Emil Calda

O sestavách s opakováním

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 2, 100–103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150932`

O SESTAVÁCH S OPAKOVÁNÍM

EMIL CALDA

V učebnici algebry určené vyšším třídám středních škol českých, kterou sepsal a roku 1885 vydal Dr. E. Taftl, c. k. professor státního realného a vyššího gymnasia v Klatovech, jsem našel kapitolu nazvanou *Skladna neboli nauka o úkonech formalných*, která mimo jiné pojednává o přestavách (tj. o permutacích), o obměnách (tj. o variacích) a o sestavách (tj. o kombinacích). Zaujal mě způsob, kterým je tu odvozen vzorec pro počet – jak říkáme dnes – k-členných kombinací s opakováním z n prvků. Myslím si, že srovnání s tím, jak je uváděn v současné gymnaziální učebnici *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, by mohlo být zajímavé.

Vyjdeme nejprve z konkrétní situace a vezmeme všechny dvojčlenné kombinace s opakováním ze tří prvků a, b, c. Z každé utvoříme pět trojčlenných kombinací s opakováním takto: tři vzniknou postupným připojením každého z daných prvků a, b, c a zbývající dvě dostaneme tak, že k ní připojíme každý člen, který už v ní obsažen je, a to tolikrát, kolikrát se v ní vyskytuje. Ze šesti dvojčlenných kombinací s opakováním ze tří prvků a, b, c tak dostaneme třicet trojčlenných kombinací s opakováním z těchže prvků:

$$\begin{array}{rlllll}
aa: & aaa, & aab, & aac, & aaa, & aaa \\
ab: & aba, & abb, & abc, & aba, & abb \\
ac: & aca, & acb, & acc, & aca, & acc \\
bb: & bba, & bbb, & bbc, & bbb, & bbb \\
bc: & bca, & bcb, & bcc, & bcb, & bcc \\
cc: & cca, & ccb, & ccc, & ccc, & ccc
\end{array}$$

V těchto třiceti trojčlenných kombinacích s opakováním se každá – jak se snadno přesvědčíme – vyskytuje třikrát. Je to proto, že v každé takto utvořené trojčlenné kombinaci lze každý z jejích tří členů považovat za připojený k nějaké kombinaci dvojčlenné, což znamená, že každá takto utvořená trojčlenná kombinace vznikla třemi způsoby a je proto ve výše uvedeném schématu třikrát. Např. kombinace *aab* vznikla připojením prvku b ke dvojčlenné kombinaci *aa*, připojením členu a ke kombinaci *ab* a ještě jednou připojením členu a ke kombinaci *ab*. Pro počet $K'(3,3)$ trojčlenných kombinací ze tří prvků s opakováním proto platí:

$$K'(3,3) = \frac{(3+2)\cdot K'(2,3)}{3}$$

Tento výsledek zobecníme poměrně snadno. Máme-li všechny k-členné kombinace s opakováním z n prvků, kterých je celkem $K'(k,n)$, utvoříme z každé $n+k$ kombinací $(k+1)$-členných takto: ke každé připojíme jeden člen, který postupně vybíráme jednak z n prvků daných, jednak z k členů, které původní k-členná kombinace obsahuje. Počet takto vzniklých $(k+1)$-členných s opakováním je roven $(n+k)\cdot K'(k,n)$, každá se však v tomto počtu vyskytuje $(k+1)$-krát, neboť vznikla $k+1$ způsoby. Pro počet kombinací s opakováním tak dostáváme rekurentní vztah

$$K'(k+1,n) = \frac{n+k}{k+1}\cdot K'(k,n)\,.$$

Explicitní vyjádření $K'(k,n)$ získáme odtud – s ohledem na to, že platí $K'(1,n) = n$ – následovně:

$$\begin{aligned} K'(k,n) &= \frac{n+k-1}{k}\cdot K'(k-1,n) = \\ &= \frac{n+k-1}{k}\cdot\frac{n+k-2}{k-1}\cdot K'(k-2,n) = \\ &= \frac{n+k-1}{k}\cdot\frac{n+k-2}{k-1}\cdot\frac{n+k-3}{k-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n}{1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \\ &= \binom{n+k-1}{k}\,. \end{aligned}$$

Tím je hledaný vzorec pro počet k-členných kombinací s opakováním z n prvků odvozen.

Někteří čtenáři (zejména mého věku) si možná vzpomenou, že podobný postup používala i gymnaziální učebnice matematiky akademika Eduarda Čecha, podle které se učili počátkem padesátých let. Výše uvedený rekurentní vzorec je v ní odvozen způsobem, pro jehož ilustraci jsou v následující tabulce I vypsány všechny trojčlenné kombinace s opakováním ze tří prvků a, b, c a v tabulce II všechny tyto kombinace, které obsahují prvek a:

$a\,a\,a$	$a\,b\,c$	$b\,c\,c$
$a\,a\,b$	$a\,c\,c$	$c\,c\,c$
$a\,a\,c$	$b\,b\,b$	
$a\,b\,b$	$b\,b\,c$	

Tab. I

$a\,a\,a$	$a\,b\,c$
$a\,a\,b$	$a\,c\,c$
$a\,a\,c$	
$a\,b\,b$	

Tab. II

Na těchto schématech je možno sledovat obecný postup, kterým je v Čechově učebnici odvozen rekurentní vzorec pro $K'(k, n)$.

Mysleme si, že podobným způsobem jako v tabulce I sestavíme do schématu všechny k-členné kombinace s opakováním z n prvků. Všech n prvků v něm zaujímá $k \cdot K'(k, n)$ míst, takže každý z nich se zde vyskytuje $\frac{1}{n} \cdot k \cdot K'(k, n)$-krát. Utvořme podle tabulky II další schéma sestavené právě z těch kombinací, které obsahují zvolený prvek aspoň jednou. Na tyto k-členné kombinace se zvoleným prvkem se můžeme dívat jako na $(k-1)$-členné kombinace z n prvků, které jsou zvoleným prvkem doplněny na kombinace k-členné; jejich počet je $K'(k-1, n)$. V těchto k-členných kombinacích se zvolený prvek vyskytuje jednak jaho doplněný člen, tj. $K'(k-1, n)$-krát, jednak jako jeden z členů vyskytujících se v $(k-1)$-členné kombinaci s opakováním z n prvků, tj. $\frac{k-1}{n} \cdot K'(k-1, n)$-krát. Tento poslední údaj dostaneme ze vztahu pro počet výskytů daného prvku ve všech k-členných kombinacích s opakováním z n prvků, který jsme odvodili výše, tj. dosazením $k-1$ za k do výrazu $K'(k, n)$. A protože v obou schématech se zvolený prvek vyskytuje ve stejném počtu, platí

$$\frac{k}{n} \cdot K'(k, n) = K'(k-1, n) + \frac{k-1}{n} \cdot K'(k-1, n)\,.$$

Odtud snadno dostaneme rekurentní vzorec, který už známe:

$$K'(k,n) = \frac{n+k-1}{k} \cdot K'(k-1,n) \, .$$

Stejným způsobem jako v učebnici z roku 1885 je pak ve zmíněné učebnici Čechově odvozeno explicitní vyjádření pro hledaný počet k-členných kombinací s opakováním z n prvků.

Pokud je mi známo, je tato Čechova učebnice z padesátých let poslední, ve které je vzorec pro počet kombinací s opakováním takto odvozen. Dá se dokonce říci, že to na několik desetiletí byla poslední středoškolská učebnice, ve které se o kombinacích s opakováním vůbec mluvilo.