematiky,* **71**(2009) 169-182.

[4] Dlab, V., *Aritmetické posloupnosti vyšších řádů.* Připravuje se do tisku.

[5] Dlab, V., *Rekurzivní posloupnosti* $\{x_n;\ n \geq 1\}$ *o dvou parametrech:* $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$. Připravuje se do tisku.

[6] Ma, Liping, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Studies in Mathematical Thinking and Learning, Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz