Učitel matematiky

František Kuřina

Heronův důkaz Heronova vzorce

*Učitel matematiky*, Vol. 6 (1998), No. 4, 234–237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151314`

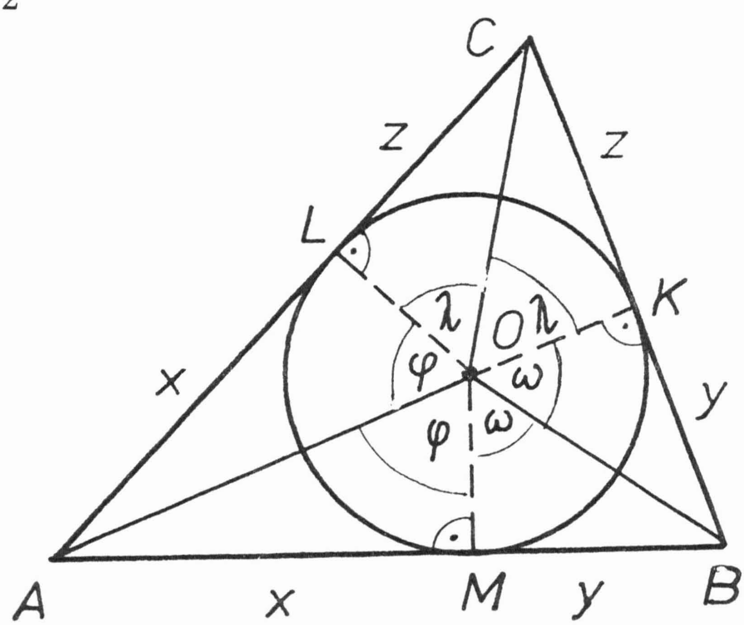
# HERONŮV DŮKAZ HERONOVA VZORCE

František Kuřina

Pavel Leischner cituje ve svém článku *Heronův vzorec ještě jednou* [1] několik autorit, podle nichž Heron z Alexandrie svůj vzorec „pouze používal". Když jsem psal svůj článek *Heronův vzorec a kosinová věta* [2], byl jsem rovněž toho názoru. Karel Mačák mi však poslal kopii odstavce z Cantorovy *Historie matematiky [3]* s údajným Heronovým odvozením Heronova vzorce, které je zajímavé a které zde stručně připomenu.

Z Leischnerova článku přejímám označení podle obr. 1 a tyto výsledky:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c), \quad x = s-a, \quad y = s-b, \quad z = s-c. \qquad (1)$$

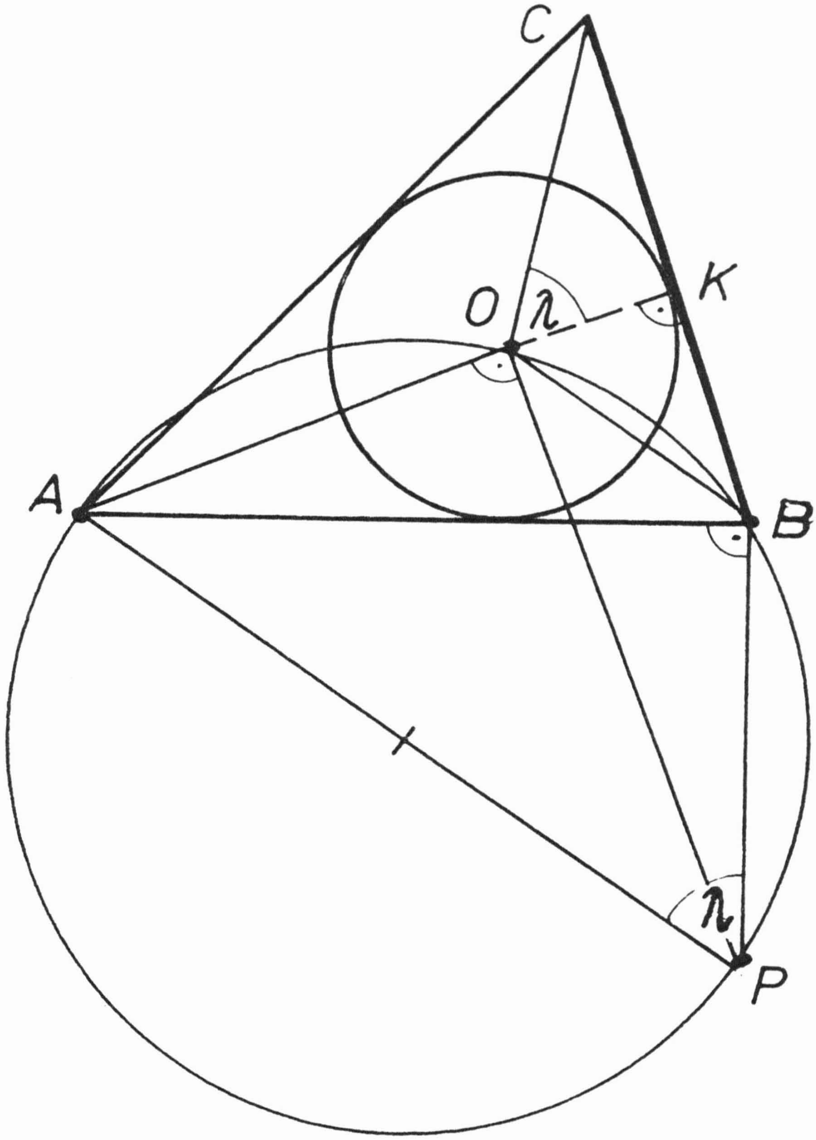



Obr. 1

Sestrojíme-li bod $P$ podle obr. 2 tak, aby platilo

$$|\sphericalangle ABP| = 90^\circ \text{ a } |\sphericalangle AOP| = 90^\circ,$$

je čtyřúhelník $AOBP$ tětivový a platí tedy $|\sphericalangle APB| = \lambda$, neboť podle obr. 1 a 2 je $\varphi + \omega + \lambda = 180^\circ$.




Obr. 2

Z obr. 3 plynou následující podobnosti:

$$\triangle ABP \sim \triangle CKO, \tag{2}$$

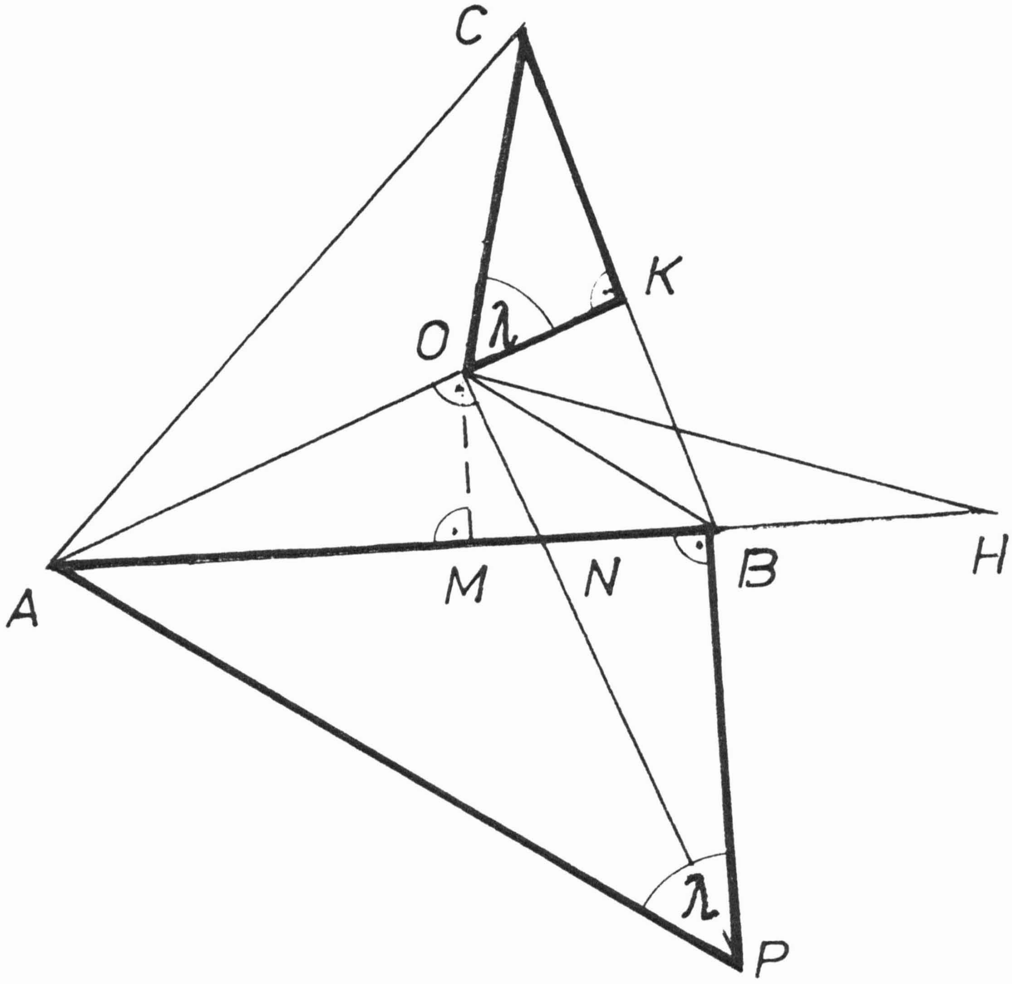
$$\triangle NBP \sim \triangle NMO. \tag{3}$$

Sestrojíme-li bod $H$ podle obr. 3 tak, aby $|BH| = |CK|$, je $|AH| = s$ a z podobnosti (2) plyne:

$$\frac{|BA|}{|BP|} = \frac{|CK|}{|OK|} = \frac{|BH|}{|MO|}. \tag{4}$$

Tuto rovnost můžeme přepsat na tvar:

$$\frac{|BA|}{|BH|} = \frac{|BP|}{|MO|}. \tag{5}$$




Obr. 3

Z podobnosti (3) ovšem plyne dále

$$\frac{|BP|}{|MO|} = \frac{|BN|}{|MN|}. \tag{6}$$

Je tedy

$$\frac{|BA|}{|BH|} = \frac{|BN|}{|MN|}. \tag{7}$$

Přičteme-li k oběma stranám této rovnosti číslo

$$\frac{|BH|}{|BH|} = \frac{|MN|}{|MN|} = 1,$$

dostaneme

$$\frac{|AH|}{|BH|} = \frac{|BM|}{|MN|}. \tag{8}$$

Tuto rovnost můžeme upravit na tvar

$$\frac{|AH|^2}{|BH| \cdot |AH|} = \frac{|BM| \cdot |AM|}{|MN| \cdot |AM|}. \tag{9}$$

Protože podle Euklidovy věty pro trojúhelník $ANO$ platí

$$|MN| \cdot |AM| = |MO|^2,$$

můžeme rovnost (9) přepsat na tvar

$$(|AH| \cdot |OM|)^2 = |AH| \cdot |BM| \cdot |BH| \cdot |AM|. \qquad (10))$$

Protože je $|AH| \cdot |OM| = S$ obsah trojúhelníku $ABC$, platí podle (1):

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

To je důmyslné, leč zcela elementární odvození Heronova vzorce, které *M. Cantor* připisuje samotnému Heronovi slovy: „Heron ist … kein Freund von Citaten, und so wăre es mőglich, dass er einen zu seiner Zeit schon anderweitig bekannten Satz hier vortrűge. Den Beweis dűrfen wir wohl mit grősserer Sicherheit sein Eigenthum nennen, weil sonst kein Grund abzusehen wăre, warum er ihn mittheilte.“ ([3], str. 361).

## LITERATURA:

[1] Leischner, P., *Heronův vzorec ještě jednou*, Učitel matematiky **6** (1997/98), 230.

[2] Kuřina, F., *Heronův vzorec a kosinová věta*, Učitel matematiky **6** (1997/98), 16 - 17.

[3] Cantor, M., *Vorlesungen űber Geschichte der Mathematik*, I Teubner, Leipzig, 1894.