MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 1. – 4. 4. 2001 se v Praze uskutečnilo celostátní kolo 50. ročníku Matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C, pro školní rok 2001–2002.

Úlohy celostátního kola 50. ročníku matematické olympiády

Praha 1.–4. dubna 2001

1. Určete všechny mnohočleny P takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$\big(P(x)\big)^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x).$$

P. Calábek

Řešení. Je-li mnohočlen P konstantní, tedy $P(x) = a$, pak číslo a splňuje dle zadání podmínku $a^2 + a = a + a$, takže $a = 0$ nebo $a = 1$. Oba mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ jsou řešením úlohy.

Je-li stupeň n mnohočlenu P kladný, pak $P(x) = ax^n + Q(x)$, kde a je číslo různé od nuly a Q je mnohočlen stupně nejvýše $n-1$. Porovnáme-li v rovnosti

$$\big(ax^n+Q(x)\big)^2+a(-x)^n+Q(-x) = ax^{2n}+Q(x^2)+ax^n+Q(x) \quad (1)$$

koeficienty u nejvyšší mocniny x^{2n}, dostaneme podmínku $a^2 = a$, ze které plyne $a = 1$ (připomeňme, že $a \neq 0$). Rovnost (1) po dosazení hodnoty $a = 1$ upravíme do ekvivalentního tvaru

$$2x^nQ(x)+\big(Q(x)\big)^2-Q(x^2) = [1-(-1)^n]x^n+Q(x)-Q(-x). \quad (2)$$

Připusťme, že mnohočlen Q má kladný stupeň k ($k < n$). Pak na levé straně (2) stojí mnohočlen stupně alespoň $n + k$, což je sporu s tím, že na pravé straně (2) je mnohočlen stupně nejvýše n. Proto je Q konstantní mnohočlen, tedy $Q(x) = b$ pro vhodné číslo b. Po dosazení do (2) dostáváme podmínku $2bx^n + b^2 - b = [1 - (-1)^n]x^n$, která je splněna pro každé x, právě když $2b = 1 - (-1)^n$ a zároveň $b^2 - b = 0$. Pro sudé n vychází jedině $b = 0$ (takže $P(x) = x^n$), pro liché n vyjde $b = 1$ (takže $P(x) = x^n + 1$).

Odpověď: Hledané mnohočleny jsou konstanty 0 a 1, jednočleny $x^2, x^4, x^6, \ldots$ a dvojčleny $x + 1$, $x^3 + 1$, $x^5 + 1, \ldots$

Jiné řešení. Přičteme-li $P(-x)$ k oběma stranám dané rovnosti, dostaneme rovnost $\big(P(x)\big)^2 + 2P(-x) = P(x^2) + P(x) + {}+P(-x)$, na jejíž pravé straně je sudá funkce proměnné x. Proto je sudá i funkce na levé straně: pro každé x platí $\big(P(x)\big)^2 + 2P(-x) = {}= \big(P(-x)\big)^2 + 2P(x)$, neboli

$$\big(P(x) - P(-x)\big) \cdot \big(P(x) + P(-x) - 2\big) = 0.$$

Jeden z obou činitelů na levé straně poslední rovnosti je tedy nulový mnohočlen. Pokud platí identicky $P(x) - P(-x) = 0$, redukuje se rovnost ze zadání úlohy na $\big(P(x)\big)^2 = P(x^2)$; pokud platí identicky $P(x) + P(-x) - 2 = 0$, pak pro mnohočlen Q definovaný rovností $Q(x) = P(x) - 1$ platí $Q(-x) = -Q(x)$ a dosazením a snadnou úpravou se zjistí, že rovnost ze zadání přejde do tvaru $\big(Q(x)\big)^2 = Q(x^2)$.

Shrneme-li tedy oba případy, zjistíme, že v každém z nich máme určit mnohočlen R, který je sudou nebo lichou funkcí a splňuje pro každé x rovnost $\big(R(x)\big)^2 = R(x^2)$. Hledejme taková R nejdříve mezi jednočleny: po dosazení $R(x) = ax^n$ zjistíme, že je buď $a = 0$, nebo $a = 1$ a $n \geq 0$ libovolné. Připusťme, že R není jednočlen, tedy $R(x) = ax^n + bx^k + S(x)$, kde a, b jsou čísla různá od nuly, $n > k$ a S je nulový mnohočlen nebo mnohočlen stupně nejvýše $k - 1$. Porovnáme-li v rovnosti

$$\big(ax^n + bx^k + S(x)\big) \cdot \big(ax^n + bx^k + S(x)\big) = ax^{2n} + bx^{2k} + S(x)$$

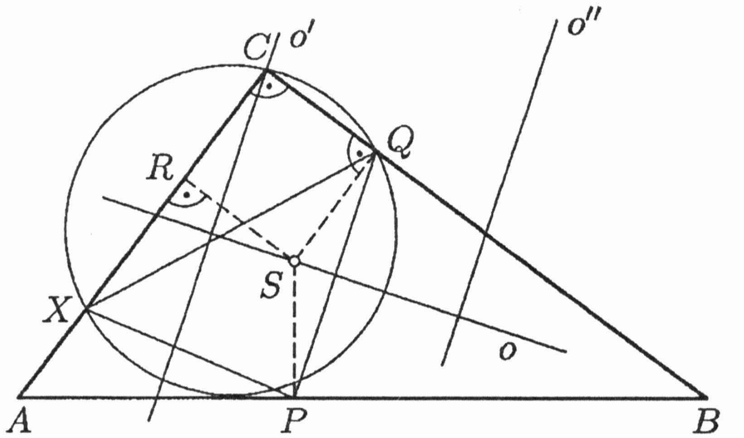
koeficienty členů s mocninou x^{n+k}, dostaneme rovnost $2ab = 0$, která je ve sporu s tím, že $a \neq 0$ a $b \neq 0$. Proto podmínku

$(R(x))^2 = R(x^2)$ splňují pouze mnohočleny R rovné 0, 1, x, x^2, $x^3, \ldots$

2. V rovině je dán trojúhelník PQX, kde $|PQ| = 3\,\mathrm{cm}$, $|PX| = 2{,}6\,\mathrm{cm}$, $|QX| = 3{,}8\,\mathrm{cm}$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby se jemu vepsaná kružnice dotýkala přepony AB v bodě P, odvěsny BC v bodě Q a aby bod X ležel na přímce AC.

J. Šimša

Řešení. Označme ještě R bod dotyku s odvěsnou AC a S střed zmíněné kružnice (obr. 1). Protože $SQCR$ je čtverec a bod S leží na ose o úsečky PQ, leží bod C na přímce o', která je obrazem osy o v otočení kol bodu Q o pravý úhel. Vrchol C proto sestrojíme jako průsečík přímky o' s Thaletovou kružnicí τ nad průměrem QX. Zbytek konstrukce je zřejmý.



Úloha má (pro dané body P, Q, X) jediné řešení. I když osu o můžeme kol bodu Q otočit o pravý úhel dvěma způsoby, jedna z otočených přímek o'' kružnici τ vůbec neprotne; druhá z nich má s kružnicí τ sice dva společné body, ale jednomu z nich odpovídá takový trojúhelník ABC, že místo kružnice vepsané má požadované vlastnosti kružnice ***připsaná*** přeponě AB (bod Q jejího dotyku s přímkou BC neleží na odvěsně BC, ale na jejím prodloužení za vrchol B).

3. Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c, pro které je množinou řešení nerovnice

$$\sqrt{2x^2 + ax + b} > x - c$$

s neznámou x množina $(-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$. *P. Černek*

Řešení. Označme ($\square$) danou nerovnici a $\mathsf{K} = (-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$ příslušnou množinu (všech) řešení. Z toho, že 0 patří do K, plyne pro b podmínka $b \geq 0$ a zároveň $\sqrt{b} > -c$. Kdyby však platilo $b > 0$, byl by výraz $\sqrt{2x^2 + ax + b}$ definován v některém okolí bodu $x = 0$ a z (ostré) nerovnosti ($\square$) pro $x = 0$ by plynula její platnost i pro malá kladná čísla x, což je ve sporu s tvarem množiny K. Proto musí být $b = 0$ a z nerovnosti $\sqrt{b} > -c$ plyne podmínka $c > 0$.

Protože $\sqrt{2x^2 + ax + b} = \sqrt{x(2x + a)}$ a protože množina K obsahuje všechna čísla $x > 1$, platí pro taková x nerovnost $2x + a \geq 0$, která znamená, že $a \geq -2$. Protože $1 \notin \mathsf{K}$, nerovnost $\sqrt{2 + a} > 1 - c$ neplatí, její levá strana však má díky nerovnosti $a \geq -2$ smysl. Proto naopak platí $\sqrt{2 + a} \leq 1 - c$, odkud plyne podmínka $c \leq 1$. Kdyby platila ostrá nerovnost $\sqrt{2 + a} < 1 - c$, nerovnost $\sqrt{x(2x + a)} < x - c$ by byla splněna nejen pro $x = 1$, ale také pro $x = 1 + \varepsilon$ s dostatečně malým $\varepsilon > 0$, což je ve sporu s tím, že $1 + \varepsilon \in \mathsf{K}$. To znamená, že $\sqrt{2 + a} = 1 - c$, odkud $a = (1 - c)^2 - 2 = c^2 - 2c - 1$.

Shrňme výsledky našich úvah: zjistili jsme, že každá vyhovující trojice čísel (a, b, c) je nutně tvaru $(c^2 - 2c - 1, 0, c)$, kde $0 < c \leq$ ≤ 1. Ukažme nyní, že obráceně každá trojice popsaného tvaru má požadované vlastnosti. Řešme proto v oboru reálných čísel nerovnici

$$\sqrt{x(2x + a)} > x - c, \tag{1}$$

pro pevně zvolené $c \in (0, 1\rangle$ a odpovídající $a = c^2 - 2c - 1$.

Z nerovností $0 < c \leq 1$ a vyjádření $a = (1 - c)^2 - 2$ plyne, že $-2 \leq a < -1$. Pro každé $x \leq 0$ tudíž platí $2x + a < 0$, takže levá strana (1) má smysl a je nezáporná, zatímco pravá strana (1) je pro takové x záporná (neboť $x - c \leq -c < 0$). Proto celý interval $(-\infty, 0\rangle$ patří do množiny řešení (1). Nepatří tam však žádné číslo x z intervalu $(0, -\frac{1}{2}a)$, neboť pro ně nemá smysl levá strana (1). Zbývá tedy vyřešit nerovnici (1) na intervalu $\langle -\frac{1}{2}a, \infty)$. Zdůvodníme předtím, že pro krajní bod $-\frac{1}{2}a$ platí odhady $c \leq -\frac{1}{2}a \leq 1$. Skutečně, horní odhad okamžitě plyne z toho, že $a \geq -2$, dolní odhad se snadno odvodí ze zřejmé nerovnosti $c^2 \leq 1$:

$$-\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}(c^2 - 2c - 1) = c + \frac{1}{2}(1 - c^2) \geq c.$$

Pro každé $x \in \langle -\frac{1}{2}a, \infty)$ platí tedy $x \geq c$, a proto jsou obě strany nerovnice (1) nezáporné. Po umocnění obou stran na druhou a snadné úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnici $x^2 + (a + 2c)x - c^2 > 0$. Odtud po dosazení $a = c^2 - 2c - 1$ vychází nerovnice $(x - 1)(x + c^2) > 0$, která platí pro právě ta (kladná) čísla $x \in \langle -\frac{1}{2}a, \infty)$, která jsou větší než 1 (zopakujme, že $-\frac{1}{2}a \leq 1$). Tím je dokázáno, že množinou řešení nerovnice (1) je skutečně množina K ze zadání úlohy.

Odpověď: Hledané trojice jsou $(a, b, c) = (c^2 - 2c - 1, 0, c)$, kde c je libovolné číslo z intervalu $(0, 1\rangle$.

4. V jistém jazyce je n písmen. Skupina písmen (napsaných za sebou) je slovo, právě když se mezi žádnými dvěma stejnými písmeny nenacházejí dvě stejná písmena. Určete počet všech slov maximální délky. *K. Černeková*

Řešení. V žádném slově zřejmě nemohou být čtyři stejná písmena. Maximální možná délka slova uvažovaného jazyka je tedy $3n$ (skupina n trojic stejných písmen za sebou je zřejmě slovo). Zároveň je jasné, že pro $n = 1$ existuje jediné slovo délky 3.

Nechť $n \geq 2$.

1. *Každé slovo začíná dvěma stejnými písmeny.* Kdyby tomu tak nebylo, měli bychom slovo $AB \ldots A \ldots A \ldots$ začínající dvojicí různých písmen A, B. Další písmeno B se však nemůže vyskytovat mezi prvním a druhým písmenem A (jedno už tam je), ani za třetím písmenem A (dvě A by byla mezi dvěma B). Obě zbývající písmena B by tedy musela být mezi druhým a třetím písmenem A, což také není možné.

2. *Vypustíme-li ze slova maximální délky $3n$ tři stejná písmena, dostaneme v jazyce s $n-1$ písmeny opět slovo maximální délky* $3(n-1)$.

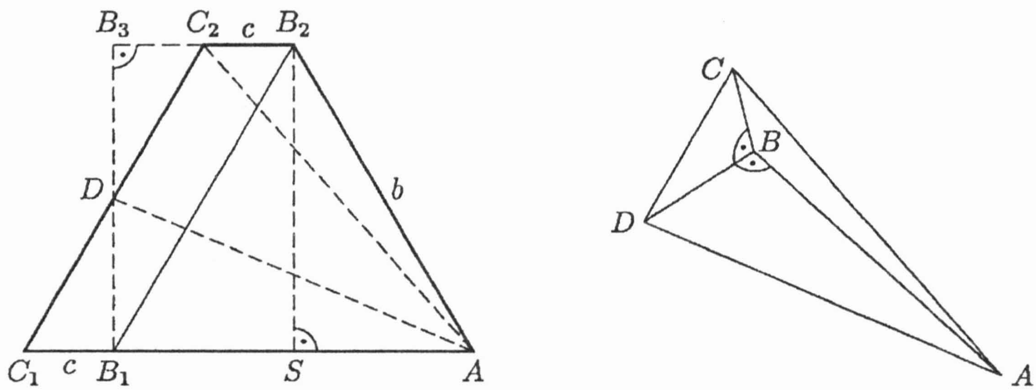
Počet slov maximální délky v jazyce s n písmeny označme p_n. Zjistíme, kolik je slov maximální délky začínajících zvoleným písmenem A. Každé takové slovo začíná dvěma písmeny A, takže třetí písmeno je buď opět A (takových slov je zřejmě tolik, kolik je slov maximální délky obsahujících $n-1$ písmen, tj. p_{n-1}), nebo písmeno $B \neq A$. Protože po vypuštění všech písmen A dostaneme opět slovo (a to musí začínat, jak už víme, dvěma stejnými písmeny), musí původní slovo začínat skupinou $AABAB$ (možnost $AABB\ldots A$ zřejmě nepřichází v úvahu). Takových slov je opět p_{n-1}. Celkem je tedy $2p_{n-1}$ slov maximální délky začínajících zvoleným písmenem A. To znamená, že $p_n = 2np_{n-1}$, odkud snadno plyne, že

$$p_n = 2^{n-1}n!p_1 = 2^{n-1}n!.$$

Nalezený vzorec vyhovuje i pro $n = 1$.

5. Z papíru byl vystřižen rovnoramenný lichoběžník $C_1AB_2C_2$ s kratší základnou B_2C_2. Patu kolmice ze středu D ramena C_1C_2 na základnu AC_1 označíme B_1. Po přehnutí papíru podél úseček DB_1, AD a AC_2 se body C_1, C_2 přemístily v prostoru do jednoho bodu C a body B_1, B_2 do bodu B. Vznikl tak model čtyřstěnu $ABCD$ s objemem $64\,\mathrm{cm}^3$. Určete délky stran původního lichoběžníku. *P. Leischner*

Řešení. Z rovnosti úseček, jež v popsané síti odpovídají týmž hranám výsledného čtyřstěnu $ABCD$, dostáváme, že $|AB_1| = |AB_2| = |AB| = b$, $|B_1C_1| = |B_2C_2| = |BC| = c$. Označme S střed úsečky AB_1 a B_3 patu kolmice z bodu D na přímku B_2C_2 (obr. 2). Trojúhelníky B_1C_1D a B_3C_2D jsou středově souměrné podle bodu D, proto $|B_3C_2| = |B_1C_1| = c$. Protože lichoběžník $C_1AB_2C_2$ je rovnoramenný, je rovnoramenný i trojúhelník B_1AB_2 (vzhledem k předchozím rovnostem je dokonce rovnostranný), a z obdélníku $B_1SB_2B_3$ tak plyne $\frac{1}{2}b = |B_1S| = |B_2B_3| = 2c$, takže $b = 4c$.



Nyní si už jen uvědomíme, že sestavený čtyřstěn $ABCD$ bude mít dvě pravoúhlé stěny CDB a ADB s pravými úhly při vrcholu B (obr. 3), což znamená, že hrana BD bude kolmá ke stěně ABC. Přitom výška v trojúhelníku ABC (neboli trojúhelníku AB_2C_2) na stranu BC je zároveň výškou B_2S rovnostranného trojúhelníku B_1AB_2, takže $v = \frac{1}{2}\sqrt{3}b$ a zároveň $|BD| = |B_1D| = \frac{1}{2}v$. Objem V čtyřstěnu $ABCD$ tedy spočteme jako

$$V = \frac{1}{3}S(ABC)|BD| = \frac{1}{3}S(AB_2C_2)\cdot\frac{1}{2}v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}cv\cdot\frac{1}{2}v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}b\cdot v^2 = \frac{1}{4^3}b^3,$$

takže $b = \sqrt[3]{64^2}\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$.

6. Jsou dána přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = 1$ pro každé celé $x < 0$ a

$$f(x) = 1 - f(x - a_1)\,f(x - a_2)\cdots f(x - a_n) \qquad (1)$$

pro každé celé $x \geq 0$. Dokažte, že existují přirozená čísla s a t taková, že pro každé celé $x > s$ platí $f(x + t) = f(x)$.

P. Kaňovský

Řešení. Matematickou indukcí nejprve dokážeme, že všechny hodnoty $f(x)$ leží v dvouprvkové množině $\mathsf{M} = \{0, 1\}$. Tvrzení $f(x) \in \mathsf{M}$ totiž platí pro každé $x < 0$; je-li celé číslo $x \geq 0$ takové, že $f(y) \in \mathsf{M}$ pro každé celé $y < x$, pak v M leží každé z n čísel

$f(x - a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a tedy i jejich součin, podle (1) tedy i číslo $f(x)$. Důkaz indukcí je hotov.

Označme nyní $A = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Pak všechna čísla $x - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ leží mezi A čísly $x - 1, x - 2, \ldots, x - A$. Podle (1) to znamená, že platí-li pro některá nezáporná čísla p a q následujících A rovností

$$f(p-1) = f(q-1),\ f(p-2) = f(q-2),\ \ldots,\ f(p-A) = f(q-A), \tag{2}$$

platí rovněž rovnost $f(p) = f(q)$; matematickou indukcí lze pak ověřit rovnost $f(p+r) = f(q+r)$ pro každé celé $r \geq 0$. Dokážeme-li proto existenci přirozených čísel p a q, $p < q$, pro něž platí soustava rovností (2), bude tvrzení z textu úlohy platit pro čísla $s = p$ a $t = q - p$.

Podmínku (2) lze vyjádřit jako rovnost dvou uspořádaných A-tic

$$[f(p-1), f(p-2), \ldots, f(p-A)] = [f(q-1), f(q-2), \ldots, f(q-A)],$$

které jsou, jak již víme, sestaveny výhradně z čísel 0 a 1. Ze dvou různých prvků lze ale sestavit pouze 2^A různých A-tic, takže například v následující skupině A-tic

$$\{[f(x-1), f(x-2), \ldots, f(x-A)] \colon x = 0, 1, \ldots, 2^A\}$$

jsou některé dvě A-tice stejné. Tím je důkaz tvrzení úlohy hotov.

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2001–2002

Kategorie A

A-I-1. Je-li S obsah trojúhelníku o stranách a, b, c a T obsah trojúhelníku o stranách $a+b$, $b+c$, $c+a$, pak platí $T \geq 4S$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. *P. Kaňovský*

A-I-2. V oboru celých čísel x, y řešte rovnici

$$(x_5)^2 + (y^4)_5 = 2xy^2 + 51,$$

kde n_5 značí násobek pěti nejbližší k číslu n, například $(-9)_5 = -10$. *P. Černek*

A-I-3. V daném trojúhelníku ABC protíná osa úhlu ACB stranu AB v bodě K a kružnici opsanou v bodě L ($L \neq C$). Označme V střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, S střed kružnice opsané trojúhelníku KBV a Z průsečík přímek AB a SL. Dokažte, že přímka SK je tečnou kružnice opsané trojúhelníku KLZ.
J. Földes

A-I-4. Nechť $n \geq 2$ je dané přirozené číslo. Pro které hodnoty reálného parametru p má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{2}{x_1^2} &= px_2,\\ x_2^4 + \frac{2}{x_2^2} &= px_3,\\ \dots\dots&\dots\dots,\\ x_{n-1}^4 + \frac{2}{x_{n-1}^2} &= px_n,\\ x_n^4 + \frac{2}{x_n^2} &= px_1 \end{aligned}$$

alespoň dvě řešení v oboru reálných čísel? *J. Švrček*

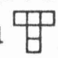
A-I-5. Najděte všechny mnohočleny $P(x)$ s reálnými koeficienty, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost

$$(x+1)\,P(x-1)+(x-1)\,P(x+1)=2x\,P(x).$$

E. Kováč

A-I-6. Najděte všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu a právě čtyři hrany dané délky a. (Deltoidem rozumíme konvexní čtyřúhelník souměrný podle *jediné* ze svých úhlopříček; nepatří k nim tedy ani čtverec, ani kosočtverec.) *P. Leischner*

Kategorie B

B-I-1. Do tabulky 4×4 jsou vepsána kladná reálná čísla tak, že součin v každé pětici tvaru  je rovný 1. Zjistěte maximální počet různých čísel zapsaných v tabulce. *P. Černek*

B-I-2. Určete, kolik čísel můžeme vybrat z množiny $\{1,2,3,\dots,$ $\dots,75\,599,75\,600\}$ tak, aby mezi nimi bylo číslo $75\,600$ a aby pro libovolná dvě vybraná čísla a, b platilo, že a je dělitelem b nebo b dělitelem a. (Uveďte všechny možnosti.) *J. Földes*

B-I-3. Nechť k je polokružnice sestrojená nad průměrem AB, která leží ve čtverci $ABCD$. Uvažujme její tečnu t_1 z bodu C (různou od BC) a označme P její průsečík se stranou AD. Nechť t_2 je společná vnější tečna polokružnice k a kružnice vepsané trojúhelníku CDP (různá od AD). Dokažte, že přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé. *J. Švrček*

B-I-4. Pokud máme n ($n\ge 2$) přirozených čísel, můžeme s nimi provést následující operaci: vybereme několik z nich, ale ne všechna, a každé z vybraných čísel nahradíme jejich aritmetickým průměrem. Zjistěte, zda je možno pro libovolnou počáteční n-tici dostat po konečném počtu kroků všechna čísla stejná, jestliže se n rovná

a) 2 000,
b) 35,
c) 3,
d) 17.

J. Földes

B-I-5. Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava

$$x^2y - 2x = p,$$
$$y^2x - 2y = 2p - p^2$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel. *P. Černek*

B-I-6. Je dán rovnostranný trojúhelník MPQ. Najděte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC takových, že body P, Q jsou paty výšek z vrcholů A, B a bod M je střed strany AB. *J. Šimša*

Kategorie C

C-I-1. Dokažte, že existuje jediná číslice c, pro kterou lze najít jediné přirozené číslo n končící číslicí c a mající tu vlastnost, že číslo $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla. *M. Koblížková*

C-I-2. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ se úhlopříčky protínají v bodě P, úhlopříčka AC je rozdělena body P, N a M na čtyři shodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a úhlopříčka BD je rozdělena body L, K a P na čtyři shodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$.

J. Zhouf

C-I-3. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které jsou řešením nerovnice

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

J. Zhouf

C-I-4. Josef se vracel z výletu. Nejdříve jel vlakem a pak pokračoval ze zastávky na kole. Celá cesta mu trvala přesně 1 hodinu 30 minut a urazil při ní vzdálenost 60 km. Vlak jel průměrnou rychlostí 50 km/h. Určete, jak dlouho jel Josef na kole, když jeho rychlost v km/h je vyjádřena přirozeným číslem stejně jako vzdálenost měřená v km, kterou na kole ujel. *E. Kováč*

C-I-5. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC dané délky a, je-li dán střed P strany AB a bod Q $(Q \neq P)$, který je patou výšky z vrcholu B. *J. Švrček*

C-I-6. Jistý panovník pozval na oslavu svých narozenin 28 rytířů. Každý z rytířů měl mezi ostatními právě tři nepřátele.

a) Ukažte, že panovník může rytíře rozesadit ke dvěma stolům tak, aby každý rytíř seděl u stejného stolu s nejvýše jedním nepřítelem.

b) Ukažte, že v případě libovolného takového rozesazení sedí u každého stolu nejvýše 16 rytířů.

(Nepřátelství je vzájemný vztah: Je-li A nepřítelem B, je i B nepřítelem A.) *J. Šimša*

Výsledková listina celostátního kola 50. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.–2.	Jan Herman	4/4	G kpt. Jaroše, Brno	7 7 7 6 7 7	41
	Martin Tancer	3/4	G Ch. Dopplera, Praha	7 7 6 7 7 7	41
3.	Josef Křišťan	7/7	G Mikulášské nám., Plzeň	7 6 5 7 7 7	39
4.–5.	Tomáš Protivínský	3/4	G kpt. Jaroše, Brno	7 7 3 5 7 7	36
	Ondřej Suchý	7/7	G Mikulášské nám., Plzeň	6 6 3 7 7 7	36
6.–7.	Martin Káldy	2/4	G Ch. Dopplera, Praha	4 6 2 7 7 7	33
	Marek Sulovský	4/4	G tř. Kpt. Jaroše, Brno	6 6 0 7 7 7	33
8.	Jan Kynčl	6/6	G Kostelní, Jilemnice	1 6 4 7 6 7	31
9.	Jiří Koula	4/4	G U Libeň. zámku, Praha	2 6 0 7 7 7	29
10.–11.	Pavel Čížek	2/4	G a OA Kralupy	7 0 2 5 7 7	28
	Jaroslav Hájek	3/4	GMK, Bílovec	6 5 7 1 7 2	28

Úspěšní řešitelé:

12.–13.	Marek Krčál	2/4	G kpt. Jaroše, Brno	0 7 0 7 7 6	27
	Ondřej Kreml	4/4	GMK, Bílovec	7 6 0 5 7 2	27
14.	Ondřej Kurka	7/8	G Ch. Dopplera, Praha	0 5 5 7 7 2	26
15.	Václav Flaška	8/8	Svob. cheb. škola Cheb	7 6 3 2 7 0	25
16.–17.	Pavel Kůs	4/4	G Ch. Dopplera, Praha	7 1 4 2 3 7	24
	Rudolf Stolař	4/4	G kpt. Jaroše 14, Brno	4 1 1 4 7 7	24
18.–19.	Petr Jelínek	8/8	G Parléřova, Praha 6	1 1 2 5 7 7	23
	David Šálek	6/6	G Na Vít. pláni, Praha	2 6 2 0 7 6	23
20.–21.	Tomáš Hanzák	3/4	G E. Beneše, Kladno	3 0 0 6 6 7	22
	Martin Sikora	4/4	GMK, Bílovec	6 5 1 2 7 1	22
22.–26.	Petr Götz	4/4	GMK, Bílovec	6 0 4 2 6 2	20
	Martin Holík	4/4	GMK, Bílovec	5 1 0 2 6 6	20
	Martin Motl	4/4	GMK, Bílovec	2 7 3 2 6 0	20
	Ondřej Šerý	8/8	G a sport. škola Kladno	0 2 4 7 7 0	20
	Pavel Vališ	4/4	G a OA Kralupy	6 0 5 0 7 2	20