Bernhard Kutzler

CAS jako pedagogické prostředky ve vyučování a učení se matematice (1)

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 2, 101–110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150822

CAS JAKO PEDAGOGICKÉ PROSTŘEDKY VE VYUČOVÁNÍ A UČENÍ SE MATEMATICE[5] (1)

Bernhard Kutzler

Abstrakt:

Systémy počítačové algebry (CAS) nás nutí přemýšlet o tom, CO učíme v matematice a JAK učíme matematiku. V tomto článku se zaměříme na to, JAK učíme matematiku vytvořením dvojstupňového modelu pro porozumění, kategorizaci a plánování využití technologie, zejména CAS, ve vyučování a učení se matematice. Nejprve se podíváme na dva druhy možné podpory: automatizaci a kompenzaci. Za druhé se podíváme na čtyři pedagogické přístupy k vyučování a učení matematice, které jsou posilovány při správném užití CAS: zjednodušení, experimentování, vizualizaci a koncentraci. Ve výše zmíněném modelu uvedeme metodu lešení (scaffolding) jako pedagogicky ověřený postup založený na střídavém využití technologie k dosažení určitých vyučovacích cílů.

(0) Úvod

V matematickém vyučování vyvolaly systémy počítačové algebry[6] celosvětovou diskusi o hodnotě a smyslu toho, co tradičně učíme v matematice. CAS nám ukázaly, že se ve výuce příliš soustředíme na zvládnutí dovedností, které může počítač snadno nahradit. Z toho důvodu nás CAS nutí přemýšlet o tom, CO učíme.

Existují tisíce cest jak používat CAS ve vyučování, dobré i špatné. Špatné či nevhodné přístupy často pocházejí od technických nadšenců z řad učitelů, kteří používají CAS už proto, že existují a že je možné je používat. Ale CAS by nikdy neměly určovat matematické obsahy, které učíme! Plně souhlasím s Helmutem Heuglem,[7] který řekl: „Jestliže použití CAS není ospravedlněno pedagogicky, je pedagogicky ospravedlněno CAS nepoužívat.“ Tedy CAS nás také nutí přemýšlet o tom, JAK učit.

---

[5] Z anglického originálu do češtiny přeložili A. Hošpesová a R. Hašek.

[6] Computer algebra systems – dále bude užívána běžná zkratka CAS.

[7] Helmut Heugl je ředitelem rakouského projektu Derive a TI-89/92, které zahrnují téměř 6 000 studentů.

Na CO jsme se již pokusili dát odpověď [17]. V tomto článku se zaměřujeme na to JAK. Ukážeme, jaké role mohou CAS hrát jako prostředky vyučování a učení se matematice. Náš přístup je striktně řízen matematickými cíli, tj. jsme zastánci pedagogického ospravedlnění použití CAS. Mnoho z následujících myšlenek je možno aplikovat i na jiné prostředky (např. grafické kalkulátory).

(1) Prostředky I: Automatizace a kompenzace
Albert Einstein v přednášce pro pedagogy v roce 1936 použil tuto pozoruhodnou analogii: „*Jestliže cvičí mladý člověk své svaly a fyzickou odolnost gymnastikou a chůzí, bude později vybavený pro každou fyzickou práci. To je analogické cvičení myšlení a procvičování duševních a manuálních dovedností.*" ([6])

Sleduje tuto analogii začnu pohledem na dvě disciplíny – *matematiku* (jako intelektuální aktivitu) a *pohyb a dopravu* (jako fyzickou aktivitu) – a porovnám role, jaké v nich hrají technologie. K tomuto porovnání mě inspiroval Frank Demana.

Nejjednodušším způsobem přemísťování je *chůze*. Chůze je fyzická aktivita dosahovaná pouhou svalovou silou. Odpovídající činností v matematice je *počítání zpaměti* (v aritmetice i v algebře). *Počítání zpaměti vyžaduje jen „sílu myšlenky" (brain power).*

Jízda na kole je přemísťováním, při kterém používáme mechanické zařízení pro efektivnější využití síly našich svalů. V porovnání s chůzí se můžeme pohybovat na větší vzdálenosti nebo rychleji. Odpovídající činností v matematice je *písemné počítání.* Použití papíru a tužky jako „vnější paměti" nám dovoluje využívat sílu našeho mozku efektivněji.

Dalším způsobem pohybu je *řízení auta.* Auto je zařízení, které vytváří pohyb. Řidič téměř nepotřebuje svalovou sílu na řízení, zato potřebuje nové dovednosti: musí být schopen nastartovat motor, zrychlit, řídit směr, zastavit, znát pravidla atd. Odpovídající aktivitou v matematice je *počítání na kalkulátoru nebo počítači.* Kalkulátor (počítač) vydává výsledky, zatímco uživatel musí znát, jak ho ovládat a který knoflík stisknout v určité situaci.

Který způsob přemístění má smysl v určité situaci? Jestliže někoho požádáme, aby obstaral dnešní noviny ze stánku vzdáleného 150 m, pravděpodobně půjde pěšky. V případě, že novinový stánek je vzdálen 1 000 m, je jízdní kolo nejrozumnějším dopravním prostředkem. V případě, že je vzdálenost k obchodu 10 mil, je vhodné použít auto. Zvláště když máme na přinesení novin jen půlhodinu. V matematice je smysluplné použití technologií následující: násobení dvou jednociferných čísel je nejlépe provádět zpaměti, dvouciferná čísla můžeme dobře násobit písemně, zatímco pro součin dvou sedmiciferných čísel bude rozumnější použít kalkulátor.

Je možné namítnout, že mnoho žáků použije kalkulátor i pro získání součinu čísel 7 a 9, protože už ztratili dovednost počítat zpaměti. To je případ nevhodného použití technologie, který není specifický jen pro matematické vyučování, ale dochází k němu ve všech oblastech. Někteří lidé používají auto i na překonání vzdálenosti 150 m k novinovému stánku. Ti, kteří to dělají, poškozují sebe (nedostatkem tělesného cvičení) a životní prostředí.

Navzdory nadužívání aut nepožadujeme jejich likvidaci. Stejně bychom se neměli zbavovat kalkulátorů a počítačů proto, že někteří studenti je budou užívat nevhodně. Stejně jako jsme potřebovali (a potřebujeme) vytvořit obecné povědomí o tom, že fyzická cvičení jsou důležitá pro fyzickou kondici a zdraví, potřebujeme vytvořit obecné povědomí o tom, že mentální cvičení (jako je počítání zpaměti) jsou důležitá pro dobré duševní zdraví a kondici. Nicméně je jasné, že nestačí přesvědčovat studenty, aby dělali jednoduché výpočty ručně. Existuje jednoduchá a elegantní metoda takového posílení. Jednoduše rozdělíme zkoušku na dvě části, povinná část a volitelná (freestyle) část. To je analogické krasobruslení, při němž sportovec dostává dvě nezávislá bodová hodnocení, jejichž součet určuje výsledné pořadí. V povinné části matematické zkoušky budeme zkoušet mentální dovednosti bez technologie, dokonce bez kalkulačky se čtyřmi početními výkony. V části „volno-stylové" se zaměříme na dovednost řešit problémy a studenti mohou užívat jakýkoliv technický prostředek, zejména CAS. Více o tom najde čtenář v článcích [16], [17] a [8].

Pokračujme v naší analogii. Co se stane, jestliže osoba, kterou jsme požádali, aby nám přinesla noviny ze stánku, nemůže pořádně chodit, protože je fyzicky handicapovaná nebo má zlomenou nohu? Ujít 150 m může pro ni být velmi obtížné, ne-li nemožné. Existují prostředky, které mohou takovým lidem pomoci, např. kolečkové křeslo. Použití kolečkového křesla je způsob pohybu, který je podporován technologií kompenzující fyzickou slabost. Slabiny se objevují také v duševní činnosti. Ukážu to na příkladu z matematického vyučování. Student s chatrnými znalostmi řešení soustav lineárních rovnic bude považovat za velmi obtížné, ne-li nemožné, řešit úlohy z analytické geometrie jednoduše proto, že řešení soustav lineárních rovnic je úlohou, na kterou se často narazí v analytické geometrii. Není to jen lidské, je to i naše pedagogická povinnost poskytnout studentům „matematicky handicapovaným" prostředek, který kompenzuje jejich slabiny (tj. nechme studenty řešit soustavy rovnic stisknutím tlačítka). Jen potom budou mít studenti šanci dělat analytickou geometrii navzdory svým slabinám. Je to spravedlivé!

Pohyb a doprava* *(fyzická aktivita)	***Matematika* *(intelektuální aktivita)***
chůze	počítání zpaměti
jízda na kole	písemné počítání
řízení auta	kalkulátor/počítač (automatizace)
používání kolečkového křesla	kalkulátor/počítač (kompenzace)

Jak ukážeme později na příkladech, mohou být kalkulátory a počítače výbornými kompenzačními prostředky, které umožňují matematicky handicapovaným studentům zabývat se obtížnějšími tématy. Konečným cílem matematického vyučování je samozřejmě odstranit všechny slabosti v dovednostech, které jsou považovány za podstatné. CAS nás nutí znovu posoudit, které dovednosti považujeme za podstatné (viz [8]). Fyzicky handicapovaná osoba nepotřebuje být spojena s kolečkovým křeslem po zbytek svého života. Lékař se bude snažit individuální terapií napravit pacientovo fyzické omezení, jak to jen bude možné. Podobně se má učitel snažit napravit žákovu slabost vhodnou individuální terapií. V obou případech ulehčíme „pacientův denní život s handicapem", tj. čas mimo terapii, ať už je to nakupování nebo analytická geometrie, poskytnutím vhodných kompenzačních prostředků jako jsou kolečkové křeslo nebo kalkulátor/počítač.

Automatizace a kompenzace jsou dva nejjednodušší principy podpory, které může jakýkoliv prostředek poskytnout. Existují na obecné úrovni a nejsou specifické jen pro vyučování a učení, ale platí i pro použití CAS. Trend je takový, že CAS slouží jako prostředek automatizace pro „dobré“ studenty a jako prostředek kompenzace pro „matematicky handicapované“ studenty. Jestliže učíme matematiku různě, co se týče obsahu a stylu, rozdělení na „dobré“ a „handicapované“ studenty bude nejspíš rozdílné.

Úkolem učitelů je vést studenty procesem jejich učení. Mají pedagogickou povinnost používat cokoliv vhodného pro podporu procesu učení. Použití prostředků kompenzace je naléhavější, protože tak můžeme pomoci matematicky slabým studentům. Pro ně je šance podstatně důležitější než pro ty, kteří si vedou dobře.

(2) Prostředky II: Zjednodušení, experimentování, vizualizace a koncentrace

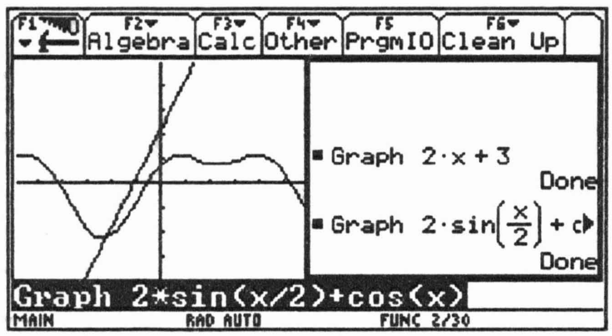
Dostáváme se k roli technologií ve vyučování a učení. V další části ukážeme a zdůvodníme, jak je možné používat technologií, zejména CAS, jako pedagogických prostředků ve čtyřech přístupech k matematickému vyučování a učení: zjednodušení, experimentování, vizualizaci a koncentraci.

(2.1) Zjednodušení

Auto rozšířilo „horizont našeho pohybu a dopravy“ tím, že zjednodušilo pohyb na určité vzdálenosti. Podobně kalkulátor rozšiřuje náš „početní horizont“.

Vzpomeňte na „zlaté dny“ před vědeckými kalkulátory, kdy úlohy ke zkouškám nebo za domácí úkol musely být vybírány velmi pečlivě tak, aby mezivýsledky a konečné výsledky byly „hezké“. „Hezký“ výsledek bylo celé číslo, jednoduchý zlomek, nebo jednoduchá odmocnina, která často později během výpočtu opět zmizela. To bylo důležité, jinak by student mařil většinu svého času výpočtem. S vědeckým kalkulátorem je možné násobit dvě sedmiciferná čísla stejně rychle jako dvě jednociferná. Vědecký kalkulátor zjednodušuje provádění aritmetických operací.

Nakreslit graf lineární funkce (např. $y = 2x + 3$) je jednoduché, pokud znáte geometrický smysl obou koeficientů. K vytvoření správného grafu stačí jen tužka, pravítko a trochu talentu. Nakreslit graf funkce $y = 2\sin\frac{x}{2} + \cos x$ je mnohem obtížnější a vytvoření správného grafu vyžaduje určitý stupeň kreslířského talentu. S grafickým kalkulátorem je možné znázornit graf obou funkcí za stejný čas i se stejným talentem. Grafický kalkulátor zjednodušuje vytváření grafů. (Viz obr. 1 – obrazovka TI-92.)



Obr. 1

Výpočet první derivace $y = x^2$ je jednoduchý, když znáte pravidlo o derivování mocnin. Určit první derivaci funkce

$$y = \ln|\sin(\cos(\mathrm{tg}\sqrt{x^2 - x + 1}))|$$

dá hodně práce i dobrému matematikovi. Kalkulátor může zvládnout oba příklady za sekundy. Algebraický kalkulátor zjednodušuje algebraické (symbolické) výpočty. (Viz obr. 2 – obrazovka programu Derive 5.)

#2: $\frac{d}{dx}\,\mathrm{LN}(|\mathrm{SIN}(\mathrm{COS}(\mathrm{TAN}(\sqrt{x^2 - x + 1})))|)$

#3: $\frac{(1 - 2\cdot x)\cdot\mathrm{SIN}(\mathrm{TAN}(\sqrt{x^2 - x + 1}))\cdot\mathrm{COT}(\mathrm{COS}(\mathrm{TAN}(\sqrt{x^2 - x + 1})))}{2\cdot\sqrt{x^2 - x + 1}\cdot\mathrm{COS}(\sqrt{x^2 - x + 1})^2}$

Obr. 2

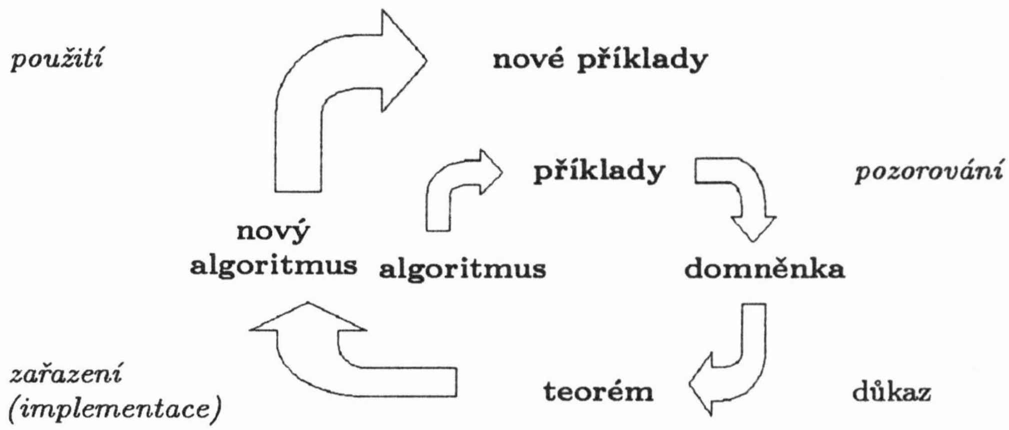
Významným článkem o zjednodušení algebraických výpočtů ve vyučování matematice je Buchbergerův článek [2] o principu „bílých a černých skříněk“.

Dopravní a „přemísťovací“ úkoly, které byly považovány dříve za obtížné, jsou nyní řešeny rutinně auty a jinými dopravními prostředky. Stejně tak použití CAS ve vyučování znamená, že se můžeme zabývat *komplexnějšími* a *realističtějšími* problémy.

To je jeden aspekt použití CAS, podle mého názoru ten nejméně důležitý.

(2.2) Experimentování

Jak byly objeveny všechny dosud známé matematické poznatky a jak nalezneme další? Podle jedné z gnozeologicky orientovaných teorií je možné vizualizovat hlavní kroky těchto objevů následovně. Použitím známých algoritmů vytvoříme *příklady*. Na příkladech pozorujeme vlastnosti, které induktivně vyjádříme jako *domněnku*. Důkazem domněnky získáme *teorém*, tj. zaručenou vědomost. Algoritmicky použitelná část teorému je *realizována* v novém *algoritmu*. Tento algoritmus *je použit* na nová data a poskytne nové příklady, které vedou k novým pozorování a domněnkám, ...

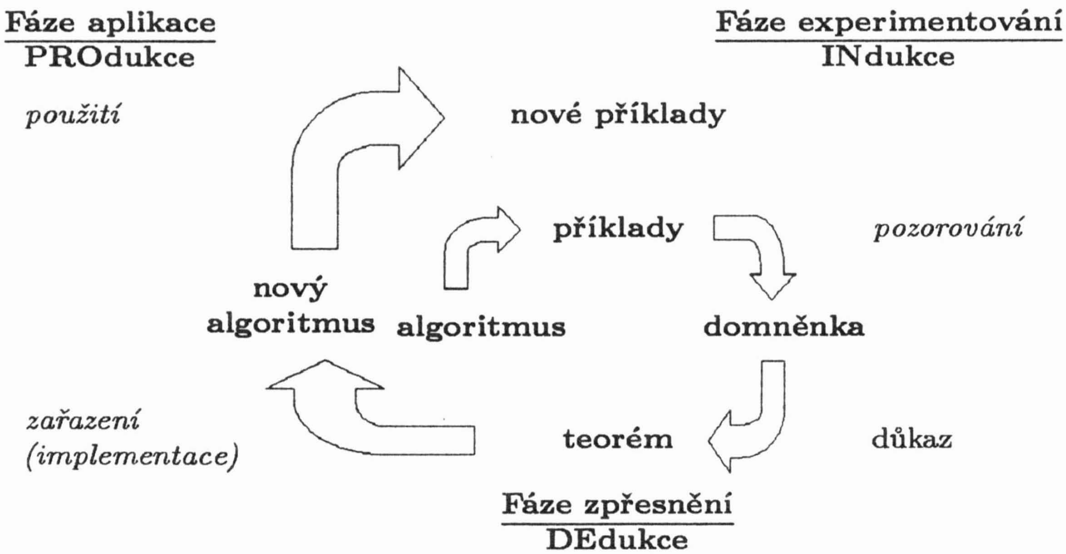


Obr. 3

Obrázek spirály (obr. 3), který ukazuje cestu objevování (matematických) vědomostí, byl navržen Brunem Buchbergerem. Podrobný popis Buchbergerovy spirály tvořivosti a odkazy na příbuzné modely je možné najít v článku [9]. Pro účely tohoto článku budeme interpretovat Buchbergerovu spirálu kreativity celkově a obecně jako proces vytváření matematických vědomostí. Může být také považována za vizualizaci (induktivního) pojmu vývojového procesu podle konstruktivistického Piagetova přístupu ([18], [19]).

V této spirále lze rozlišit tři fáze. Ve fázi *experimentování* je používán známý algoritmus na vytváření příkladů, pak pozorováním získáme domněnku. Během fáze *zpřesňování* se domněnka důkazem mění v teorém a algoritmicky použitelný poznatek se stává novým algoritmem. Během fáze *aplikace* se algoritmus používá na skutečná a fiktivní data. Řešení skutečných problémů napomáhá zvládnutí či usnadnění života, zatímco řešení fiktivních problémů slouží k zábavě a rozptýlení (např. hádanky) nebo k nalezení nových poznatků (např. k uspokojení vědecké zvídavosti).

Tyto tři fáze mohou být elegantněji označeny jako INdukce, DEdukce a PROdukce. Platí to pro obě interpretace Buchbergerovy spirály kreativity. (Ačkoliv je Piagetův pojem vývojového procesu induktivní jako celek, zahrnuje induktivní, deduktivní i produktivní podprocesy.)



Obr. 4

Ve svých začátcích byla matematika experimentální vědou, tj. skládala se jen z experimentální a aplikační fáze. Pak v ní Řekové podobně jako ve filozofii použili deduktivní metodu (tj. přidali fázi zpřesnění) a vybudovali matematiku jako deduktivní vědu. „Nedávno" skupina kolem francouzského matematika Dieudonné (známá pod jménem „Bourbaki") nastrukturovala matematické vědomosti užitím systému „definice-teorém-důkaz-důsledek, ...". Tento bourbakistický systém, vytvořený pro účely vnitřní komunikace v matematice, zahrnuje jen fáze zpřesnění a aplikace. Stal se charakteristický pro moderní matematiku. Bourbakismus se později zabydlel ve vyučování a učení. Stalo se běžným vyučovat matematiku deduktivně tak, že se matematické poznatky prezentují a požaduje se, aby se je studenti učili a používali je pro řešení matematických úloh. Ale to je vysoce nepřirozené! Většina současných psychologických teorií považuje učení za induktivní proces, ve kterém experimentování hraje klíčovou roli. Proto Freudenthal žádal: „Neměli bychom učit žáky to, co mohou objevit sami." ([7]).

Těžko by mohl některý matematik na této planetě při svém výzkumu postupovat způsobem, který požadujeme po studentech při jejich pronikání do matematiky. Přitom žák musí „lokálně" vytvářet svůj malý „dům matematiky", zatímco vědec dělá to samé „globálně", tj. v mnohem větším měřítku. Pro vědce i studenta se podstatná část získávání vědomostí uskutečňuje experimentováním. Z tohoto pohledu je stále pochopitelnější, proč je takové množství žáků na kordy s matematikou. Je třeba požadovat, aby experimentování získalo svou náležitou pozici ve vyučování matematice. Experimentování by mělo doplnit tradiční metody vyučování, ne je nahradit! Toto není výzva k návratu k egyptské experimentální matematice, ale prosba, aby se ve vyučování matematice procházelo všemi třemi fázemi výše zmíněné spirály.

Je pochopitelné, že v rámci současných osnov je ve třídách stěží možné nějaké experimentování. Experimentování prováděné tužkou na papíře je časově náročné a potýkáme se při něm s chybami. V čase, který je ve škole k dispozici, studenti mohou vyřešit jen malý počet příkladů, při nichž pozorují a objevují. Značné množství z nich bude pravděpodobně chybně vyřešeno kvůli chybám ve výpočtech. Z několika částečně chybných příkladů nemůžete nic vypozorovat! Podívejme se na typický příklad z geometrie. Řekněme, že chceme naučit studenty, že se v každém trojúhelníku výšky protínají v jednom bodě. Požádáme je, aby nakreslili pět trojúhelníků a sestrojili v každém všechny tři výšky. Co se stane? Většina našich studentů špatně rýsuje a může tak zjistit, že výšky tří nebo čtyř z našich pěti trojúhelníků se neprotínají v jednom bodě. A to by je mělo přesvědčit, že toto je pravdivý geometrický teorém ...?!

Od nynějška CAS a podobné prostředky (např. software dynamické geometrie) umožňují, aby studenti experimentovali v téměř všech matematických tématech, která se učí. Studenti mohou řešit řadu příkladů v krátkém čase a elektronická podpora zaručuje správnost výsledků. Co se týče podpory, historické záznamy říkají, že velcí matematici jako Carl Friedrich Gauss zaměstnávali dav lidských „kalkulátorů“, bez nichž by nezískali většinu ze svých nejznámějších výsledků.

Johann Wolfgang Goethe požadoval „učení prostřednictvím činnosti a pozorování“, což je přesně „fáze experimentování“ z výše zmíněného schématu. Použitím CAS je možné Goethův požadavek splnit.

Dokončení příště

Bernhard Kutzler
ACDCA (Rakouské centrum pro didaktiku počítačové algebry)
Hasnerstrasse 9/10
A-4020 Linz (Austria)
e-mail: b.kutzler@eunet.at