Učitel matematiky

Jaromír Šimša

Geometrie geometrických posloupností

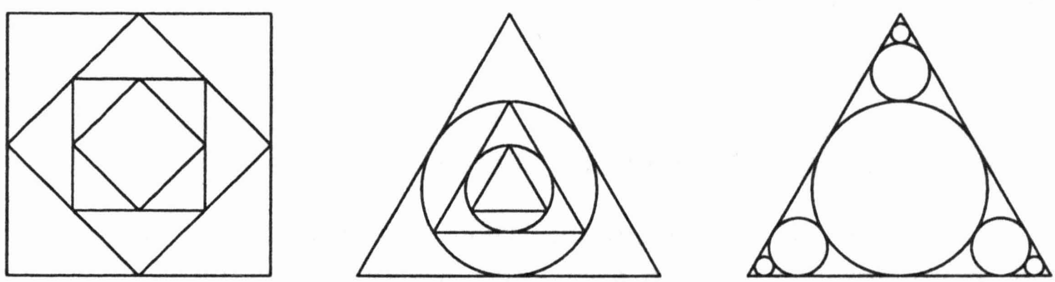
Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 2, 65–73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150844

GEOMETRIE GEOMETRICKÝCH POSLOUPNOSTÍ

Jaromír Šimša

Změříme-li v několika stejných časových odstupech hodnoty některé veličiny, jež pravidelně roste či ubývá, vytvoří naměřená čísla v nejjednodušších případech *aritmetickou* nebo *geometrickou* posloupnost. Proto jsou oba zmíněné druhy posloupností tradičním tématem středoškolské matematiky. Při jeho výuce se zaměřujeme na to, aby žáci bezpečně ovládli „kalkulus" těchto posloupností (založený na různých vzorcích pro jejich členy či jejich součty) a aby se naučili tyto vztahy užívat v praktických situacích; v případě geometrických posloupností jde především o náměty z finanční matematiky (viz [2]). Pouze okrajově předkládáme žákům úlohy o posloupnostech geometrických útvarů, které jsou navzájem podobné a svým umístěním vytvářejí „ornamenty", jaké kupříkladu vidíte na následujícím obrázku.



V tomto příspěvku ukážeme, že obvyklý (ryze algebraický) výklad základních vlastností geometrických posloupností lze obohatit o geometrické interpretace, které mohou přispět k větší názornosti a přitažlivosti výuky. Věříme, že netradiční obrázky zaujmou nejen učitele, kteří po řadu let uvykli vyučovat dané téma ustáleným (učebnicovým) postupem, ale i jejich zvídavé žáky. Se stejným záměrem byl připraven i dřívější příspěvek [3].

Jak víme, číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *geometrická*, existuje-li takové reálné číslo q, že pro každé přirozené n platí rovnost $a_{n+1} = a_n \cdot q$; číslu q pak říkáme *kvocient* dané posloupnosti. Taková posloupnost je určena prvním členem a_1 a kvocientem q; její obecný člen a_n má vyjádření $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Z dalších úvah vyloučíme nezajímavou situaci, kdy $a_1 = 0$ nebo $q = 0$. Pokud platí $a_2 \neq 0$ (tedy $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$), není žádný člen a_n dané geometrické posloupnosti roven nule; přitom posloupnost nenulových čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická, právě když pro každé přirozené n platí úměra

$$a_{n+2} : a_{n+1} = a_{n+1} : a_n. \tag{1}$$

Změníme-li znaménko prvního členu geometrické posloupnosti, změní se znaménka všech jejích dalších členů; s ohledem na zamýšlené konstrukce budeme proto předpokládat, že první člen a_1 je *kladné číslo* (které pro jednoduchost označíme a). Nebudeme se však vyhýbat geometrickým posloupnostem se *záporným kvocientem*, který (namísto obvyklého q) označíme $-q$. Libovolná posloupnost s kladným kvocientem tedy bude mít členy

$$a_1 = a,\ a_2 = aq,\ a_3 = aq^2,\ a_4 = aq^3,\ a_5 = aq^4, \ldots, \tag{2}$$

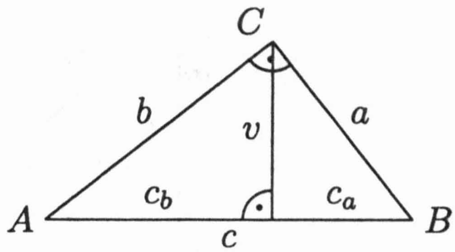
zatímco členy posloupnosti se záporným kvocientem budou čísla

$$a_1 = a,\ a_2 = -aq,\ a_3 = aq^2,\ a_4 = -aq^3,\ a_5 = aq^4, \ldots; \tag{3}$$

písmena a, q v obou případech označují kladná čísla.

Jaký je původ názvu „geometrická posloupnost“? Pro odpověď se musíme přenést do antického Řecka, jehož matematikové vyjadřovali veškerá kladná (racionální i iracionální) čísla délkami úseček a jejich poměry (o příslušné *Eudoxově teorii proporcí* viz např. [1] nebo [4]). Uveďme jeden příklad.

Známé Eukleidovy věty o výšce a odvěsně pravoúhlého trojúhelníku jsme pod obrázkem zapsali nejen obvyklými „kvadratickými“ rovnostmi, ale též úměrami, jež v jazyce Eukleidových *Základů* znamenají, že každá z trojic (c_a, v, c_b) a (c_a, a, c) tvoří *geometrickou úměru o třech členech.* V dnešní terminologii bychom



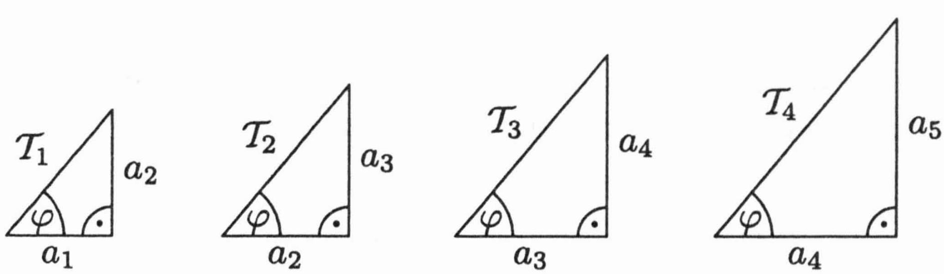
$$v^2 = c_a \cdot c_b \qquad\qquad a^2 = c_a \cdot c$$

$$c_a : v = v : c_b \qquad\qquad c_a : a = a : c$$

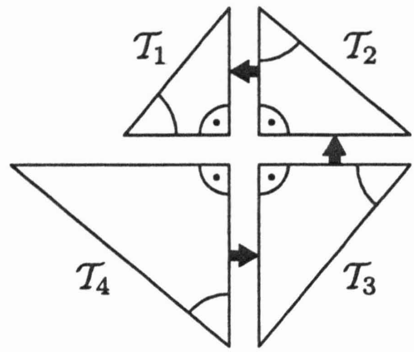
podle pravidla (1) spíše řekli, že jde o *trojčlenné geometrické posloupnosti.* I když se starořečtí matematikové často zabývali pouze geometrickými úměrami o třech nebo čtyřech členech, položili tím pevné základy budoucí teorie geometrických posloupností o libovolném (dokonce nekonečném) počtu členů.

Inspirováni Eukleidovými větami o pravoúhlém trojúhelníku se nyní podíváme, do jaké rovinné „konfigurace" lze výhodně uspořádat posloupnost úseček, jejichž délky tvoří předem danou geometrickou posloupnost (2). Z rovností $a_{n+1} : a_n = q$, $n = 1, 2, \ldots$, plyne, že pravoúhlé trojúhelníky $\mathcal{T}_n$ s dvojicemi odvěsen (a_n, a_{n+1}) jsou všechny navzájem podobné. Tyto trojúhelníky nás budou v dalším textu neustále provázet; označíme symbolem φ ten jejich ostrý vnitřní úhel, který je určen rovností

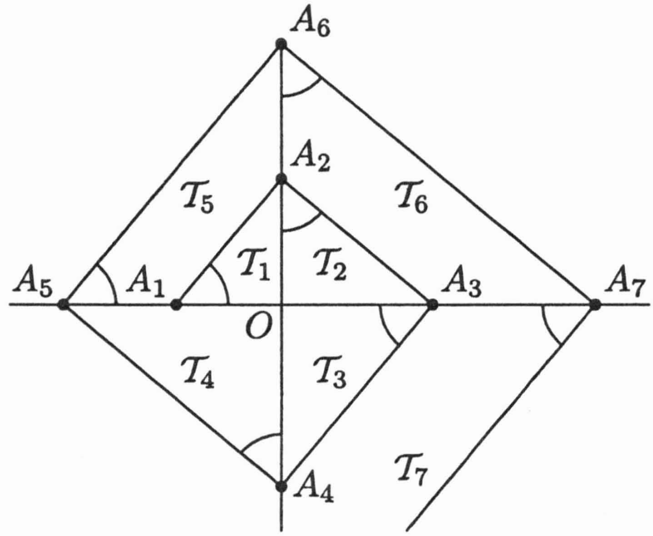
$$\varphi = \operatorname{arctg} q = \operatorname{arctg} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$



Při první konstrukci trojúhelníky $\mathcal{T}_n$ postupně „slepíme" podél shodných odvěsen způsobem patrným z dalšího obrázku (pro přehlednost jsou na něm nakresleny pouze první čtyři trojúhelníky):



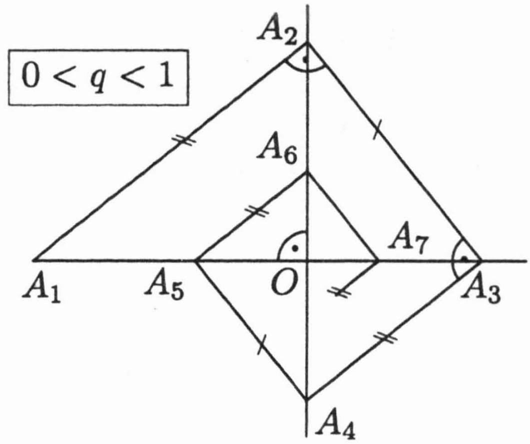
Protože jsme zvolili případ $q > 1$, tak po slepení trojúhelník $\mathcal{T}_5$ překryje trojúhelník $\mathcal{T}_1$, trojúhelník $\mathcal{T}_6$ překryje trojúhelník $\mathcal{T}_2$ atd.

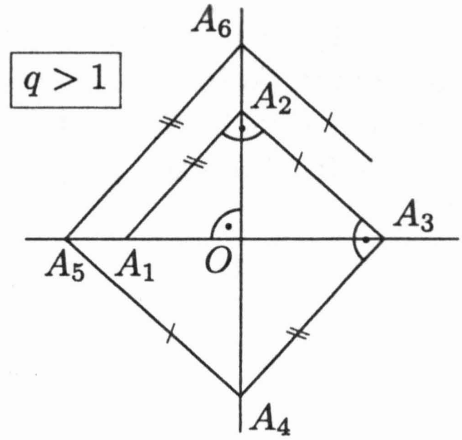


Všechny slepené trojúhelníky mají společný vrchol označený písmenem O, jejich přepony vytvářejí „pravoúhle lomenou" čáru $A_1A_2A_3\dots$, která se „navíjí" na dvě navzájem kolmé přímky. Zdůrazněme, že zmíněnou lomenou čáru $A_1A_2A_3\dots$ snadno sestrojíme (postupnou konstrukcí „následných" kolmic), stačí jen znát její první dva vrcholy A_1, A_2 určené podmínkami

$$|OA_1| = a_1 = a \quad \text{a} \quad |OA_2| = a_2 = aq.$$

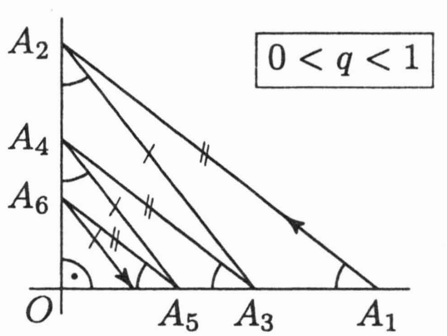
Prohlédněte si na dalším obrázku, jak se lomená čára $A_1A_2A_3\dots$ „svinuje", respektive „rozvíjí" podle toho, zda $0 < q < 1$ či $q > 1$.

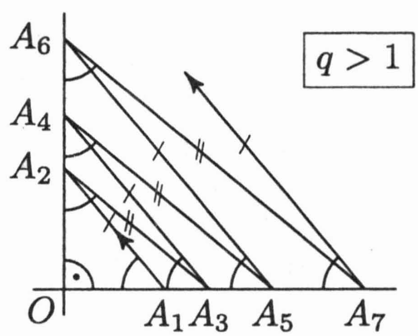




$$|OA_n| = aq^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Lomenou čáru $A_1A_2A_3\dots$ jiného druhu dostaneme, když trojúhelníky $\mathcal{T}_n$ slepíme podél společných odvěsen nikoliv „vedle sebe“, ale „přes sebe“:





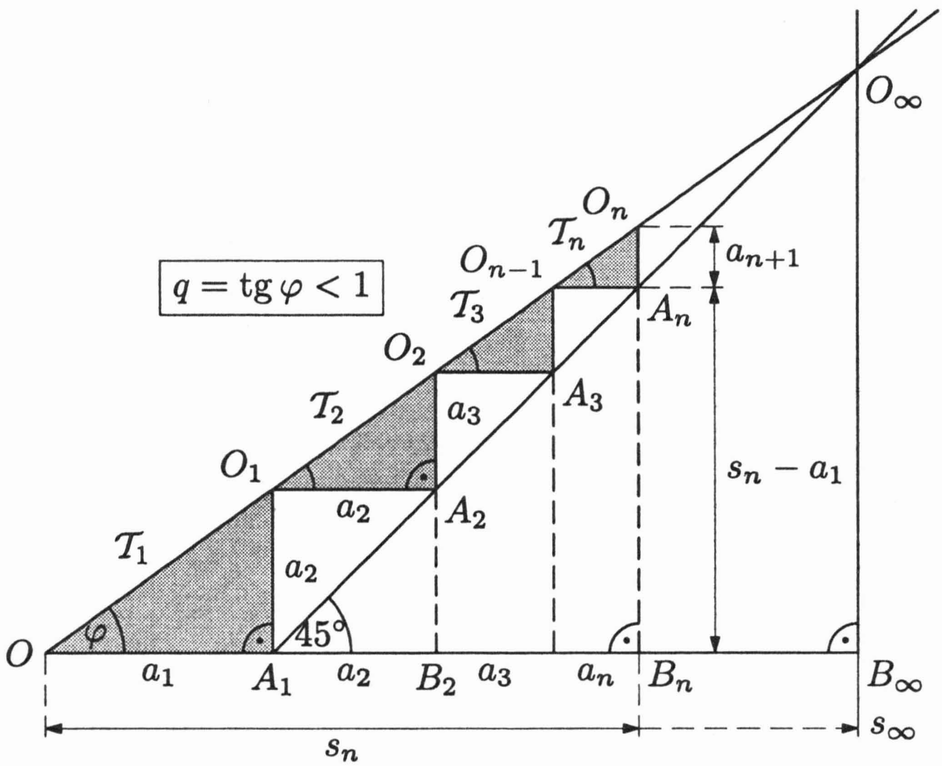
(Obloučky jako dříve vyznačují shodné úhly velikosti $\varphi = \operatorname{arctg} q$.) Přejdeme nyní ke geometrickému posouzení otázky, která je v celém tématu geometrických posloupností snad nejdůležitější. Jedná se o výpočet součtu

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

prvních n členů dané posloupnosti; za předpokladu $q \neq 1$ odvodíme vzorec

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{4}$$

Podotkněme nejdříve, že dosud sestavené lomené čáry $A_1A_2A_3\dots$ nejsou ke sčítání délek $aq^{n-1} = |OA_n|$ příliš uzpůsobené, neboť úsečky OA_1, OA_3, OA_5,... a úsečky OA_2, OA_4, OA_6,... leží ve dvou různých (kolmých) směrech. Objevíte vhodnější umístění základních trojúhelníků $\mathcal{T}_n$, kdy příslušné odvěsny OA_n mají týž směr a jejich projekce na přímku tohoto směru na sebe „navazují“?

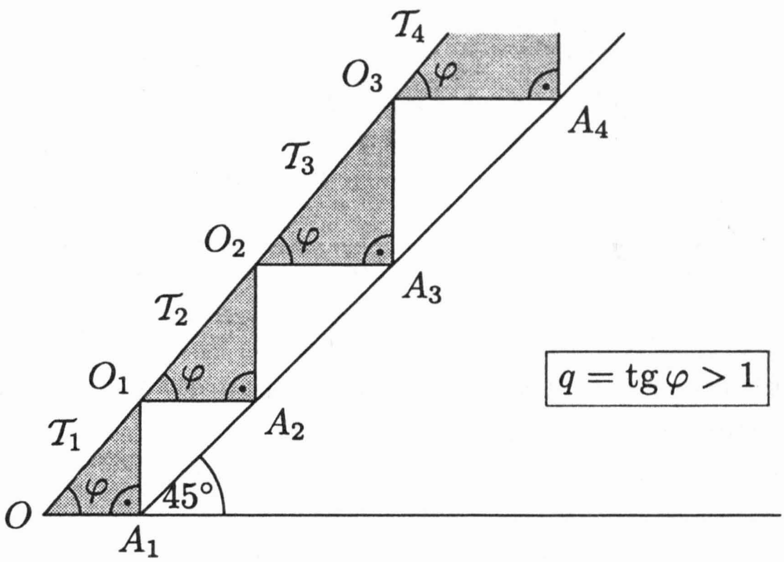


Podle takového obrázku je možné odvodit součtový vzorec (4) názorně a snadno. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku $A_1B_nA_n$ mají shodné délky $|B_nA_n| = |B_nA_1| = a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_n - a_1$, takže $|B_nO_n| = |B_nA_n| + |A_nO_n| = (s_n - a_1) + a_{n+1}$, zároveň však z trojúhelníku OB_nO_n vidíme, že $|B_nO_n| = |OB_n| \cdot \operatorname{tg}\varphi = s_n \cdot q$; porovnáním vychází rovnost $(s_n - a_1) + a_{n+1} = s_n \cdot q$, neboli $s_n(q-1) = a_{n+1} - a_1 = a(q^n - 1)$, odkud již plyne (4).

Vzorec (4) jsme odvodili geometrickou cestou v situaci, kdy (kladný) kvocient q dané posloupnosti splňuje podmínku $q < 1$; z našeho obrázku je rovněž dobře vidět, že posloupnost hodnot s_n má v tomto (konečnou) limitu $s_\infty = |OB_\infty|$. Podobně jako dříve získáme rovnici $s_\infty - a_1 = s_\infty \cdot q$, ze které okamžitě plyne vzorec pro *součet geometrické řady*

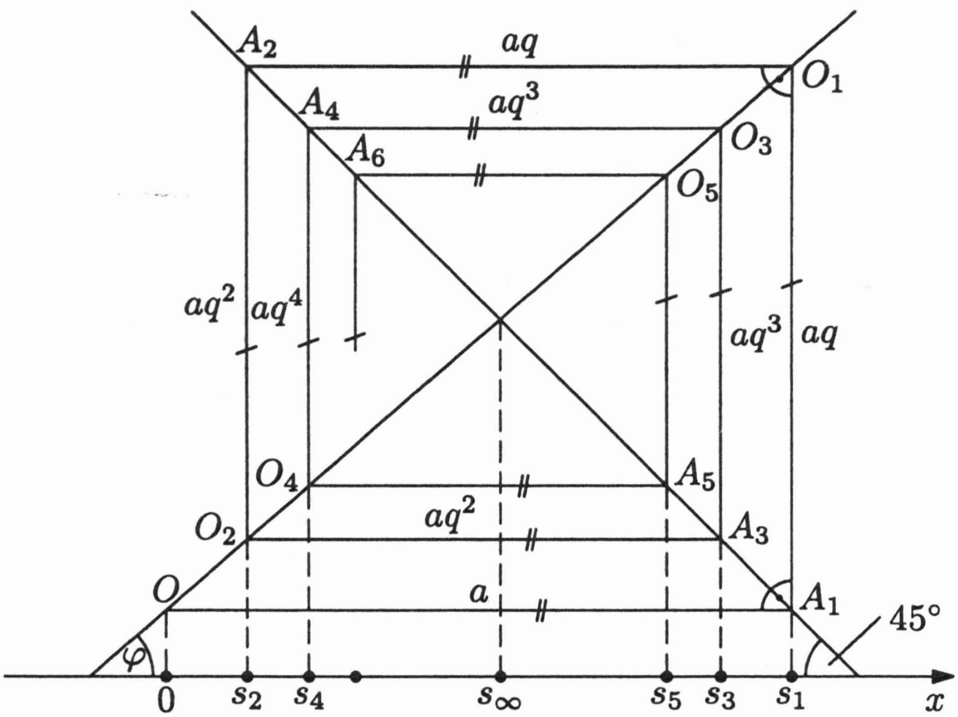
$$s_\infty = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \frac{a}{1-q}. \tag{5}$$

Uvědomte si, že naše odvození vzorce (4) je možno beze změny přenést i na případ $q > 1$, kdy se však polopřímky OO_1 a A_1A_2 „rozbíhají", takže posloupnost hodnot s_n diverguje.



Ukázali jsme, že ke sčítání členů a_n geometrické posloupnosti s *kladným* kvocientem lze využít „pravoúhle lomenou" čáru $OA_1O_1A_2O_2\ldots$, jejíž jednotlivé úseky mají délky a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, … a směřují střídavě „doprava" a „nahoru".

Členy a_n geometrické posloupnosti se *záporným* kvocientem mění pravidelně znaménka tak, jak je uvedeno v zápise (3). Můžeme je geometricky sečíst na *číselné ose*, sestrojíme-li vhodně obměněnou lomenou čáru $OA_1O_1A_2O_2\ldots$, jejíž úseky budou mít stejné délky jako dříve, budou však směřovat střídavě „doprava", „nahoru", „doleva" a „dolů". Prohlédněte si nejprve obrázek pro posloupnost (3) se záporným kvocientem $-q$ v situaci, kdy $q < 1$. Uvidíte v něm opět „slepenec" trojúhelníků $\mathcal{T}_n$, které jsme tentokrát nevyznačili?



Body O, O_1, O_2,... a body A_1, A_2, A_3, ... tvoří (stejně jako dříve) dvě skupiny kolineárních bodů a přímky jimi určené svírají s osou x úhly $\varphi = \operatorname{arctg} q$, respektive 45°. Na ose x jsme vyznačili několik prvních součtů s_n, které jsou nyní tvaru

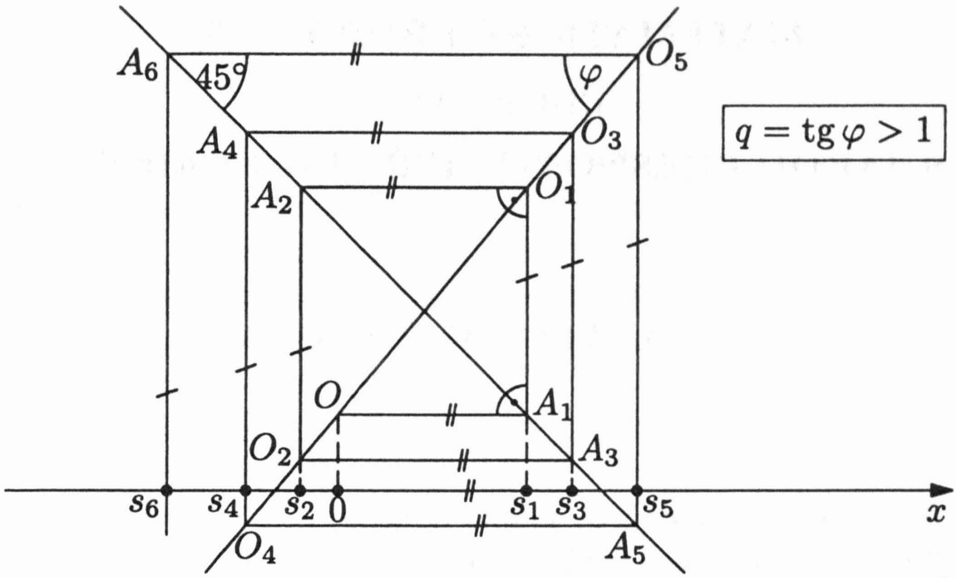
$$s_n = a - aq + a^2 - aq^3 + \cdots + (-1)^{n-1}aq^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Obdobně jako dříve zdůvodníme, proč pro každé n platí rovnost $(a - s_n) - (-1)^n aq^n = s_n \cdot q$, z níž plyne vzorec

$$s_n = \frac{a\bigl(1 - (-q)^n\bigr)}{1 + q}, \tag{6}$$

který je shodný se vzorcem (4), když zaměníme q za $-q$. Dále je dobře patrné, že posloupnost hodnot s_n konverguje ke konečné hodnotě s_∞, která dle obrázku vyhovuje rovnici $s_\infty \cdot q = a - s_\infty$, takže součet s_∞ je opět dán vzorcem (5) po záměně q za $-q$.

Zbývá ještě uvést obrázek s lomenou čáru $OA_1O_1A_2O_2\ldots$ pro posloupnost se záporným kvocientem $-q$ v případě, kdy $q > 1$.



Na odvození vzorce (6) pro součty s_n se nic oproti předchozímu nemění; posloupnost součtů s_n má však nyní dva hromadné body, neboť pro $k \to \infty$ platí $s_{2k-1} \to \infty$ a $s_{2k} \to -\infty$.

Na závěr děkuji dvěma přátelům: Karlu Horákovi za nakreslení obrázků a Jindřichu Bečvářovi za připomínky k původnímu textu příspěvku.

Literatura

[1] Bečvář J., *Hrdinský věk řecké matematiky II*, Historie matematiky II, Dějiny matematiky sv. 7, Prometheus, Praha, 7–28, 1997

[2] Odvárko O., *Posloupnosti a řady*, Matematika pro gymnázia, Prometheus, Praha, 1995

[3] Šimša J., *Jednotné důkazy „kvadratických" vět o trojúhelníku*, *Učitel matematiky* **11**(2002), 11–15

[4] Šimša J., *Vývoj představ o reálných číslech*, Matematika v 16. a 17. století, Dějiny matematiky sv. 12, Prometheus, Praha, 1999, 259–282