

Erika Kupková

Neriešitelná úloha v 3. ročníku ZŠ

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 4, 228–233

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150806>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2001

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NERIEŠITEĽNÁ ÚLOHA V 3. ROČNÍKU ZŠ

ERIKA KUPKOVÁ

V pracovnom zošite pre 3.ročník ZŠ je nasledovná úloha:
Do každého domčeka zaved' plyn, vodu a elektrinu. Vedenia sa však nikde nesmú pretínať!



Obr. 1

Táto úloha mnohých učiteľov zneistila. Nepoznali totiž jej riešenie. To, že táto úloha sa naozaj nedá vyriešiť, im potvrdili aj *Metodické poznámky*, kde bol nasledovný komentár: *Úloha sa nedá vyriešiť. Náročným na tejto úlohe je prísť k poznaniu, že odpoveď „úloha nemá riešenie“ je také isté riešenie ako každé iné.* Úloha v sebe skrýva ešte ďalší stupeň náročnosti. Nie je totiž vôbec také jednoduché vidieť, že sa naozaj nedá vyriešiť.

Učiteľ je v tomto prípade v roli authority, ktorá prehlási *Úloha sa nedá vyriešiť*, čím prehlási, že úlohu riešili správne všetci tí, ktorým sa ju nepodarilo vyriešiť. Na to, aby v tejto roli mohol vystupovať, musí byť aj sám presvedčený, že riešenie neexistuje.

Ako sa učitelia vysporiadavali s prítomnosťou takejto úlohy v pracovnom zošite, budeme ilustrovať na troch konkrétnych príkladoch.

1. Žiaci mali túto úlohu riešiť ako domácu úlohu. Na druhý deň prišiel jeden zo žiakov s nasledovným riešením: *Dva domčeky spojíme, a potom to už ľahko ide, lebo k nim stačí plyn, vodu aj elektrinu doviest' iba raz.* Pani učiteľka jeho riešenie prijala.
2. Žiaci riešili príklad na hodine. Po nejakom čase vyplneným beznádejnými pokusmi o riešenie úlohy viac detí začalo tvrdiť, že sa to nedá. Vtedy pani učiteľka žiakom povedala, že táto úloha naozaj nemá riešenie.
3. Žiaci riešili príklad na hodine. Na konci vyučovacej hodiny pani učiteľka povedala, že tí, čo nestihli túto úlohu vyriešiť na hodine, si ju majú dokončiť doma.

A teraz niečo zo zákulisia: Mirko, ktorý príklad dostal na domácu úlohu, sa s úlohou trápil najprv sám a potom do riešenia zapojil aj oboch rodičov. Mirkov otec bol síce presvedčený, že úloha sa nedá vyriešiť, ale nevedel svojmu synovi vysvetliť prečo. Bol veľmi zvedavý, ako bude situáciu riešiť pani učiteľka. O to viac bol sklamaný, keď zistil, že pani učiteľka deťom nepovedala, že úloha nemá riešenie. Sklamaný bol aj Mirko. Mal pocit, že úlohu nevyriešil správne, lebo spolužiak našiel riešenie, ktoré pani učiteľka akceptovala a on ho nenašiel. Mirkov otec teda zatelefonoval svojej sesternici, ktorá zhodou okolností učila tento rok v 3. ročníku.

Sesternicu jeho telefonát potešil, pretože s touto úlohou mala problémy aj ona. Chýbal jej práve ten pocit presvedčenia, že riešenie naozaj neexistuje. Rada by videla dôkaz neriešiteľnosti úlohy, a očakávala, že jej ho *Metodické poznámky* poskytnú.

Ocko si teda našiel matematika — profesionála, ktorý mu vedel ukázať, prečo úloha nemá riešenie. Dôkaz bol pomerne neformálny a prehľadný. Mirkov ocko je presvedčený, že takýto dôkaz by mal byť aj v *Metodických pokynoch* a učitelia by ho mali deťom predviesť.

Majka bola v triede, kde sa úloha riešila na hodine. Doma ju vôbec nespomínala. Tým, že pani učiteľka povedala, že úloha nemá riešenie, problém pre ňu skončil. V jej pracovnom zošite bolo zakreslených sedem nepretínajúcich sa vedení, stredný domček nemal zapojený vodu a plyn.

Janka a Katka boli v triede, kde bolo treba úlohu dokončiť doma. Janka mala úlohu „vyriešenú“. Nemala však do prvého domčeka zavedenú elektrinu, a do tretieho mala elektrinu zavedenú dvakrát.

Katka mala v zošite veľa vygumovaných pokusov. Na konci úlohy bol malý červený otáznik, ktorý tam pripísala pani učiteľka. Keď som sa jej spýtala, ako je to s tou úlohou, odpovedala: *Ja ju neviem vyriešiť. Robili sme to doma dve hodiny aj s rodičmi, ale nevedeli sme to.*

A čo tvoje riešenie, Janka ?, ukazujem Janke jej pracovný zošit. *No ja to mám vyriešené*, odpovedá Janka. *Pozri, Janka to vyriešila*, ukazujem Katke. Katka po malej chvíli našla obe chyby v Jankinom riešení. Potom ešte dodala: *Robili to so mnou doma aj rodičia, ale nepodarilo sa nám to. Skúšali sme to aj dve hodiny.*

Ani jedno zo spomínaných detí nemalo v pracovnom zošite napísané *Táto úloha nemá riešenie*.

Keď som sa na riešenie úlohy pýtala Majky, odpovedala: *To sa nedá. Prečo?*, pýtam sa jej. *Pani učiteľka nám to povedala.*

Mirko vie, že úloha nemá riešenie, lebo mu to povedal ocko. Janka a Katka dodnes nevedia, že riešením tejto úlohy je odpoveď: *Úloha nemá riešenie*.

Aby si mohol náš čitateľ utvoriť svoj vlastný názor na túto problematiku, potreboval by poznať dôkaz, ktorý sa podarilo pozháňať Mirkovmu otcovi. Budeme tiež diskutovať na tému, či je tento dôkaz vhodný aj pre deti, prípadne či by mal mať svoje miesto v *Metodických pokynoch*. A pristavíme sa aj pri otázke, kedy je splnený didaktický cieľ tejto úlohy, tj. kedy dochádza u detí k poznaniu, že aj odpoveď *Úloha nemá riešenie* môže byť správna odpoveď.

Neriešiteľnosť tejto úlohy je jedným zo základných tvrdení teórie grafov. Jeho znenie je: *Graf $k(3,3)$ nie je planárny*. Dôkaz využíva pojmy a nástroje teórie grafov.

To, že naša úloha nemá riešenie, sa ale dá dokázať aj bez využitia teórie grafov. Hlavná myšlienka tohto dôkazu je jednoduchá. Ukážeme, že ak by nám ktokoľvek tvrdil, že našiel riešenie tejto úlohy, tak v jeho riešení nájdeme chybu: buď mu bude niektoré

vedenie chýbať, alebo sa niektoré dve vedenia budú pretínať.

Dôkaz:

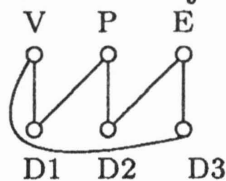
Úloha je vyriešená vtedy, ak je zakreslených všetkých deväť vedení a žiadne z nich sa nepretínajú. Ukážeme, že v každom riešení, kde je zakreslených všetkých deväť vedení, sa niektoré vedenia musia pretínať.

Riešenie budeme reprezentovať grafom, ktorého vrcholy budú V (voda), P (plyn), E (elektrina), D1, D2, D3 (tri domčeky).

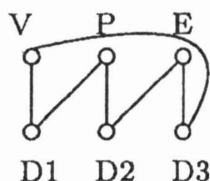
Zoberme si teda ľubovoľné riešenie, v ktorom je zakreslených všetkých deväť vedení. Všimnime si zatiaľ iba vedenia V-D1, D1-P, P-D2, D2-E, E-D3, D3-V.

Ak sa niektoré dve z nich pretínajú, dôkaz je ukončený, v tomto riešení sa vedenia pretínajú, takže to nebolo správne riešenie.

Predpokladajme teda, že žiadne z uvedených šiestich vedení sa nepretínajú. Potom situáciu môžeme zjednodušene zakresliť takto:



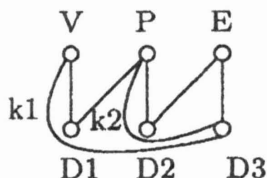
alebo takto:



Zakreslené vedenia nemusia byť také priame ako naše, podstatné je, že vytvoria uzavretý kruh. Tento kruh označíme k_1 . V dôkaze budeme pokračovať pre prípad, keď je vedenie D3-V pod vrcholom D1 (prvý obrázok). Dôkaz pre prípad na druhom obrázku by sa robil veľmi podobne.

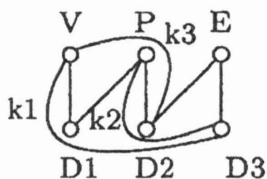
Všimnime si teraz, kde sa nachádza vedenie P-D3. Ak pretína niektoré vedenie z kruhu k_1 , dôkaz je ukončený, v tomto prípade sa vedenia pretínajú, takže to nebolo správne riešenie. Ostáva teda možnosť, že vedenie P-D3 nepretína kruh k_1 . Potom sa celé nachádza buď vo vnútri kruhu k_1 alebo mimo neho.

1. Ak sa nachádza celé vo vnútri kruhu k_1 , situáciu môžeme znázorniť nasledovne:



Vznikol ďalší uzavretý kruh P-D1-E-D3-P, označíme ho k_2 .

Pozrime sa ďalej, kde je vedenie V-D2. Ak pretína niektorý z kruhov k_1 , k_2 , dôkaz je hotový. Ak nepretína, musí byť zvonku kruhu k_1 , kde vytvorí ďalší kruh V-D1-P-D2-V, označíme ho k_3 :



A teraz si už stačí všimnúť posledné vedenie: E-D1. Ak toto vedenie začína smerom do kruhu k_2 , potom z tohto kruhu musí aj vyjsť a teda ho pretne. Ak začne smerom von vzhľadom na kruh k_2 , potom sa k vrcholu D1 môže dostať iba tak, že pretne kruh k_1 alebo k_3 .

Pre prípad 1.) je teda dôkaz hotový. Ostáva nám ešte 2. prípad, keď sa vedenie P-D3 nachádza mimo kruhu k_1 .

Jeho dôkaz je veľmi podobný ako bol dôkaz pre prvý prípad. Čitateľ, ktorý pochopil dôkaz pre prvý prípad, si už určite vie dôkaz pre druhý prípad dokončiť aj sám.

Ako vidíte, dôkaz nebol ťažký, ale ani triviálny. Asi by naozaj nebolo vhodné dávať ho do *Metodických pokynov*. Takisto je diskutabilné, či má tretiačik šancu takýto dôkaz skutočne pochopiť.

Jeho hlavná myšlienka nám však môže poslúžiť aj v triede. Bez toho, aby o tom vedela, ho použila aj Katka. V Jankinom riešení, ktoré sa „tvárilo“, že je správne, začala hľadať chyby a aj ich našla. Takisto učiteľ, ktorý je presvedčený, že úloha riešenie nemá, bude v každej „vyriešenej“ úlohe hľadať chyby.

Ostáva nám ešte prediskutovať otázku, kedy je splnený didaktický cieľ tejto úlohy. Najbližšie k jeho splneniu bola Majkina trieda. Od toho, že Majka suverénne prehlási *To sa nedá* je už iba krôčik k tomu, aby bola ochotná napísať *Táto úloha nemá*

riešenie. Stačí, aby pani učiteľka povedala, že k takémuto typu úlohy sa píše práve takáto odpoveď.

Najhoršie bola na tom trieda, kde boli Janka s Katkou. Katka, ktorá úlohu riešila správne, dostala červený otáznik. Pani učiteľka podcenila význam tejto úlohy. Didaktický cieľ tejto úlohy ostal nepovšimnutý.

Je ťažké povedať, prečo Mirkova pani učiteľka prijala riešenie, ktoré by sa dalo nazvať „podfukom“. Najskôr preto, že sama nebola presvedčená, že úloha ozaj nemá riešenie. Možné je ale aj to, že odpoveď *Úloha nemá riešenie* v jej očiach nie je riešením úlohy. V tomto prípade bol didaktický cieľ úlohy odmietnutý samotnou učiteľkou.

A čo s faktom, že tento dôkaz nie je vhodný pre tretiačikov? Myslím, že to nie je podstatné. Tretiaci ešte nie sú vo veku, keď potrebujú niečo dokazovať. Stačí, ak uveria. A dieťa, ktoré sa dve hodiny trápilo s hľadaním riešenia iste vďačne uverí, že riešenie neexistuje.

LITERATÚRA

- [1] Bero P., Pytlová Z., *Matematika pre 3. ročník ZŠ. Metodické poznámky 1. časť*, Orbis pictus Istropolitana, Bratislava, 1996.
- [2] Bero P., Pytlová Z., *Pracovný zošit 1. Matematika pre 3. ročník ZŠ*, Orbis pictus Istropolitana, Bratislava, 1996.
- [3] Harary F., *Graph Theory*, Addison – Wesley, Ontario, 1969.

RNDr. Erika Kupková, CSc.

Katedra základov matematiky a didaktiky matematiky UK Bratislava

Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

email: erika.kupkova@fmph.uniba.sk