Pavel Drábek

Nerovnosti - koření i nástroj matematické analýzy

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 2, 65–76

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150722`

NEROVNOSTI – KOŘENÍ I NÁSTROJ MATEMATICKÉ ANALÝZY

PAVEL DRÁBEK

1. Úvod

V tomto příspěvku uvedeme dvě zajímavé aplikace známých nerovností. Jde jednak o tzv. Cauchyovu[1]–Schwarzovu[2]–Buniakowského[3] nerovnost a dále pak o nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Pro úplnost zde podáme také důkazy těchto nerovností. U té druhé předvedeme dokonce důkazy dva, neboť každý z nich nabízí trochu jiný pohled na věc.

Různé typy nerovností jsou základním nástrojem matematické analýzy. S trochou nadsázky to vystihuje následující výrok G. H. Hardyho[4] (který ve své inaugurační přednášce jakožto prezident Londýnské matematické společnosti citoval H. Bohra[5]):

> *Všichni analytici tráví polovinu svého času tím, že v literatuře hledají nerovnosti, které chtějí použít a které neumějí dokázat.*

Kromě užitečnosti řady nerovností je důležitá také jejich „matematická krása". Ta se projevuje nejenom tím, že nerovnost sama může odkrýt překvapivé souvislosti mezi porovnávanými veličinami, ale její důkaz může představovat zajímavou a elegantní metodu.

---

[1] Augustin Cauchy, 1789–1857, francouzský matematik.

[2] Herman Amadeus Schwarz, 1843–1921, německý matematik.

[3] Viktor Jakovlevič Buniakowski, 1882–1925, ruský matematik.

[4] Godfrey Harold Hardy, 1877-1947, anglický matematik.

[5] Harald Bohr, 1887-1951, dánský matematik a mladší bratr fyzika Nielse Bohra.

2. Základní nerovnosti

Písmenem V budeme značit reálný vektorový prostor, tučnými písmeny $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ budeme značit jeho prvky. Budeme předpokládat, že na prostoru V je definován skalární součin dvou prvků $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ a norma prvku $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{< \mathbf{a}, \mathbf{a} >}$. Čtenář si může představit, že $V = \mathbb{R}^N$ (N – dimenzionální eukleidovský prostor), $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ a $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Věta 2.1 (Cauchy, Schwarz, Buniakowski). *Pro každé* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ *platí*

$$| < \mathbf{a}, \mathbf{b} > | \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|. \tag{1}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}$ *jsou lineárně závislé prvky, tj. existuje* $t \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$.

Důkaz. Uvažujme kvadratickou funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) := \|x\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = x^2 \|\mathbf{a}\|^2 + 2x < \mathbf{a}, \mathbf{b} > + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Předpokládejme, že $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ (v případě $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ v (1) platí rovnost pro libovolné $\mathbf{b} \in V$).
Je-li $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ pro nějaké $t \in \mathbb{R}$, potom $| < \mathbf{a}, \mathbf{b} > | = |t| < \mathbf{a}, \mathbf{a} >= \|t\| \|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$, tj. v (1) platí rovnost. Jsou-li $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ lineárně nezávislé prvky, platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ ostrá nerovnost

$$\|x\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 > 0.$$

Ta je ekvivalentní tomu, že diskriminant

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$$

je ostře větší než nula a to je ekvivalentní ostré nerovnosti v (1). ∎

Poznámka 2.1 Bystrý čtenář si jistě všiml, že pro platnost nerovnosti (1) není třeba předpokládat, že prostor V má konečnou dimenzi.

Věta 2.2 (geometrický a aritmetický průměr s váhami). *Nechť* $a_1, a_2, \ldots, a_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ *jsou kladná reálná čísla taková, že* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. *Potom platí*

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \le p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n. \tag{2}$$

Přitom rovnost v (2) nastává právě tehdy, když $a_1 = \dots = a_n$.

Důkaz: Následující důkaz byl podán H. Alzerem [A]. Označíme $L := a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}$ a $P := p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_1 \le \dots \le a_n$. Protože $a_1 \le L \le a_n$, musí existovat $k \in \{1, \dots, n-1\}$ takové, že $a_k \le$ $\le L \le a_{k+1}$. Protože všechny výrazy za integračním znamením jsou nezáporné, platí

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{a_i}^{L} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{L}\right) dt + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{L}^{a_i} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{t}\right) dt \ge 0. \tag{3}$$

Nerovnost (3) můžeme psát v ekvivalentním tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{L}^{a_i} \frac{1}{L} dt \ge \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{L}^{a_i} \frac{1}{t} dt.$$

Levá strana této nerovnosti je rovna

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{a_i - L}{L} = \frac{P}{L} - 1,$$

zatímco pravá strana je rovna

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (\log a_i - \log L) = \log \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \right) - \log L = 0.$$

Odtud plyne $\frac{P}{L} - 1 \ge 0$, neboli $L \le P$.

V případě, že nastává rovnost $L = P$, musí být v (3) všechny integrály rovny nule, tj. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = L$. Je-li naopak $a_1 = \dots = a_n$, platí zřejmě $L = P$ díky předpokladu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

■

Důsledek 2.1 (geometrický a aritmetický průměr). *Pro kladná reálná čísla* $a_1, \ldots, a_n$ *platí*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \tag{4}$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $a_1 = \ldots = a_n$.

Důkaz: Ve větě 2.2 stačí položit $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$.

■

Důsledek 2.2: (harmonický a geometrický průměr). *Pro kladná reálná čísla* $a_1, \ldots, a_n$ *platí*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $a_1 = \ldots = a_n$.

Důkaz: V Důsledku 2.1 stačí uvažovat $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ místo $a_1, \ldots, a_n$.

■

Poznámka 2.2 Pro informaci uvedeme ještě poněkud nestandardní důkaz nerovnosti (4) matematickou indukcí, který je připisován Cauchymu ([AZ], [PS]). Označme symbolem $P(u)$ výrok, který je ekvivalentní nerovností (4):

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \right)^n.$$

Pro $n = 2$ je $P(2) \Leftrightarrow a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0$, což je pravdivý výrok. Indukční krok se nyní bude skládat ze dvou částí:

(i) $P(n) \Rightarrow P(n-1)$;

(ii) $P(n) \wedge P(2) \Rightarrow P(2n)$.

Je zřejmé, že z platnosti (i) a (ii) už plyne platnost $P(n)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Stačí tedy dokázat (i) a (ii). Položíme

$$A := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}.$$

Potom

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k\right) A = (a_1 a_2 \dots a_{n-1})A \le \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + A}{n}\right)^n = \tag{5}$$

$$= \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n,$$

kde nerovnost platí díky indukčnímu předpokladu $P(n)$ aplikovaném na n čísel $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, A$. Ze vztahu (5) pak plyne

$$\prod_{k=1}^{n-1} a_k \le A^{n-1} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}\right)^{n-1}$$

tedy $P(n-1)$ je platný výrok. Tím je dokázána implikace (i).
Dále platí

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^n \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)^n \le$$

$$\le \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{n}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n}\right)^{2n} \tag{6}$$

V první nerovnosti je použit dvakrát indukční předpoklad $P(n)$ vždy pro n čísel: $a_1, \dots, a_n$ a $a_{n+1}, \dots, a_{2n}$; ve druhé nerovnosti je použit indukční předpoklad pro 2 čísla $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}$ a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}$. Vztah (6) implikuje platnost výroku $P(2n)$, tj. implikace (ii) je také dokázána.

3. Lokalizace kořenů polynomu n-tého stupně

Jako aplikaci nerovnosti (1) uvedeme výsledek, který poskytuje odhad pro polohu kořenů některých speciálních polynomů.

Věta 3.1 *Předpokládejme, že všechny kořeny polynomu*

$$P_n(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

jsou reálné. Potom tyto kořeny leží v uzavřeném intervalu s koncovými body

$$x_{1,2} := -\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}\,. \tag{7}$$

Důkaz: Nechť y je jeden z kořenů polynomu P_n a $y_1, \ldots, y_{n-1}$ jsou kořeny zbývající. Potom

$$P_n(x) = (x-y)(x-y_1)\ldots(x-y_{n-1})$$

a tedy

$$-a_{n-1} = y + y_1 + \ldots + y_{n-1}, a_{n-2} = y(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + \sum_{i<j} y_i y_j. \tag{8}$$

Odtud dostáváme

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2. \tag{9}$$

Použijeme-li nerovnost (1), kde položíme $\mathbf{a} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ a $\mathbf{b} = (1, \ldots, 1)$, potom s využitím (8) a (9) obdržíme

$$\begin{aligned}(a_{n-1} + y)^2 &= (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})^2 \leq (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = \\ &= (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2),\end{aligned}$$

což je ekvivalentní nerovnosti

$$y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2 \leq 0. \tag{10}$$

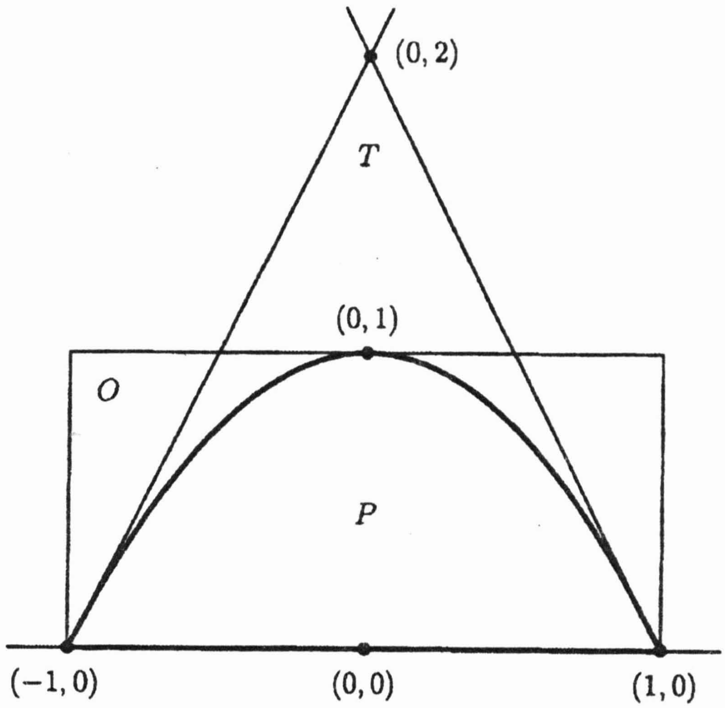
Proto y (a tedy i všechny ostatní kořeny $y_i, i = 1, \ldots, n-1$) leží mezi dvěma nulovými body kvadratické funkce na levé straně nerovnosti (10). Tyto body $x_{1,2}$ jsou dány výrazy (7).

■

Poznámka 3.1 Pro polynom druhého stupně s reálnými kořeny neříká Věta 3.1 nic jiného než to, že krajními body intervalu jsou právě kořeny kvadratické rovnice $x_{1,2}$ dané výrazy (7).

4. Odhad plochy „tečného trojúhelníka"

V tomto odstavci ukážeme jednu aplikaci nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Jako motivaci uvažujme následující vlastnost paraboly $f(x) = 1 - x^2$ mezi body $x = -1$ a $x = 1$: funkci $f = f(x)$ můžeme přiřadit „tečný" trojúhelník T a „tečný" obdélník O (viz obr. 1).



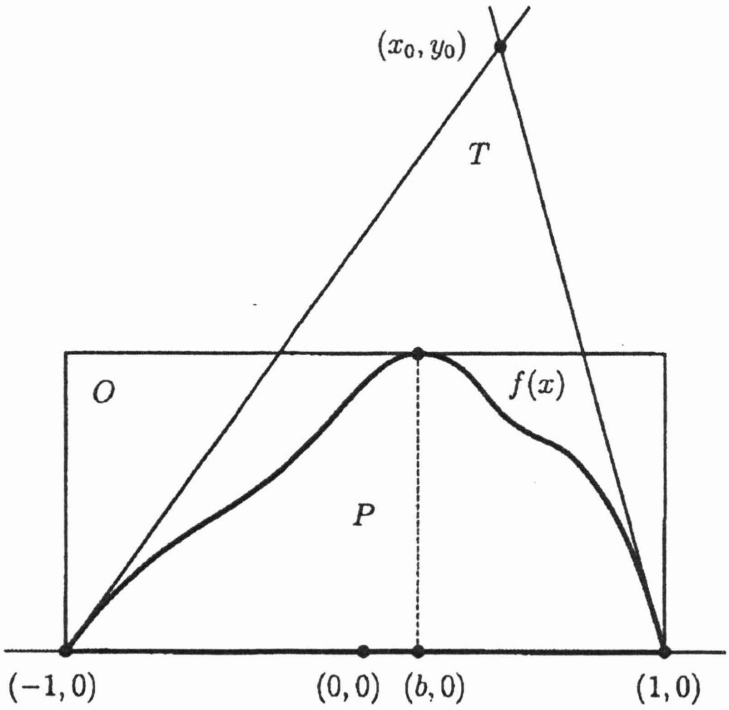
Obr. 1: Tečný trojúhelník a tečný obdélník přiřazený parabole.

Plocha „pod parabolou" P má velikost $|P| = \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \frac{4}{3}$, zatímco pro plochy trojúhelníka T a obdélníka O mají velikost $|T| = |O| = 2$. Platí tedy

$$\frac{|T|}{|P|} = \frac{|O|}{|P|} = \frac{3}{2}. \tag{11}$$

Uvažujme nyní obecnější případ, kdy $f = f(x)$ je polynom n-tého stupně takový, že $f(x) > 0$ pro $x \in (-1,1)$ a $f(-1) = f(1) = 0$. Plocha „pod grafem" polynomu f má velikost $|P| = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Polynomu f můžeme přiřadit opět „tečný" trojúhelník T a „tečný" obdélník O (viz obr. 2)



Obr. 2: Tečný trojúhelník a tečný obdélník přiřazený obecnému polynomu.

Pokud f nabývá své maximální hodnoty v bodě $b \in (-1,1)$, potom platí

$$|O| = 2f(b).$$

Pro plochu trojúhelníka platí $|T| = y_0$, kde (x_0, y_0) je bod, kde se protnou tečny ke grafu polynomu f v bodech $(-1, 0)$ a $(1, 0)$. Rovnice těchto tečen jsou $y = f'(-1)(x+1)$ a $y = f'(1)(x-1)$. Platí tedy

$$x_0 = \frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}.$$

Odtud dostaneme

$$y_0 = |T| = f'(1)\left[\frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} - 1\right] = 2\frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}. \tag{12}$$

Obecně lze ukázat, že pro poměry $\dfrac{|T|}{|P|}$ a $\dfrac{|O|}{|P|}$ žádná netriviální omezení neplatí. Stačí uvažovat polynomy

$$f(x) = 1 - x^{2n}, n \in \mathbb{N},$$

pro které $|P| = \dfrac{4n}{2n+1}$, $|T| = 2n$ a $|O| = 2$. Potom

$$\frac{|T|}{|P|} \to \infty \text{ a } \frac{|O|}{|P|} \to 1 \text{ pro } n \to \infty.$$

Pro polynomy, které mají pouze reálné koeficienty, však lze dokázat odhady, které jako první dokázali Paul Erdös[6] a Tibor Gallai[7]. Právě jim je připisován následující výsledek:

Věta 4.1 *Nechť $f = f(x)$ je reálný polynom stupně $n \geq 2$, který má pouze reálné kořeny, $f(x) > 0$ pro $x \in (-1, 1)$ a $f(-1) = f(1) = 0$. Potom platí*

$$\frac{2}{3}|T| \leq |P| \leq \frac{2}{3}|O| \tag{13}$$

přičemž rovnosti nastávají pouze v případě $n = 2$.

[6] Paul Erdös 1913–1996, maďarský matematik.
[7] Tibor Gallai, 1912–1992, maďarský matematik.

Erdös a Gallai dokázali nerovnosti (13) matematickou indukcí. V recenzi jejich článku, kterou napsal George Pólya[8] [P], její autor vysvětlil, jak je možné první nerovnost v (13) dokázat pomocí vztahu mezi geometrickým a aritmetickým průměrem. Poznamenejme, že podobný důkaz druhé nerovnosti v (13) není znám.

Důkaz nerovnosti $\frac{2}{3}|T| \le |P|$. Protože polynom $f = f(x)$ stupně n má pouze reálné kořeny, žádný z nich neleží v intervalu $(-1, 1)$ a body ± 1 jsou jeho kořeny, má – až na konstantní nenulový násobek, který v odhadu nehraje roli – tvar

$$f(x) = (1 - x^2)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x), \tag{14}$$

kde $\alpha_i \ge 1$ a $\beta_j \ge 1$. Platí tedy

$$|P| = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x)dx.$$

Provedeme-li substituci $x := -x$, dostáváme také

$$|P| = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\prod_i(\alpha_i + x)\prod_j(\beta_j - x)dx,$$

neboli

$$|P| = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\tfrac{1}{2}\Big[\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x) + \\ + \prod_i(\alpha_i + x)\prod_j(\beta_j - x)\Big]dx.$$

Podle Důsledku 2.1, kde $n = 2, a_1 = \prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x), a_2 =$

[8] George Pólya, 1887–1985, maďarský matematik.

$= \prod_i(\alpha_i + x) \prod_j(\beta_j - x)$, platí

$$
\begin{aligned}
|P| &\ge \int_{-1}^{1} (1-x^2)\Big[\prod_i(\alpha_i^2 - x^2)\prod_j(\beta_j^2 - x^2)\Big]^{\frac{1}{2}} dx \ge \\
&\ge \int_{-1}^{1} (1-x^2)\Big[\prod_i(\alpha_i^2 - 1)\prod_j(\beta_j^2 - 1)\Big]^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \tfrac{4}{3}\Big[\prod_i(\alpha_i^2 - 1)\prod_j(\beta_j^2 - 1)\Big]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Pokud $f'(-1) = 0$ nebo $f'(1) = 0$, potom $|T| = 0$ a dokazovaná nerovnost je triviální. Nadále tedy budeme předpokládat, že $f'(-1)f'(1) < 0$.[9] Ze vztahu (14) plyne

$$f'(1) = -2\prod_i(\alpha_i - 1)\prod_j(\beta_j + 1),\; f'(-1) = 2\prod_i(\alpha_i + 1)\prod_j(\beta_j - 1).$$

Odtud a z (15) tedy vyplývá, že

$$|P| \ge \frac{2}{3}\sqrt{-f'(1)f'(-1)}. \tag{16}$$

Použijeme-li nyní Důsledek 2.2, kde $n = 2, a_1 = -f'(1), a_2 = f'(-1)$, dostáváme

$$\sqrt{-f'(1)f'(-1)} \ge \frac{2}{\frac{1}{-f'(1)} + \frac{1}{f'(-1)}} = \frac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}. \tag{17}$$

Ze vztahu (12) a z nerovností (16) a (17) nyní vyplývá

$$|P| \ge \frac{2}{3}|T|.$$

Pokud podrobně analyzujeme, kdy ve výše uvedených nerovnostech může nastat rovnost, dospějeme k závěru $n = 2$.

■

[9] Čtenář si jistě sám zdůvodní, proč z předpokladů na f plyne, že $f'(-1) > 0, f'(1) < 0$ a nerovnost $f'(-1)f'(1) \ge 0$ tedy nemůže nastat.

Poděkování. Autor článku je podporován výzkumným záměrem č. MSM 4977751301.

Literatura

[A] Alzer, H.: A proof of the arithmetic mean – geometric mean inequality, Amer. Math. Monthly 103 (1996), str. 585.

[AZ] Aigner, M., Ziegler, G. M.: Proofs from the Book, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 2002.

[PS] Pólya, G., Szegö, G.: Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1998.

[EG] Erdös, P., Grünwald, T.: On polynomials with only real roots, Annals Math. 40 (1939), 537–548.

[P] Pólya, G.: Review of [EG], Math Reviews 1 (1940), str.1.

Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc.
Katedra matematiky FAV ZČU,
Univerzitní 22,
306 14 Plzeň
e-mail: pdrabek@lema.zcu.cz