Drahomír Skořepa

Poznámky k nové učebnici matematiky pro gymnázia Diferenciální a integrální počet

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 1, 43–53

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150968`

POZNÁMKY K NOVÉ UČEBNICI MATEMATIKY PRO GYMNÁZIA DIFERENCIÁLNÍ A INTEGERÁLNÍ POČET

Drahomír Skořepa

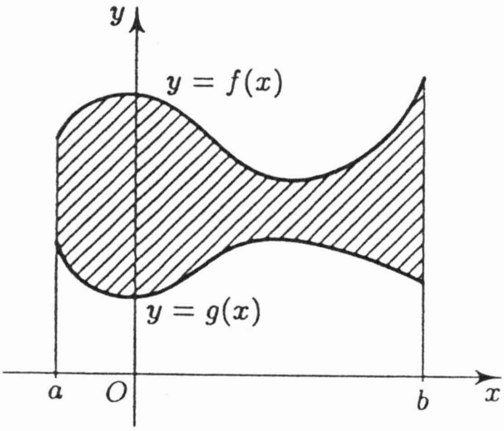
Učebnice diferenciální a integrální počet [1] uzavírá řadu tématicky psaných učebnic pro vyšší gymnázia. Uzavírá celou středoškolskou matematiku podáním základů infinitesimálního počtu. Při tendenci snižování povinných hodin matematiky na gymnáziích, základy diferenciálního a integrálního počtu už standardy vzdělávání ve čtyřletém gymnáziu neobsahují. Přesto si myslím, že tuto učebnici využijí nejen gymnázia s rozšířenou výukou matematiky. Uvedené základy infinitesimálního počtu se totiž stávají náplní volitelných předmětů, zvláště semináře z matematiky. Vyučující jsou si vědomi důležitosti tohoto tematu pro studenty, kteří odcházejí na studijní obory s přírodovědným, ekonomickým a technickým zaměřením.

Chtěl bych se věnovat pouze jedné části učebnice [1], a to určitému integrálu. Tuto část zpracovávají autoři publikace netradičně, nepoužívají totiž Riemannovu součtovou definici určitého integrálu a proto je zavedení určitého integrálu v této učebnici daleko stručnější. Odstraní se velmi obtížný přechod od limity horních a dolních součtů k Newtonovu vzorci pro výpočet určitého integrálu. „Newtonova definice“ určitého integrálu má podle mne ještě další výhody. Umožňuje zavedení výpočtu objemů těles pomocí jejich příčných řezů — vlastně Cavalieriho principu, uváděného v učebnici Stereometrie [2] autorky Evy Pomykalové, jako základního principu pro výpočet objemů těles. Dále umožňuje rozšíření Cavalieriho principu i pro plošné obrazce a je velmi vhodná k seznámení žáků s numerickou integrací, potřebnou k integraci s použitím počítače.

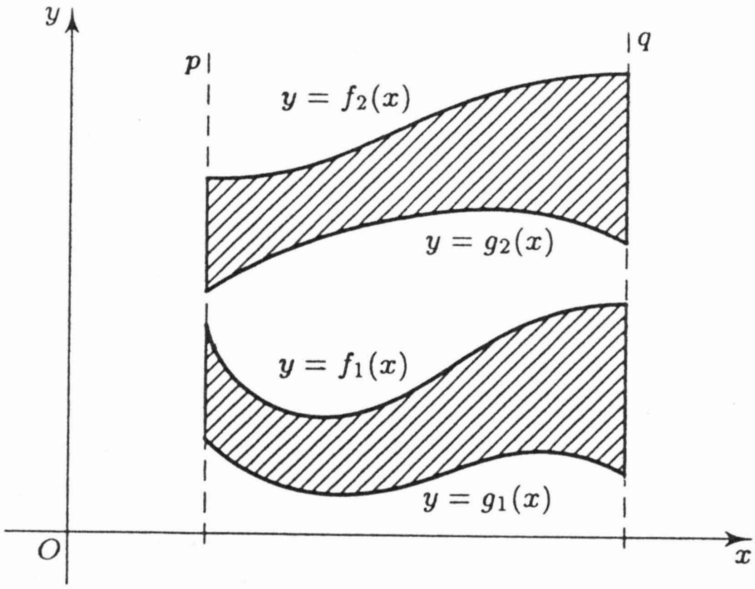
Budu se podrobněji věnovat následujícím tématům.

Obsah rovinného obrazce

Vzorec pro výpočet obsahu útvaru $U = U(a, b, f, g)$ — viz obr. 1 — $S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ přímo navádí k označení rozdílu funkcí $f(x) - g(x) = h(x)$, $h(x) \geq 0$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$, kde $h(x)$ můžeme interpretovat jako délku řezu kolmého na osu x. Pak je



Obr. 1

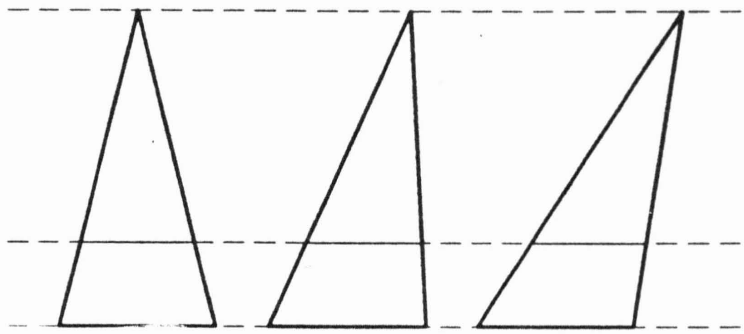


Obr. 2

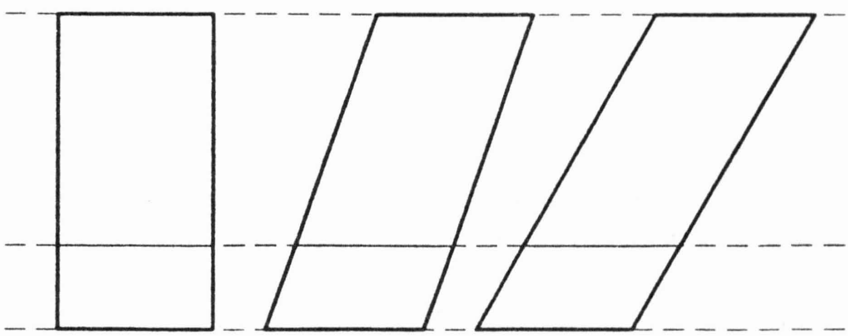
obsah obrazce U dán integrálem $S(U) = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ a umožňuje rozšířit Cavalieriho princip i na rovinné obrazce. Tento princip můžeme formulovat takto:

Máme dva rovinné obrazce U a U' ohraničené dvěma rovnoběžkami $p \parallel q$. Protíná-li každá přímka rovnoběžná s p oba obrazce v úsečkách stejné délky, pak obsahy obou obrazců jsou stejné (obr. 2).

Příklad užití: Všechny trojúhelníky, rovnoběžníky o stejné základně a výšce mají týž obsah (obr. 3 a 4).



Obr. 3



Obr. 4

Můžeme uvažovat o těchto případech:

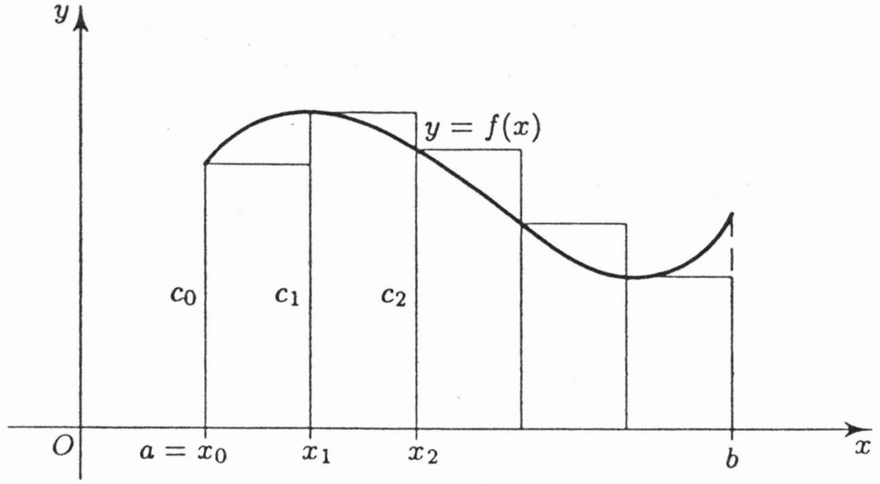
a) $h(x)$ **je konstantní**

$h(x) = c$, pak $S(U) = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c[x]_a^b = (b-a)c$, kde $(b-a)$ je délka základny a $h(a) = h(b) = c$ je výška obdélníka. Dostáváme vzorec pro výpočet obsahu obdélníka a současně návod pro obdélníkovou metodu numerické integrace.

Máme určit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ numericky. Rozdělíme $\langle a, b\rangle$ na n stejných dílů délky $\frac{b-a}{n}$. Dělící body jsou $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, kde $i = 0, 1, \ldots, n$. V každém z dílčích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$

nahradíme funkci $y = f(x)$, konstantní funkcí $y = c_i$ (obr. 5).

Pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}(c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1})$, což je vzorec pro výpočet integrálu obdélníkovou metodou numerické integrace.



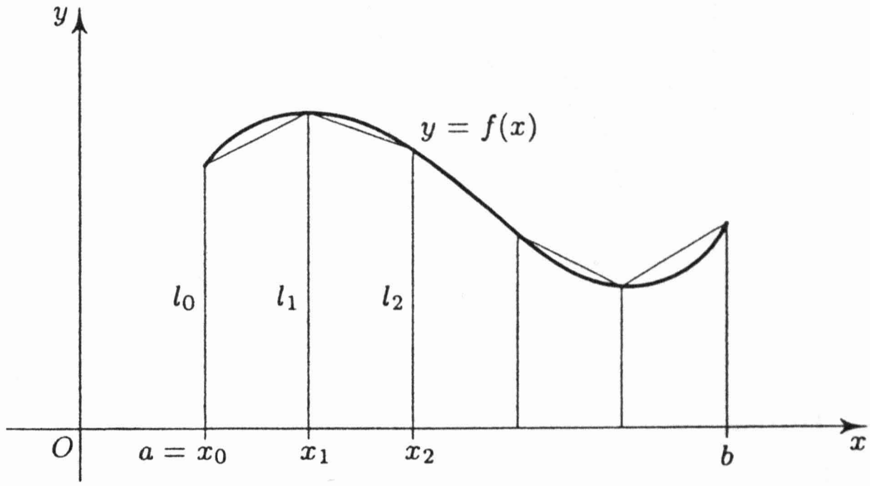
Obr. 5

b) $h(x)$ **je lineární**

$h(x) = cx + d$, vzhledem k předpokládu $h(x) \geq 0\ \forall x \in$ $\in \langle a, b\rangle$ přímka o rovnici $y = cx + d$ neprotíná osu x. Pak dostaneme pravoúhlý lichoběžník. Pro jeho obsah platí $S(U) =$ $= \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \left[cx^2 + dx\right]_a^b$. Označíme-li délky krajních řezů $h(a) = ca + d = h_1$, $h(b) = cb + d = h_2$ dostaneme $S(U) = \frac{c}{2}b^2 + db - \frac{c}{2}a^2 - da = \frac{c}{2}\left(b^2 - a^2\right) + d(b - a) =$ $= \frac{b-a}{2}(cb + ca + 2d) = \frac{b-a}{2}(h_1 + h_2)$ Dostáváme vzorec pro obsah lichoběžníka, ale též návod pro sestavení vzorce pro lichoběžníkovou metodu numerické integrace.

Máme určit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ numericky lichoběžníkovou metodou. Rozdělíme jako v případě a) interval $\langle a, b\rangle$ na n dílčích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, kde $i = 0, 1, \ldots, n$ a nahradíme na každém dílčím intervalu funkci $y = f(x)$ funkcí lineární, procházející body o souřadnicích $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$, $[x_i, f(x_i)]$ (obr. 6) a označíme $f(x_i) = l_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$, pak

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{b-a}{2n}(l_0 + 2l_1 + 2l_2 + \ldots + l_n)$, což je vzorec pro numerickou integraci lichoběžníkovou metodou.



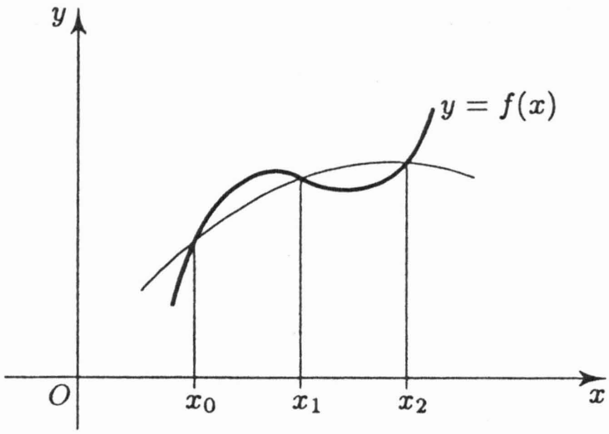
Obr. 6

c) $h(x)$ **je kvadratická**

$h(x) = cx^2 + dx + e$, pak $S(U) = \int_a^b (cx^2 + dx + e)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{2}x^2 + ex\right]_a^b$. Když označíme délky krajních řezů $h(a) = h_0$, $h(b) = h_2$ a délku středního řezu $h\left(\frac{a+b}{2}\right) = h_1$, pak po úpravě $S(U) = \frac{b-a}{6}(h_0 + 4h_1 + h_2)$. Dostali jsme Simpsonův vzorec pro výpočet obsahu obrazce, pokud známe délky krajních řezů a řezu středního.

Můžeme opět přejít k numerické integraci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Tentokrát Simpsonovou metodou. Rozdělíme $\langle a, b\rangle$ na $2n$ dílčích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ délky $\frac{b-a}{2n}$ (sudý počet dílů). Pak $x_i = a + i\frac{b-a}{2n}$, kde $i = 0, 1, \ldots, 2n$. Funkci $f(x)$ nahradíme funkcí kvadratickou tak, že kvadratická funkce nabývá vždy ve třech bodech stejné hodnoty jako funkce $f(x)$ (obr. 7). Pak pro výpočet integrálu dostáváme Simpsonovu formuli

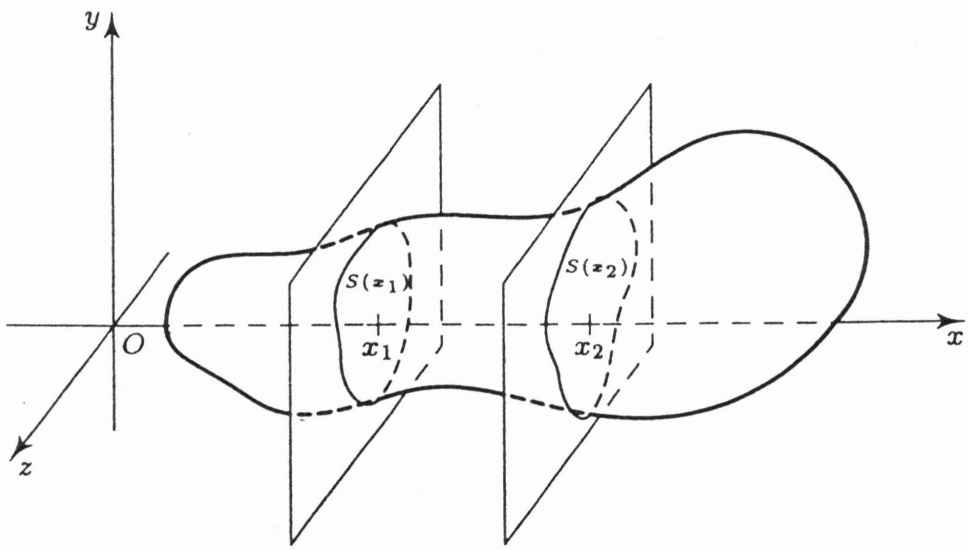
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{b-a}{6n}(h_0 + 4h_1 + 2h_2 + 4h_3 + 2h_4 + \ldots + h_{2n}).$$



Obr. 7

Objem tělesa

V učebnici [1] je odvozen objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru $U = U(a, b, f)$ kolem osy x. $V = \int_a^b \pi f^2(x)\, \mathrm{d}x$, kde $S(x) = \pi f^2(x)$ představuje plochu řezu rovinou kolmou na osu x.



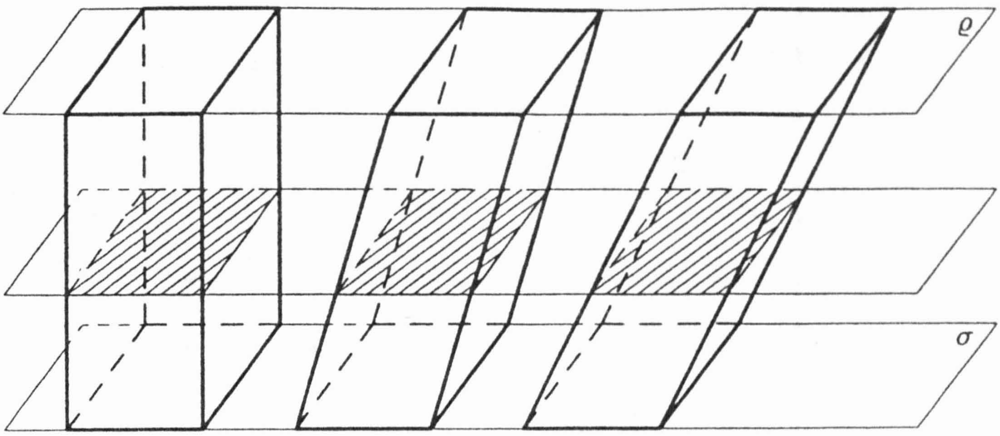
Obr. 8

Vzorec můžeme zobecnit pro všechna tělesa $V = \int_a^b S(x)\, \mathrm{d}x$ (obr. 8) a vyslovit Cavalieriho princip:

Jsou dána dvě tělesa ohraničená dvěma rovnoběžnými rovinami

$\varrho \parallel \sigma$. Protíná-li každá rovina rovnoběžná s ϱ obě tělesa a plošné obsahy řezů obou těles touto rovinou jsou stejné, pak objemy obou těles se sobě rovnají.

Příklad užití: objem kosého hranolu, jehlanu, válce, kužele je týž jako objem kolmého hranolu, jehlanu, válce, kužele o téže podstavě a výšce (obr. 9).



Obr. 9

Uvažujme případy, kdy:

a) **$S(x)$ je konstantní**
$S(x) = S$, pak $V = (b-a)S$, kde $(b-a)$ je výška a S je plocha podstavy (např. hranol, válec).

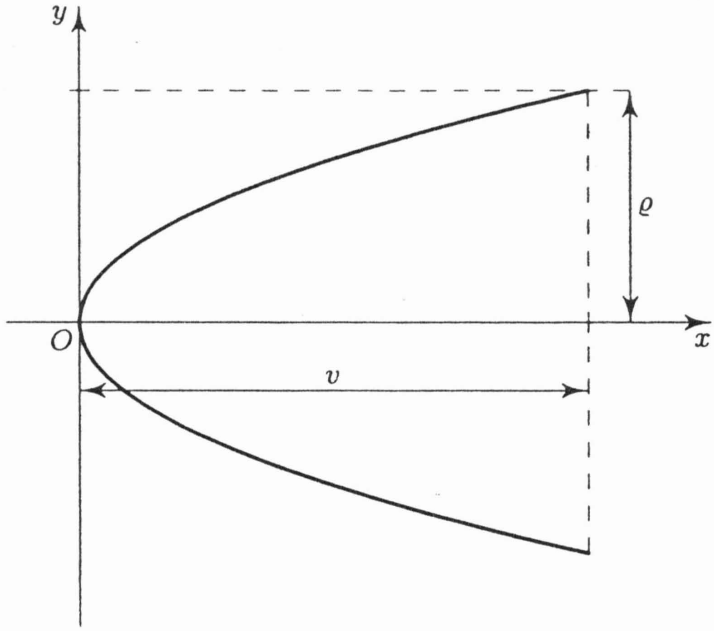
b) **$S(x)$ je lineární**
$S(x) = cx + d$ a plochy krajních řezů jsou S_1, S_2, pak $V = \frac{b-a}{2}(S_1 + S_2)$ (1).

c) **$S(x)$ je kvadratická**
$S(x) = cx^2 + dx + e$ a S_1, S_3 jsou obsahy krajních řezů a S_2 obsah středního řezu, pak $V = \frac{b-a}{6}(S_1 + 4S_2 + S_3)$ — Simpsonův vzorec. Tento vzorec by mohl značně zjednodušit výpočty objemů těles v učebnici stereometrie [2]. Žáci by museli zjišťovat závislost $S(x)$ — plochy řezu tělesa rovinou kolmou na osu x na souřadnici x.

Uvedu několik příkladů. Příklady mohou zpestřit kapitolu 6.3. učebnice [1] *Užití integrálního počtu.*

Příklad 1

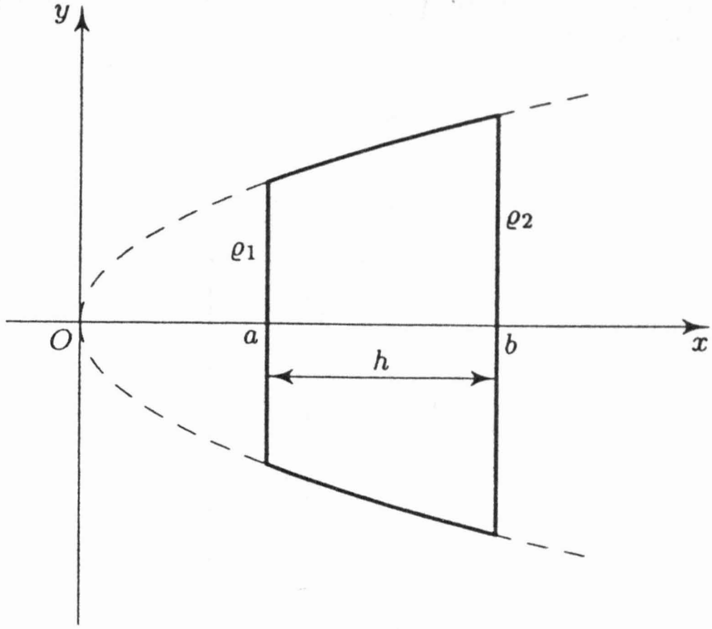
Rotací větve paraboly $y^2 = 2px$ kolem osy x vznikne plocha zvaná rotační paraboloid. Vypočítáme objem tělesa, omezeného rotačním paraboloidem a rovinou kolmou k jeho ose ve vzdálenosti v od vrcholu (obr. 10).



Obr. 10

Řezy tohoto tělesa, kolmé na osu x, budou kruhy. Plošný obsah $S(x)$ řezu bude roven $S(x) = \pi y^2$; $S(x) = \pi 2px$. Jde o lineání funkci proměnné x. Plošný obsah krajního řezu $S_1 = S(0) = 0$, plošný obsah podstavy $S_2 = S(v) = \pi 2pv = \pi\rho^2$, kde ρ je poloměr podstavy ($y^2 = 2px$ pro $x = v$ je $y = \rho$, tedy $\rho^2 = 2pv$). Užijeme vztahu (1): $V = \frac{v}{2}\left(0 + \pi\rho^2\right) = \frac{1}{2}\pi\rho^2 v$. Tedy objem rotačního paraboloidu je roven polovině objemu rotačního válce s poloměrem podstavy ρ a výškou v (tzv. Archimedova poučka).

Pro výpočet objemu tělesa ohraničeného rotačním paraboloidem a dvěma rovinami kolmými k ose paraboloidu (obr. 11), platí při označení souřadnic krajních řezů $x = a$, $y = b$ $S(a) = \pi 2pa = \pi\rho_1^2$; $S(b) = \pi 2pb = \pi\rho_2^2$, kde ρ_1 a ρ_2 jsme označili poloměry podstav. Objem tohoto tělesa $V = \frac{b-a}{2}\left(\pi\rho_1^2 + \pi\rho_2^2\right)$, $V = \frac{1}{2}\pi\left(\rho_1^2 + \rho_2^2\right) \cdot h$, kde $h = b - a$ je výška tělesa.



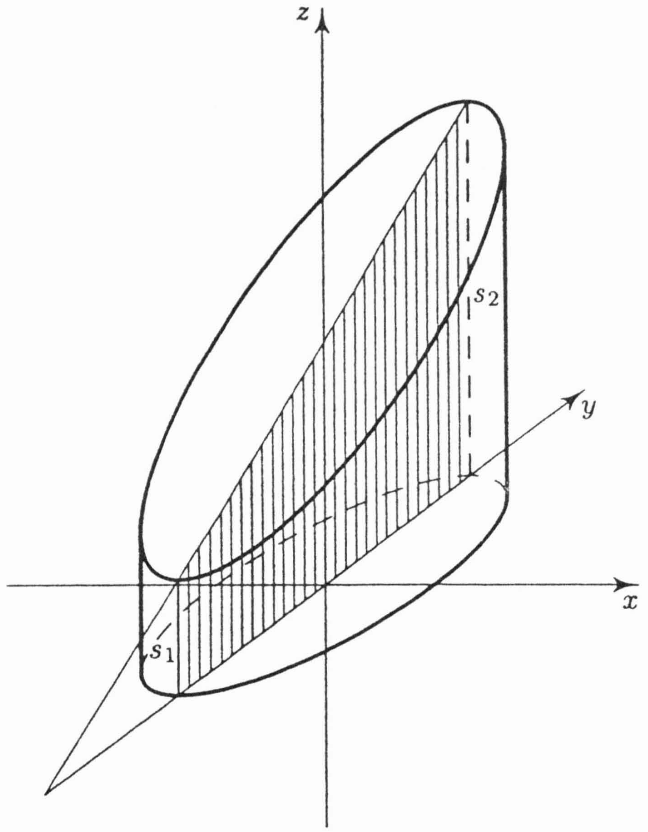
Obr. 11

Příklad 2

Vypočítáme objem rotačního válce o poloměru r, seříznutého rovinou, která není rovnoběžná s podstavou a podstavu neprotíná. Válec umístíme tak, že osa rotace splývá s osou z, střed podstavy splývá s počátkem a průsečnice roviny podstavy a roviny, kterou je válec seříznut, je rovnoběžná s osou x (obr. 12). Každý příčný řez (rovinou kolmou na osu x) je lichoběžník. Obsah lichoběžníka vypočítáme jako součin velikosti střední příčky a výšky. Střední příky všech lichoběžníkových řezů mají stejnou velikost. Jejich délka je rovna $\frac{s_1+s_2}{2}$, kde s_1, resp. s_2, je nejkratší, resp. nejdelší, strana válce. Výška každého lichoběžníkového řezu o souřadnici x_0 je rovna $2y_0$, kde $y_0 = \sqrt{r^2 - x_0^2}$. Potom $S(x_0) = $ $= \frac{s_1+s_2}{2} 2y_0 = (s_1 + s_2)\sqrt{r^2 - x_0^2}$, $S(x) = (s_1 + s_2)\sqrt{r^2 - x^2}$, $V = \int_{-r}^{r} (s_1 + s_2)\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2(s_1 + s_2)\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$, substituce $x = r\sin u$, $\mathrm{d}x = r\cos u\,\mathrm{d}u$;

$V = 2(s_1 + s_2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 u} \cdot r\cos u\,\mathrm{d}u = 2r^2(s_1+$

$$+s_2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = 2r^2(s_1+s_2)\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{2}(s_1+s_2).$$

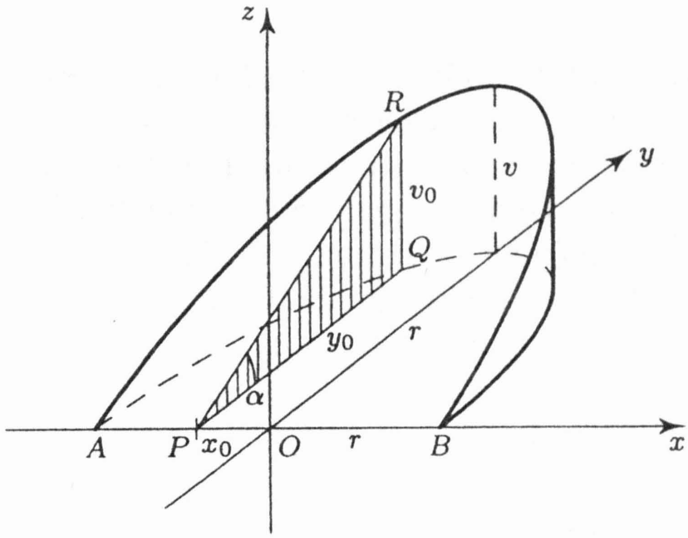


Obr. 12

Příklad 3

Určíme objem tělesa odděleného z rotačního válce o poloměru r rovinou procházející středem podstavy a svírající s podstavou úhel α (válcová úseč).

Průsečnici AB uvedené roviny s podstavou válce zvolme za osu x, její průsečík s osou válce za počátek souřadného systému (obr. 13). Všechny příčné řezy tohoto tělesa (kolmé na osu x) jsou pravoúhlé trojúhelníky. Uvažujme řez o souřadnici x_0 (jde o $\triangle PQR$). Pro plošný obsah řezu platí $S(x_0) = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |QR|$; $|PQ| = y_0$; $|QR| = v_0 = y_0 \operatorname{tg} \alpha$, kde $y_0 = \sqrt{r^2 - x_0^2}$. Pro plošný obsah libovolného řezu můžeme potom psát $S(x) = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right) \operatorname{tg} \alpha$. Plošný obsah řezu je kvadratickou funkcí proměnné x. Užitím Simpsonova vzorce pro objem V tělesa dostáváme $V = \frac{2r}{6} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}rv = \frac{2}{3}r^2v = \frac{2}{3}r^3 \operatorname{tg}\alpha$ (obsahy krajních řezů $S(r) = S(-r) = 0$, $S(0) = \frac{1}{2}rv$).



Obr. 13

LITERATURA:

[1] Hrubý, D. — Kubát, J., *Diferenciální a integrální počet*, Prometheus, Praha, 1997.

[2] Pomykalová, E., *Stereometrie*, Prometheus, Praha, 1985.

[3] Hrubý, D., *Nové učebnice matematiky pro gymnázia — Diferenciální a integrální počet*, MFI **7** (1997-98).

Děkuji Tomáši Hudcovi, studentovi 4. ročníku FI MU Brno, za přepsání textu v TEXu a nakreslení obrázků v METAFONTu.