Jana Pradlová
Rovinné mozaiky aneb Keplerova harmonie světa

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 2, 84–97

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150892

JOHANNES KEPLER.

ROVINNÉ MOZAIKY
aneb
KEPLEROVA HARMONIE SVĚTA

JANA PRADLOVÁ

Johanna Keplera[10] (viz obr. 1 na str. 84) známe především díky jeho třem zákonům o drahách planet obíhajících kolem Slunce[11], někdo si navíc ještě vzpomene, že byl vynálezcem jednoho z typů dalekohledu[12], jiný spojí jeho jméno s horoskopy pro Albrechta z Valdštejna. Málo se však ví o jeho výzkumech v oblasti rovinných mozaik. S nimi se můžeme seznámit v jeho latinsky psaném díle *Harmonice Mundi* [3], které vyšlo r. 1619 v Linci. Druhá kniha spisu se jmenuje *Kongruence harmonických útvarů* (obr. 2) a je věnována mj. pravidelnému pokrývání roviny[13]. Je pravda, že na toto Keplerovo zkoumání bylo bohužel až do počátku 20. století pozapomenuto. Tvrdí se dokonce [1, s. 13], že v jednom z vydání knihy se úplně opomnělo na autorovy obrazové přílohy.

Podívejme se nyní, co vlastně Kepler tolik obdivoval a co později jako první uceleně popsal — podívejme se na dlažby, mozaiky, parketáže a obklady očima matematiky.

Zcela obecně mozaikou chápeme nějakou plošnou výzdobu či obraz, jenž je složen z různobarevných kostiček, střípků apod. Budeme zkoumat, zda je možné pokrýt neomezeně rovinu nějakými útvary (dlaždicemi) tak, aby nedocházelo k jejich vzájemnému překrývání ani aby nezůstávaly v rovině „díry". Přestože tyto rovinné útvary mohou být libovolných tvarů (elipsy, hvězdice, květiny), my budeme pro jednoduchost za dlaždici považovat libovolný mnohoúhelník. Podívejme se nejdříve na základní pojmy, kterými jsou charakterizovány jednotlivé typy mozaik.

[10] Johannes Kepler (27. 12. 1571, Weil — 15. 11. 1630, Řezno)

[11] První dva zákony objevil Kepler během svého pobytu v Praze (1600 — 1612).

[12] U Keplerova dalekohledu jsou objektiv i okulár tvořeny spojnými čočkami.

[13] Část obrazové přílohy spisu je na obr. 8.

Ioannis Keppleri

HARMONICES MVNDI

LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas conſtituunt, ortu & demonſtrationibus.

Secundus ARCHITECTONICVS, ſeu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel ſolido:

Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:

Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Eſſentiâ earumque generibus in Mundo; præſertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœleſtibus in Terram deſcendentibus, eiuſque effectu in Natura ſeu Anima ſublunari & Humana:

Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis abſolutiſſimis motuum cœleſtium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.

Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxonienſis ſpeculationibus Harmonicis, operi de Macrocoſmo & Microcoſmo inſertis.

Cum S. C. Mtis. Priuilegio ad annos XV.

Lincii Auſtriæ,

Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

Obr. 2

Protože v češtině nejsou některé názvy používané, do přehledu jsme zařadili i ekvivalenty z názvosloví anglického:

- **mozaika** (*tiling*[14]) — takové pokrytí roviny dlaždicemi, kdy
  a) sjednocením všech dlaždic mozaiky je celá rovina (tj. neexistují „díry"),
  b) průnikem libovolných dvou různých dlaždic nejsou dlaždice (tj. neexistuje „překrývání").
- **s-prvková mozaika** (s-*hedral tiling*) — mozaika tvořená dlaždicemi z s různých tříd T_i ($1 \leq i \leq s$), přičemž každá třída T_i obsahuje navzájem shodné dlaždice.
- **mozaika typu „strana na stranu"** (*edge-to-edge tiling*) — mozaika, pro jejíž libovolné dvě dlaždice platí právě jedna z možností:
  a) mají společnou právě jednu celou stranu,
  b) mají společný právě jeden vrchol,
  c) nemají žádný společný bod.

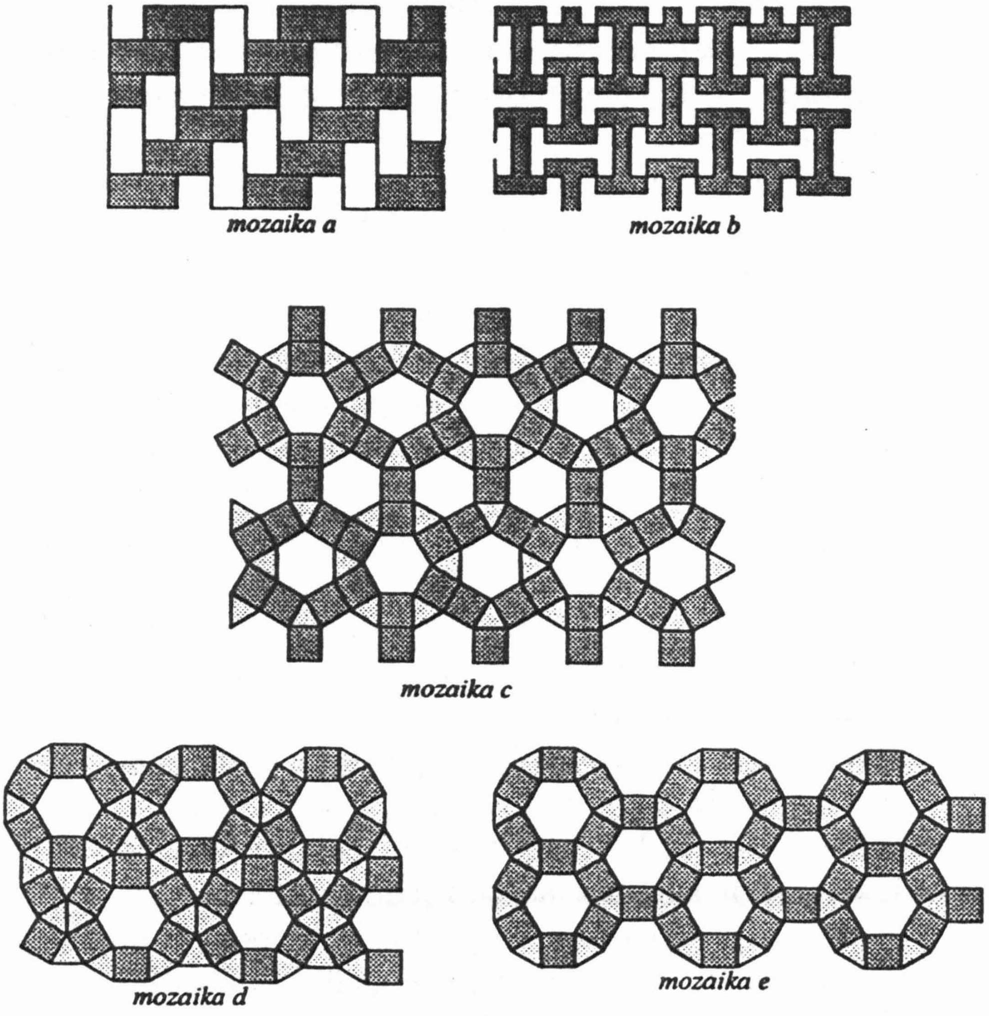
  Podívejme se blíže na vrcholy dlaždic mozaiky typu „strana na stranu". Libovolnému vrcholu X přiřaďme r-tici $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, kde X je obklopen n_1-úhelníkem, n_2-úhelníkem, ... , n_r-úhelníkem ve směru otáčení hodinových ručiček.
- **vrcholy X, X' stejného druhu** (*vertices of the same species*) — pro dané vrcholy platí rovnost množin $\{n_1, n_2, \ldots, n_r\} = \{n'_1, n'_2, \ldots, n'_r\}$, tj. nezáleží na pořadí dlaždic; mozaika s touto vlastností ve všech svých vrcholech bývá nazývána také *stejnorodou.*
- **vrcholy X, X' stejného typu** (*vertices of the same type*) — pro odpovídající r-tice $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ a $(n'_1, n'_2, \ldots, n'_r)$ existuje $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ takové, že pro všechna $j = 1, 2, \ldots, r$ je splněna alespoň jedna z možností:
  a) $n_j = n'_{j+i}$ (tj. oba vrcholy jsou obklopeny n-úhelníky ve stejném pořadí a stejném směru otáčení),
  b) $n_j = n'_{r-j+i}$ (tj. oba vrcholy jsou obklopeny

[14] V anglické matematické literatuře se můžeme setkat také s výrazy *tessellation, paving, mosaic* či *parquetting.*

n-úhelníky ve stejném pořadí, avšak v opačném směru otáčení), kde klademe $n'_{j+r} := n'_j$.

Je tedy zřejmé, že vrcholy odpovídající čtveřicím $(3,6,4,4)$ a $(4,6,3,4)$ jsou stejného typu, avšak vrcholy odpovídající čtveřicím $(3,6,4,4)$ a $(4,3,4,6)$ jsou stejného druhu nikoli stejného typu.

- **pravidelná mozaika** (*regular tiling*) — jednoprvková mozaika složená z pravidelných n-úhelníků, jejíž všechny vrcholy jsou stejného typu.



Obr. 3

- **polopravidelná mozaika** (*semiregular tiling*) — víceprvková mozaika složená z pravidelných n-úhelníků, jejíž všechny vrcholy jsou stejného typu.

Je zřejmé, že u mozaiky, jež není typu „strana na stranu“, nemá smysl hovořit o vrcholech stejného druhu ani typu. V takové mozaice existují sousední dlaždice nemající společnou celou stranu (příkladem je mozaika *a* na obr. 3). Existují však mozaiky mající několik typů vrcholů, např. v mozaice *c* na obr. 3 se vyskytují vrcholy typu $(3,4,4,6)$, tj. oba ve vrcholu stýkající se čtverce mají společnou stranu, i typu $(3,4,6,4)$, tj. oba ve vrcholu stýkající se čtverce mají jen společný vrchol. Povšimněme si však, že sice v této mozaice sice existují dva různé typy vrcholů, všechny vrcholy jsou však stejného druhu.

Domníváme se, že pro správné pochopení textu článku je třeba si přesně uvědomit rozdíly a vztahy mezi výše uvedenými pojmy. K tomu snad čtenáři napomohou následující tři úlohy:

Úkol č. 1: Doplňte do tabulky chybějící údaje týkající se mozaik *b* – *e* z obr. 3.

mozaika	*s*-prvková mozaika	pravidelné *n*-úhelníky	všechny vrcholy stejného druhu	všechny vrcholy stejného typu	typy vrcholů
b		ne		ano	
c	$s = 3$		ano		
d		ano	ne	ne	
e					(3.4.6.4)

Tab. 1

Úkol č. 2: Určete pravdivostní hodnotu výroků:

a) Jestliže je mozaika stejnorodá, potom má všechny vrcholy stejného typu.

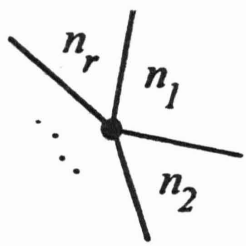
b) Jestliže je mozaika nestejnorodá, potom má všechny vrcholy stejného typu.

c) Jestliže má mozaika všechny vrcholy stejného typu, potom je stejnorodá.

d) Jestliže má mozaika všechny vrcholy stejného typu, potom je nestejnorodá.

Úkol č. 3: Které z mozaik *a* – *e* na obr. 3 jsou pravidelné či polopravidelné? Z informací, které zatím máte, se pokuste nakreslit jednu pravidelnou a jednu polopravidelnou mozaiku odlišnou od $a - e$.

Kepler se v *Harmonice Mundi* zabýval mozaikami typu „strana na stranu" složenými pouze z rovnostranných mnohoúhelníků (např. z hvězdic), my pro jednoduchost provedeme omezení ještě větší: budeme zkoumat mozaiky pravidelné a polopravidelné. Právě zde byl totiž Keplerův největší přínos — pravděpodobně jako první všechny tyto pravidelné a polopravidelné mozaiky popsal[15]. Vycházejme tudíž z předpokladu, že nás zajímají pouze mozaiky složené z pravidelných n-úhelníků s vrcholy stejného typu $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ — obr. 4.



Obr. 4

Celý postup vyšetřování takových mozaik si rozdělíme do čtyř částí. V té první budeme zjišťovat nutná omezení pro čísla n_i a r, ve druhé pak pomocí nich odvodíme všechny možné druhy a typy vrcholů. Ve třetí části postupu vybereme jen ty případy vrcholů, z nichž je možné pravidelné a polopravidelné mozaiky opravdu sestavit. A konečně v poslední — čtvrté části — se budeme těšit (ale ne moc) z úspěšného završení práce.

1. Omezení pro n_i a r

Existují nějaká omezení pro n_i a r? Vypišme si je:

a) Zřejmě obě čísla musí být přirozená.

[15] V umění se s mozaikami pracovalo od nepaměti. Avšak první články o mozaikách, jež se zabývaly matematickou podstatou problému, byly publikovány až koncem minulého století (viz autoři Bourgoin, Day, Dresser, Meyer, Schauermann a další). Proto o 260 let starší Keplerova *Harmonice Mundi* zaujímá tak významné postavení ve zkoumání mozaik.

b) Protože mezi pravidelnými n-úhelníky má rovnostranný trojúhelník nejmenší vrcholový úhel, je $n_i \geq 3$ a zároveň $r \leq 6$ ($r = 6 \iff \forall i : n_i = 3$).

c) Velikost vnitřního vrcholového úhlu v pravidelném n_i-úhelníku je $\frac{n_i - 2}{n_i} \cdot 180$ stupňů. Pro vrchol typu $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ musí proto platit:

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} \cdot 180 + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \cdots + \frac{n_r - 2}{n_r} \cdot 180 = 360,$$

po úpravách

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{n_r} = 1,$$

tj.

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_r} = \frac{r-2}{2}. \qquad (1)$$

Protože pravá strana rovnice (1) musí být kladná, dostáváme další podmínku pro r: $r \geq 3$.

Závěr: Došli jsme ke zjištění, že každá pravidelná i polopravidelná mozaika musí vyhovovat rovnici (1), kde $n_i \geq 3 \wedge 3 \leq r \leq 6$.

2. Druhy a typy vrcholů

Teď už můžeme začít určovat všechny možné typy vrcholů. Postupným dosazováním $r = 3, 4, 5, 6$ do pravé strany diofantické rovnice (1) získáme celkem 17 různých celočíselných řešení. Všechna taková řešení splňující nerovnost $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r$ jsou uvedena v tab. 2.

$r=3$		$r=4$	$r=5$	$r=6$
3,7,42	4,5,20	3,3,4,12	3,3,3,3,6	3,3,3,3,3,3
3,8,24	4,6,12	3,3,6,6	3,3,3,4,4	
3,9,18	4,8,8	3,4,4,6		
3,10,15	5,5,10	4,4,4,4		
3,12,12	6,6,6			

Tab. 2

Uvědomme si, že tato algebraická řešení udávají pouze různé druhy vrcholů, nikoli jejich typy — neuvažovali jsme totiž pořadí mnohoúhelníků stýkajících se u daného vrcholu. Je zřejmé, že každý ze sedmnácti druhů vrcholů z tabulky 2 odpovídá zároveň jednomu typu vrcholu. Snadno nahlédneme, že právě ve čtyřech případech můžeme dostat z jednoho druhu dva různé typy vrcholů:

$$(3,3,4,12) \sim (3,4,3,12)$$
$$(3,3,6,6) \sim (3,6,3,6)$$
$$(3,4,4,6) \sim (3,4,6,4)$$
$$(3,3,3,4,4) \sim (3,3,4,3,4)$$

Závěr: Získali jsme celkem jedenadvacet typů vrcholů mozaik složených z pravidelných mnohoúhelníků.

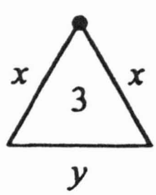
3. Vrcholy stejného typu

Ukažme si, že ne každá z jedenadvaceti předložených možností typu vrcholu může tvořit pravidelnou či polopravidelnou mozaiku. Proč? Nestačí totiž znát jen typ vrcholu — to je málo — potřebujeme mít zajištěno, aby všechny vrcholy byly stejného typu. Jednotlivé výše vypsané možnosti musíme proto podrobněji vyšetřit se zřetelem na naše uvažované požadavky:

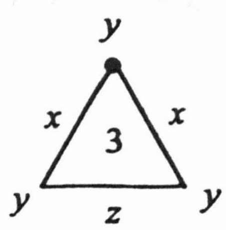
a) $r = 3$

aa) vrcholy typu $(3, x, y)$

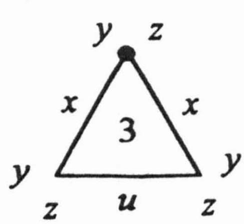
Z obrázku 5 je patrné, že dva vrcholy jsou typu $(3, x, y)$, ale třetí — zvýrazněný — typu $(3, x, x)$. Aby byly všechny vrcholy stejného typu, musí platit $x = y$. Tudíž nám vyhovuje pouze možnost $(3, 12, 12)$, ale nevyhovují $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$ a $(3, 10, 15)$, viz tab. 3.



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

ab) vrcholy typu $(5, x, y)$
Výsledek $x = y$ je stejný jako u aa). Víte proč?

ac) vrcholy typu $(4, x, y)$ a $(6, x, y)$
Sami určete vyhovující a nevyhovující možnosti a porovnejte s hodnotami v tab. 3.

Úkol č. 4: Všimněte si, jak souvisí výsledky u typů (a, x, y) se sudostí či lichostí čísla a.

b) $r = 4$

ba) vrcholy typu $(3, x, y, z)$
Z obrázku 6 je patrné, že dva vrcholy jsou typu $(3, x, y, z)$, ale třetí — zvýrazněný — typu $(3, x, y, x)$. Aby byly všechny vrcholy stejného typu, musí platit $x = z$. Tudíž nám vyhovují možnosti $(3, 4, 6, 4)$ a $(3, 6, 3, 6)$, ale nevyhovují $(3, 3, 4, 12)$, $(3, 4, 3, 12)$, $(3, 3, 6, 6)$ a $(3, 4, 4, 6)$, viz tab. 3.

bb) vrcholy typu $(4, x, y, z)$
Sami určete vyhovující a nevyhovující možnosti a porovnejte s hodnotami v tab. 3.

c) $r = 5$

ca) vrcholy typu $(3, x, y, z, u)$
Z obrázku 7 je patrné, že dva vrcholy jsou typu $(3, x, y, z, u)$, ale třetí — zvýrazněný — typu $(3, x, y, z, x)$. Aby byly všechny vrcholy stejného typu, musí platit $x = u$, tj. u každého vrcholu se stýká rovnostranný trojúhelník a dva shodné mnohoúhelníky, jež trojúhelník mezi sebou uzavírají. Vyhovují tudíž všechny možnosti $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ a $(3, 3, 4, 3, 4)$, viz tab. 3.

d) $r = 6$
Jediné řešení $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ vyhovuje námi stanoveným podmínkám.

Závěr: Z jedenadvaceti možných typů vrcholů jich jen jedenáct tvoří základ pro pravidelnou či polopravidelnou mozaiku (viz přehled v tab. 3).

$r=3$		$r=4$		$r=5$		$r=6$	
vyhovující řešení	nevyhovující řešení	vyhovující řešení	nevyhovující řešení	vyhovující řešení	nevyhovující řešení	vyhovující řešení	nevyhovující řešení
(3.12.12)	(3.7.42)	(3.4.6.4)	(3.3.4.12)	(3.3.3.3.6)		(3.3.3.3.3.3)	
(4.6.12)	(3.8.24)	(3.6.3.6)	(3.4.3.12)	(3.3.3.4.4)			
(4.8.8)	(3.9.18)	(4.4.4.4)	(3.3.6.6)	(3.3.4.3.4)			
(6.6.6)	(3.10.15)		(3.4.4.6)				
	(4.5.20)						
	(5.5.10)						

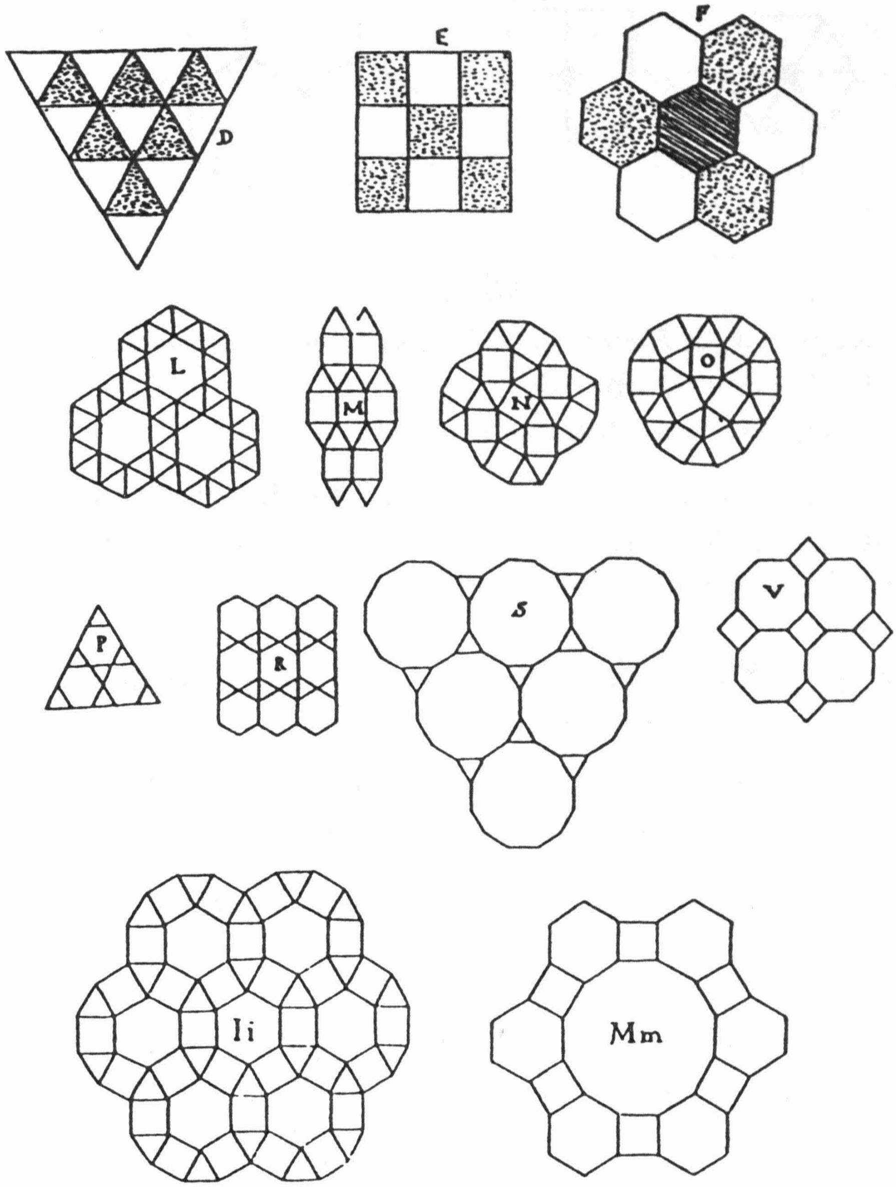
Tab. 3

Povšimněte si, že všechna vyhovující řešení odpovídají eukleidovsky konstruovatelným pravidelným mnohoúhelníkům (viz [4]). Povšimněte si dále, že všechna vyhovující řešení kromě trojice $(4, 6, 12)$ nezávisí na tom, zda číslujeme po směru či proti směru hodinových ručiček.

4. Pravidelné a polopravidelné mozaiky

Naše výsledky zaznamenané do tabulky 3 odpovídají znění věty, která bývá občas nazývána větou Keplerovou: *Neuvažujeme-li podobnost, existuje právě jedenáct různých mozaik typu „strana na stranu", kde všechny vrcholy jsou stejného typu a dlaždice jsou tvaru pravidelných mnohoúhelníků.* Je možná paradoxní, že Kepler v *Harmonice Mundi* tuto větu přímo nevyslovuje ani nedokazuje, ale „jen" popisuje a ilustruje výsledky svých zkoumání týkající se mozaik typu „strana na stranu" složených z rovnostranných mnohoúhelníků. Na ukázku jsme z tohoto Keplerova díla vybrali třináct částí různých mozaik (obr. 8). Všechny jsou tvořeny z pravidelných mnohoúhelníků, dvě však nevyhovují mozaikám z Keplerovy věty. Víte které? Jsou to O a R, jelikož nemají všechny vrcholy stejného typu. Zbývajících jedenáct mozaik (nazývaných jako *Archimedovy mozaiky*[16]) můžeme jednoznačně rozdělit na dvě skupiny — na pravidelné a polopravidelné.

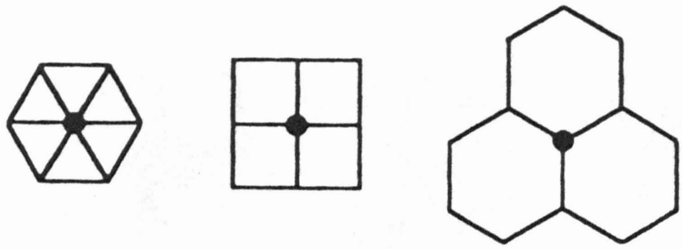
[16] V některých pracích (např. [5]) bývají Archimedovými mozaikami nazývány pouze mozaiky polopravidelné.



Obr. 8

a) pravidelné mozaiky jsou tři (viz obr. 9):

- složené z rovnostranných trojúhelníků, tj. všechny vrcholy typu $(3,3,3,3,3,3)$,
- složené ze čtverců, tj. všechny vrcholy typu $(4,4,4,4)$,
- složené z pravidelných šestiúhelníků, tj. všechny vrcholy typu $(6,6,6)$.



Obr. 9

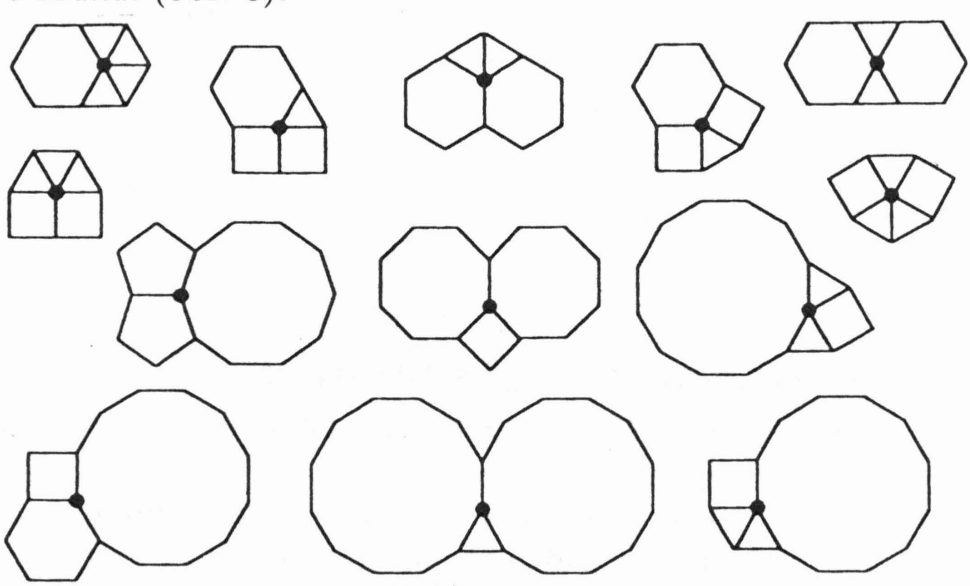
Kepler je v *Harmonice Mundi* označuje velkými písmeny D, E a F (viz obr. 8).

b) polopravidlených mozaik je osm.

Úkol č. 5: Určete pomocí tab. 3 a obr. 8, kolik je polopravidelných 2-prvkových a kolik polopravidelných 3-prvkových mozaik (Kepler posledně jmenované označuje jedním velkým a jedním malým písmenem).

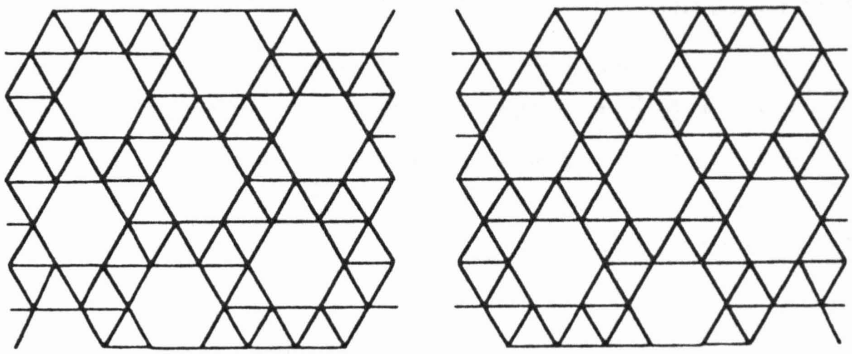
Úkol č. 6: Dokážete vysvětlit, proč nemůže existovat polopravidelná s-prvková mozaika pro $s \geq 4$?

Úkol č. 7: Na obr. 10 je nakresleno třináct různých typů vrcholů. U každého z nich určete konkrétní typ vrcholu a stanovte, která z možností nemůže tvořit polopravidelnou mozaiku. U zbývajících osmi případů najděte odpovídající mozaiku v Keplerově *Harmonice Mundi* (obr. 8).



Obr. 10

Slíbili jsme, že v závěrečné části článku se budeme těšit z úspěšného završení naší práce. Proto jsme vám nabídli tři úkoly, jejichž vyřešení může tuto radost ještě umocnit. Abychom se však netěšili příliš, předkládáme poslední problém: v různé literatuře (např. [2]) se můžeme dočíst, že existuje celkem 12 (!) pravidelných a polopravidelných mozaik. My jsme však došli jen k číslu jedenáct. Kde se stala chyba? Odpověď je jednoduchá. Všechny pravidelné a polopravidelné mozaiky mají osu souměrnosti — až na jedinou — na mozaiku s vrcholy typu $(3,3,3,3,6)$. Ta bývá proto občas uváděna ve dvou navzájem osově souměrných tvarech (obr. 11).



Obr. 11

Poděkování patří M. Křížkovi za cenné připomínky vedoucí ke zkvalitnění textu.

LITERATURA

[1] Grünbaum B., Shephard G. C., *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

[2] Hoggar S. G., *Mathematics for Computer Graphics*, University Press, Cambridge, 1992.

[3] Kepler J., *Harmonice Mundi*, (německý překlad — Caspar M.: *Weltharmonik*. Verlag R. Oldenbourg, München-Berlin, 1939).

[4] Křížek M., *Gaussův příspěvek k eukleidovské geometrii*, Rozhledy mat.-fyz. **74** (1997), 254-258.

[5] Martin G. E., *Transformation geometry*, Springer-Verlag, New York, 1982.

RNDr. Jana Pradlová, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta aplikované matematiky ZČU Plzeň
email: pradlova@kma.zcu.cz