Karel Rauner

Slapové síly

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 1, 52–59

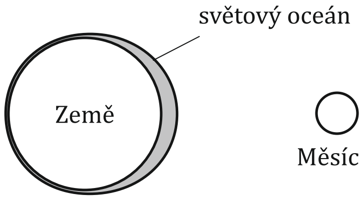
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151067

Slapové síly

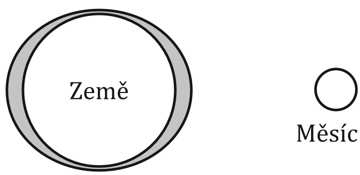
Karel Rauner, Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň

Poznámka redakce: Tento článek vyšel v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální již v roce 1996 (Rauner, K.: Slapové síly. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 73 (1996), č. 4, s. 165–172. Se svolením autora jsme se rozhodli jej znovu otisknout a věříme, že i po čtvrt století od svého prvního uveřejnění přinese čtenářům spoustu zajímavých informací.

Již ve dvou článcích časopisu *Školská fyzika* jsem se zmínil o slapových silách [6, 7] (*Může člověk přežít zrychlení 10 000g?, Kam a kdy za světovými rekordy*). Přitom i řada absolventů fyzikálního studia má o vzniku slapových sil nepřesnou představu. Každý sice ví, že slapové síly jsou na Zemi vyvolávány Měsícem a Sluncem a že jsou příčinou přílivu a odlivu, mnohé však už zarazí fakt, že příliv i odliv se opakují dvakrát denně. Častá představa vzniku přílivu totiž počítá pouze se zvýšením přitažlivé síly Měsíce v nejbližším bodě, proto si řada lidí představuje vznik přílivu a odlivu zdeformováním hladiny světového oceánu podle obr. 1. Správnou situaci podle obr. 2 nevysvětluje zcela uspokojivě ani J. I. Perelman v Zajímavé astronomii [1], podle kterého je na odvrácené straně Země přitahována k Měsíci více pevná část Země než oceán.



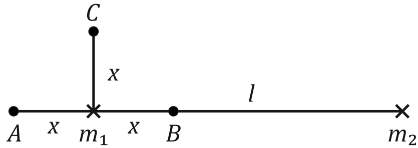
Obr. 1



Obr. 2

Správné vysvětlení i přibližný výpočet velikosti slapových sil nám umožní teprve vědomí toho, že soustava podle obr. 2 se v rovnovážném stavu může udržovat pouze rotací kolem společného hmotného středu.

Skutečnou situaci si zjednodušíme následujícím zadáním: Rotací po kruhových drahách se udržují ve stálé vzdálenosti l dva hmotné body s hmotnostmi m_1, m_2. Za předpokladu, že na soustavu nepůsobí žádné vnější síly, vypočtěte periodu rotace. Určete zrychlení působící na bod s hmotností m ($m \ll m_1$, $m \ll m_2$) ve vzdálenosti $x < l$ od bodu m_1 v bodech A, B, C (obr. 3). Na tomto obrázku je nákresna rovinou rotace.



Obr. 3

Řešte obecně i pro číselné hodnoty odpovídající soustavě Země–Měsíc: $m_1 = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg, $m_2 = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, $l = 384\,400$ km, $x = 6\,378$ km, $m = 1$ kg. Gravitační konstantu přitom dosazujte s hodnotou $G = 6{,}672 \cdot \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}. Vzdálenost x odpovídá zemskému povrchu na rovníku, l je průměrná vzdálenosti středu Měsíce od středu Země.

Nejprve nalezneme polohu hmotného středu soustavy m_1, m_2. Označíme-li x_T vzdálenost hmotného středu od bodu m_1, platí

$$x_T = \frac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2}. \tag{1}$$

Po dosazení je číselná hodnota $x_T = 4\,670$ km. Dostáváme patrně pro mnohé překvapivý výsledek: hmotný střed soustavy Země–Měsíc leží uvnitř Země. Podmínkou pro kruhový pohyb je rovnost dostředivé síly (gravitační přitahování Země a Měsíce) a setrvačné odstředivé síly. Z této podmínky pro Zemi je možné určit úhlovou rychlost rotace:

$$G\frac{m_1 m_2}{l^2} = m_1 \omega^2 x_T \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G m_2}{l^2 x_T}}, \tag{2}$$

po dosazení je

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{l^3}}. \tag{3}$$

Číselně je $\omega = 2{,}665\,7 \cdot 10^{-6}$ s^{-1}, což odpovídá periodě

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2{,}357 \cdot 10^6 \text{ s} = 27{,}28 \text{ dne.}$$

Výsledek je nepatrně odlišný od skutečné periody oběhu soustavy (siderický měsíc), která je 27,32 dne. Důvodem odchylky jsou zaokrouhlené vstupní číselné hodnoty a nepřesnosti vzniklé nahrazením skutečných těles hmotnými body i odchylkou trajektorie Měsíce od kruhové dráhy.

Protože v zadání neuvažujeme rotaci Země kolem vlastní osy (m_1 je hmotná bod), skládá se zrychlení g_a v bodě A ze tří složek: g_{a1} – zrychlení určené gravitačním působením m_1 (Země), g_{a2} – zrychlení určené gravitačním působením m_2 (Měsíce) a g_{a3} – odstředivého zrychlení v neinerciální soustavě. Pro velikost těchto složek platí

$$mg_{a1} = G\frac{mm_1}{x^2}, \quad mg_{a2} = G\frac{mm_2}{(x+l)^2}, \quad g_{a3} = \omega^2(x + x_T). \tag{4}$$

Vzhledem k orientaci jednotlivých složek zrychlení je výsledné zrychlení v bodě A

$$g_a = g_{a1} + g_{a2} - g_{a3}, \tag{5}$$

kladný směr jsme přitom přisoudili orientaci k bodu m_1. Podobně je pro bod B

$$mg_{b1} = G\frac{mm_1}{x^2}, \quad mg_{b2} = G\frac{mm_2}{(l-x)^2}. \tag{6}$$

Odstředivé zrychlení je pro $x < x_T$ $g_{b3} = \omega^2(x_T - x)$, pro $x \geq x_T$ $g_{b3} = \omega^2(x - x_T)$. Pro $x < x_T$ tedy dostaneme v bodě B zrychlení

$$g_b = g_{b1} - g_{b2} + g_{b3},$$

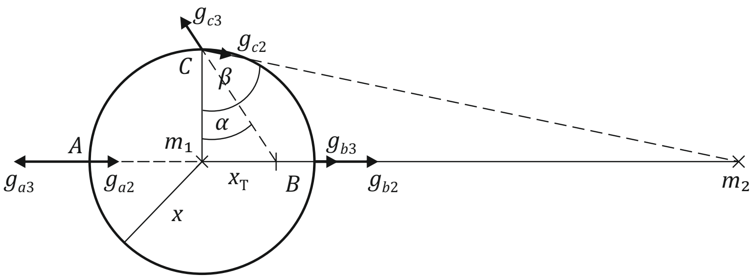
pro $x \geq x_T$

$$g_b = g_{b1} - g_{b2} - g_{b3}. \tag{7}$$

Výsledné vztahy pro zrychlení v bodech A a B jsou

$$\begin{aligned} g_a &= G\frac{m_1}{x^2} + G\frac{m_2}{(x+l)^2} - \omega^2(x + x_T), \\ g_b &= G\frac{m_1}{x^2} - G\frac{m_2}{(l-x)^2} - \omega^2(x - x_T). \end{aligned} \tag{8}$$

Po číselném dosazení je $g_{a1} = g_{b1} = 9{,}801\,614\,0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $g_{a2} = 3{,}211\,32 \cdot \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $g_{a3} = 7,850\,97 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $g_{b2} = 3{,}43170 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $g_{b3} = 1{,}213\,44 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Výsledná zrychlení v bodech A a B jsou $g_a = 9{,}801\,567\,6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $g_b = 9{,}801\,567\,56\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jednotlivé složky zrychlení ve všech uvažovaných bodech jsou zakresleny na obr. 4. Kružnicí je na tomto obrázku znázorněn poloměr Země.



Obr. 4

Velikosti jednotlivých složek zrychlení v bodě C jsou

$$g_{c1} = G\frac{m_1}{x^2}, \quad g_{c2} = G\frac{m_2}{x^2 + l^2}, \quad g_{c3} = \omega^2\sqrt{x^2 + x_T^2}. \tag{9}$$

Po dosazení $g_{c2} = 3{,}317\,85 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $g_{c3} = 5,617\,39 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $g_{c1} = g_{a1} = g_{b1}$. Úhly α, β je možné vypočítat z naznačených trojúhelníků:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_T}{x} \Rightarrow \alpha = 36{,}21^\circ, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{l}{x} \Rightarrow \alpha = 89{,}45^\circ. \tag{10}$$

Vzhledem k tomu, že $g_{c1} \gg g_{c2}$, $g_{c1} \gg g_{c3}$, a k tomu, že vodorovné složky g_{c2}, g_{c3} se prakticky odečítají, je možné určit výsledné zrychlení v bodě součtem průmětů do směru g_{c1}:

$$g_\mathrm{c} = g_{c1} + g_{c2}\cos\beta - g_{c3}\cos\alpha. \tag{11}$$

Po dosazení je $g_c = 9{,}801\,569\,0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Porovnáním jednotlivých hodnot zrychlení je zřejmé, že

$$g_c > g_a > g_b, \tag{12}$$

nebo číselně

$$\begin{gathered} g_c = g_a + 1{,}447 \cdot 10^{-6} = g_b + 1{,}447 \cdot 10^{-6} \quad [\mathrm{m \cdot s^{-2}}], \\ g_a = g_b + 5{,}49 \cdot 10^{-8} \quad [\mathrm{m \cdot s^{-2}}]. \end{gathered} \tag{13}$$

V bodě C působí největší tíhové zrychlení. V bodě A se zrychlení snižuje odstředivou silou, která velikostí převyšuje přitažlivou sílu Měsíce, v bodě B je zrychlení menší vlivem odstředivé síly i přitažlivosti Měsíce. Nerovnost (12) vysvětluje tvar hladiny světového oceánu podle obr. 2.

Největší změna tíhového zrychlení během jednoho dne vyvolaná Měsícem je tedy podle našeho výpočtu $1{,}4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Obvykle udávaná hodnota maximální denní změny tíhového zrychlení, vyvolaná slapovými silami Měsíce, je menší: $1{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Rozdíl je způsoben tím, že jsme počítali tíhová zrychlení v bodech ležících v rovině rotace Měsíce. Těmito body pochopitelně neprochází při rotaci Země kolem vlastní osy žádný konkrétní bod na Zemi. Po korekci na úhel rovníkové roviny a roviny rotace Měsíce by shoda byla výraznější. Vzhledem k dynamice jevu přílivu a odlivu a k podstatnému vlivu tvaru pobřeží není možné vypočítat změnu výšky hladiny. Jsou místa, na kterých jsou slapové přílivy a odlivy nepozorovatelné, větší vliv na hladinu má proměnlivost mořských proudů a směr a síla větrů, jsou však místa, kde pravidelné změny výšky hladiny přesahují 10 metrů. To jsou také místa, kde se vyplatí budovat přílivové elektrárny a vyrábět tak energii na úkor rotační energie Země. Je třeba ještě podotknout, že na výšku přílivu má i vliv snížení tíhového zrychlení s rostoucí vzdáleností od středu Země.

Ze vztahů (8) je vidět, že při růstu x se pro jisté hodnoty dosáhne místa, kde $g_a(x_a) = 0$, $g_b(x_b) = 0$. Takovým bodům se říká *Lagrangeovy librační body* a hmotný bod s hmotností $m \ll m_1$, $m \ll m_2$ by v nich byl v labilní rovnováze [2]. Jestliže některé části objektů s velmi malou hustotou (obří hvězdy) dosáhnou vzdálenosti x_b, přetéká hmota na druhý objekt. Tento jev je znám z astronomie a s přetékáním hmoty v podobných soustavách dvojhvězd je spojena řada dalších zajímavých efektů.

Slapové síly jsou někdy obecněji chápány jako síly, které mají původ v nehomogenitě gravitačního pole. Je pak zřejmé, že takové síly se uplatní i v nerovnovážných stavech soustav, např. při volném pádu dvou těles. Kdyby se jednalo o Zemi a Měsíc, byla by situace podobná obr. 2, setrvačnou odstředivou sílu by nahradila setrvačná síla odpovídající zrychlení Země jako neinerciální soustavy. Představíme-li si naopak případ, kdy Země a Měsíc jsou fixovány v nehybném stavu nějakou další silou (jako by byly přibity na nehmotné prkénko), nastala by situace podle obr. 1.

Často se také v astronomii mluví o slapových silách v souvislosti s rozpadem kosmických těles (komet) v blízkosti planet a hvězd s velkou hmotností. Tuto možnost ověříme na následujícím zjednodušeném příkladu.

Ve vzdálenosti r od hmotného bodu s hmotností M krouží bod s hmotností m_1 spojený nehmotným pevným vláknem délky $l \ll r$ s bodem o hmotnosti m_2. Platí $m_1 + m_2 \ll M$. Body m_1, m_2 krouží synchronizovaně kolem svého hmotného středu tak, že spojnice Mm_2 je stále totožná se spojnicí Mm_1 (obr. 5). Vypočítejte sílu napínající vlákno.

Obr. 5

Protože $l \ll r$, můžeme považovat za vzdálenost hmotného středu soustavy m_1, m_2 od bodu M právě vzdálenost r. Pak podle (3) je úhlová rychlost rotace soustavy

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{r^3}}, \tag{14}$$

Hmotný střed celé soustavy je podle předpokladů v místě bodu M, proto jsou odstředivé síly působící na hmotné body

$$F_{o1} = m_1\omega^2 r, \quad F_{o2} = m_2\omega^2(r+l), \tag{15}$$

gravitační síly

$$F_{g1} = G\frac{Mm_1}{r^2}, \quad F_{g2} = G\frac{Mm_2}{(r+l)^2} \tag{16}$$

Označíme-li sílu napínající vlákno F, platí na koncích vlákna:

$$F + F_{o1} = F_{g1}, \quad F + F_{g2} = F_{o2},$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}(F_{o2} + F_{g1} - F_{o1} - F_{g2}) = \\ &= \frac{1}{2}\omega^2\left[m_2(r+l) - m_1 r\right] + \frac{1}{2}GM\left[\frac{m_1}{r^2} - \frac{m_2}{(r+l)^2}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Výsledek je možno zjednodušit při $m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2}\omega^2 ml + G\frac{Mm}{2r^2}\left[1 - \frac{1}{(1+\frac{l}{r})^2}\right] &\approx \\ \approx \frac{1}{2}\omega^2 ml + GMm\frac{l}{r^3} &= \frac{3GMml}{2r^3}, \end{aligned} \tag{18}$$

přičemž jsme využili přibližného vztahu pro velmi malá x:

$$\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x.$$

Získaného výsledku můžeme využít v několika konkrétních příkladech:

a) $M = 5{,}976 \cdot 10^{24}\ kg$, $m = m_1 = m_2 = 50$ kg, $l = 1$ m, $r = 7\,000$ km. Počítáme přibližně sílu, kterou slapové síly *natahují člověka* na orbitální stanici Země. Po dosazení vychází nepatrná síla $F = 0{,}87$ mN.
b) Ponecháme všechny předchozí údaje, jen Zemi zaměníme za neutronovou hvězdu s $M = 10^{31}$ kg. Síla již vychází znatelná: $F = 146$ N.
c) Přiblíží-li se sonda s člověkem k neutronové hvězdě až na vzdálenost $r = 10^6$ m ($M = 10^{31}$ kg, $m = m_1 = m_2 = 50$ kg, $l = 1$ m), dosahuje síla již velikosti $F = 50\,000$ N, tedy hodnoty, která už snadno *lidské tělo přetrhne* [3].

Poznámka: Ze vztahů (16) můžeme vidět, že výslednice gravitačních sil na body m_1, m_2 neodpovídá gravitační síle, která by působila na bod s hmotností $m_1 + m_2$ umístěný v hmotném středu soustavy m_1, m_2. V nehomogenních gravitačních polích nejsou hmotný střed a těžiště totožnými body. Ze vztahů (16) dostáváme pro r_T – vzdálenost těžiště soustavy m_1, m_2:

$$\frac{m_1}{r^2} + \frac{m_2}{(r+l)^2} = \frac{m_1 + m_2}{r_T^2}, \tag{19}$$

proto

$$r_T^2 = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{r^2} + \frac{m_2}{(r+l)^2}}. \tag{20}$$

V drtivé většině případů však lze rozdíl mezi hmotným středem a těžištěm zanedbat, v příkladu c) je těžiště jen o 0,38 μm blíže k hvězdě než hmotný střed.

Na závěr se podíváme, jak se mohli běžní lidé seznámit s problematikou slapových sil v minulosti. Před 200 lety bylo zdrojem poučení v průměrné rodině hojně vydávané převyprávění bible, které bylo zároveň jakousi encyklopedií. V jedné z takových publikací se o problematice přílivu a odlivu píše [4]:

Aby pak wody mořské pro ustawičné stánj se nezkazyly a neshnily, protož Pán Bůh nařjdil, aby Moře netoliko od ustawičných wětrů sem a tam zmjtané bylo, nýbrž taky mocý měsýce wždy geho přibýwalo a ubýwalo. Nýbrž moře wokolo půlnocy skrze podzemský welmi weliký kanály a průchody až na neywyšssí hory wystupuge, a k polednjmu zase k prwněgssýmu mjstu se nawracuge (str. 9).

Je tedy vidět, že autor publikace měl na příliv a odliv stejný názor, jaký jsme si ilustrovali na obr. 1. Pro úplnost se sluší poznamenat, že vesmír popisovaný v této publikaci je pojat jako geocentrický a na Měsíci tečou řeky (*... též podobně ty řeky a wody, které w měsýci se nacházý, gsau suptylné a čisté, gako křisstál, a kdyby z nich kdo gen gednau se napil, hnedby se wssecek nadul a opuchl. Že pak ty wody, které w měsýcy gsau, dolu neprssý, to zřjzenj Božjho přichazý, aby wody okolo Centrum, nebo prostředku měsýce se točili a plinuli*).

Před sto lety byl zdrojem poučení běžné rodiny Ottův slovník naučný [5]. V něm pod heslem dmutí moře můžeme číst:

Dmutí moře (příliv a odliv, slapy) slove střídavé stoupání a klesání mořských vod, které v období 24 hodin a 52 min. dvakráte se opakuje, tak že na každé místo, na kterém výjev ten vůbec se vyskytuje, ve zmíněném období dvakráte příliv a dvakrát odliv má a které vespolek se střídají tak, že po každém přílivu následuje odliv a naopak. ...

Z těchto a jiných pozorováním zjištěných jevů soudíme, že příčinou dmutí moře jest přitažlivá síla, kterou měsíc i slunce na vodstvo mořské a na zeměkouli vůbec působí. Ježto přitažlivé této síly do dálky rychle (čtverečně) ubývá, jest přirozeno, že na přivrácené straně země přitažlivost měsíce silněji se jeví, než ve středobodu země a na odvrácené straně z téhož důvodu opět slaběji než ve středu země nebo na straně k měsíci přivrácené. Mysleme si, že na straně země k vrcholícímu měsíci přivrácené leží vodstvo mořské, rovněž tak na straně odvrácené, pak bude na obou stranách příliv moře a to na přivrácené straně větší přitažlivostí a na odvrácené menší přitažlivostí měsíce, než jaká na střed zemský se jeví, způsobený asi tak jako člověk, ve vodě po krk stojící, dvojím způsobem vodou zaplaven býti může, buď, že mu voda nad hlavu vystoupí nebo že mu dole nohy hloub zapadnou, čímž mu voda také hlavu zaplaví.

Tolik tedy Ottův slovník naučný, na dvou stranách textu tohoto hesla není ani zmínka o odstředivé síle.

Literatura

[1] Perelman, J. I.: *Zajímavá astronomie.* Naše vojsko, Praha, 1954.
[2] Randa, M.: Hillovy plochy, Lagrangeovy librační body. *Školská fyzika*, 2 (1994–95).
[3] Niven, L.: *Neutronová hvězda. Těžká planeta*, Mladá fronta, Praha, 1979.
[4] Martin z Rochem: *Weliký Žiwot Pana a Spasytele Nasseho Krysta Gežísse...* Impresio Karlo-Ferdinande, Praha, 1759.
[5] *Ottův slovník naučný, VII. díl.* J. Otto, Praha, 1893.
[6] Rauner, K.: Může člověk přežít zrychlení 10 000 g? *Školská fyzika*, 3 (1995–96).
[7] Rauner, K.: Kam a kdy za světovými rekordy. *Školská fyzika*, 4 (1995–96).