Jan Mařík
Několik metodických poznámek

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 4, 225–234

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151431

NĚKOLIK METODICKÝCH POZNÁMEK

JAN MAŘÍK

Dokončení z minulého čísla

Diferenciály

Zde je situace poněkud tristní. Oblíbený postup je beznadějně nesprávný. Proč je možno psát $df(x)/dx$, ale ne $df(2)/d2$? Je $df(-x)$ diferenciál funkce f v bodě $-x$ nebo diferenciál funkce $g(x) = f(-x)$? Je dovoleno psát $1/dx$? Kde je zdroj všech těchto nejasností? Pokusím se odpovědět na poslední otázku na základě chyby, která se objevila v jedné české učebnici. Autor píše: „Nechť x je reálné číslo a f je funkce diferencovatelná v x. Definujeme lineární funkci $df(x)$ ustanovením $(df(x))(h) = f'(x) \cdot h$ pro každé reálné číslo h. Vezmeme-li $f(x) = x$, pak obdržíme $(dx)(h) = h$.[1] Tedy v obecném případě $(df(x)(h)) = f'(x) \cdot (dx)(h) = (f'(x)dx)(h)$, tudíž $df(x) = f'(x)dx$ (rovnost mezi lineárními funkcemi)."

Chyba je zde založena na čemsi podobném optickému klamu. Symbol $df(x)$ označuje diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x, tedy musí být čten $(df)(x)$. (Něco jako např. $d(f,x)$ by bylo méně zavádějící.) Tedy: v $df(x)$ není žádné $f(x)$. Není třeba zdůrazňovat, že diferenciály objevující se v integrálech jsou něco jiného. Abychom si to uvědomili, pišme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi$, $dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$. Co je nesprávné ve vzorci $dx\,dy = \sin\varphi\cos\varphi(dr)^2 + r((\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2)dr\,d\varphi - r^2\sin\varphi\,\cos\varphi(d\varphi)^2$? Proč ho nemůžeme použít, jestliže si přejeme vypočítat integrál pomocí polárních souřadnic? Proč nemůžeme řešit rovnici $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ užitím $\int P(x,y)\,dx + \int Q(x,y)\,dy = c$?

Pokusil jsem se ukázat, že když používáme diferenciály, pak předkládáme mnoho konvencí a „licencí", kterým studenti na této úrovni nemohou rozumět. Teoreticky by vylepšení bylo velmi jednoduché: nemluvit o diferenciálech, ty vedou ke komplikacím

[1] Vidíme, že dx je identické zobrazení reálných čísel.

(řečeno zdvořile). My všichni však víme, že učebnice z fyziky a techniky jsou naneštěstí zamořeny diferenciály všech typů a tak je nemůžeme pominout. Požadovali jsme oprávnit něco neoprávnitelného. Jak řešit tento problém — nevím.

Neurčité integrály

Zde je situace srovnatelná se situací u diferenciálů. Předpokládejme, že f je polynom. Otázka „co je $\int f(x)\,dx$" (nebo jakékoli jiné značení) se může zdát malicherná. Ale co je např. $e^{\int x\,dx} + \int x^2\,dx$? Nechci tím naznačit, že by bylo obtížné definovat něco jako toto, ale zastávám názor, že studenti analýzy by takovou definici neocenili (já také ne). Podle mých zkušeností prakticky žádný student nedokáže vysvětlit, jak je možné, že získal $0 = 1$, když vyšel ze vzorce $\int f'\,g = f\,g - \int f\,g'$ pro funkce f a g takové, že $f(x) = g(x) = 1$ pro každé x.

Postup naznačený v oblíbených učebnicích vytvořil iluzi, že $\int f(x)\,dx$ je „neurčitý integrál bez integrační konstanty". Taková „definice" selže, dokonce i když f je polynom; máme např. $(x+1)^2 = \int 2(x+1)dx = \int 2x\,dx + 2\int dx = x^2 + 2x$ (na obou stranách máme „neurčité integrály bez integrační konstanty").

Můžeme získat mnohem přesvědčivější příklad, kam nešťastné „neurčité integrály" mohou vést, když „použijeme substituci". Např., $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin v\,dv = -\frac{1}{2}\cos v = -\frac{1}{2}\cos 2x$, avšak substituce $w = \sin x$ dá $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2w\,dw = w^2 = (\sin x)^2$, tedy $(\sin x)^2 = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Ale vše toto je téměř zanedbatelné, když to srovnáme s jinými problémy spojenými s „neurčitými integrály". Co by mělo znamenat $\int \frac{dx}{x^2}$? Vzorec jako $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$ $(x \neq 0)$ naznačuje něco, co není pravda; ukazuje, že zvláště, když f je funkce taková, že $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ pro každé $x \neq 0$, pak existuje c tak, že $f(x) = -\frac{1}{x} + c$ pro každé $x \neq 0$. (Analogické „věty", spojené se vzorcem $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, je často užíváno v kapitolách o diferenciálních rovnicích.) Myslím si, že každý student, učící se o derivacích, by měl vědět, že funkce f, definovaná předpisem: $f(x) = -\frac{1}{x}$ pro $x < 0$, $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$ pro $x > 0$ splňuje vztah $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pro každé $x \neq 0$. Vzorec

$$\int \frac{dx}{1+3(\sin x)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(2\mathrm{tg}\,x)$$

je, v jistém smyslu správný, když ho však užijeme pro výpočet integrálu

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+3(\sin x)^2},$$

dostaneme $I = 0$ (to je samozřejmě nesprávné, poněvadž integrovaná funkce je kladná).

Rád bych zdůraznil, že podobné obtíže nejsou nijak výjimečné. Předpokládejme, že R je racionální funkce dvou proměnných takových, že $R(\sin x, \cos x)$ má smysl pro každé reálné x. Nechť $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ $(x \in (-\infty, \infty))$, $I = \int_0^{2\pi} f$. Předpokládejme dále, že $I \neq 0$. Aplikujeme standardní metodu a dostaneme funkci S takovou, že $F(x) = S(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2})$, splňující vztah $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (-\pi, \pi)$. Tedy $I = F(\pi-) - F((-\pi)+) = \lim_{z\to\infty} S(z) - \lim_{z\to-\infty} S(z)$; nikdy však nemůžeme vypočítat I na základě mechanické aplikace „základní věty matematické analýzy“, užívající F jako „neurčitý integrál“. Tento příklad ukazuje, že musíme naše studenty trénovat, aby věnovali pozornost tomu, kde je vzorec platný, aby naše vzdělávací úsilí mělo vůbec nějaký kladný účinek. Mnoho studentů si pravděpodobně představuje, že „proměnná“ je jednoduše „jistá věc“ a tedy odpoví na otázku jako: „Pro která x je vzorec $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ platný“ tím, že řekne: „Nerozumím tomu, co chcete“. Jestliže studenti analýzy např. derivují bez váhání funkci $\ln(\ln(\sin x))$, pak odpovídající úsilí (jeho i naše) bylo pouze plýtváním energie.

Mimochodem, musíme řádně vysvětlit rozdíl mezi f a $f(x)$. Studenti musí vědět, že slova jako „funkce $x^3 - 2$“ jsou pouze slovní zkratkou pro např. „funkci f, definovanou vztahem $f(x) = x^3 - 2$ pro všechna reálná x“. (Myslím si, že takové vysvětlení je i na této úrovni jednodušší, než správné značení $\langle x^3 - 2\rangle$ $(x \in (-\infty, \infty))$). Ale, všeobecně, bychom neměli psát $f(x)$ namísto f, jestliže pro to nemáme zvláštní důvod.

V souvislosti s „neurčitými integrály" máme opět dobrou příležitost pozorovat výsledky našeho výcviku. Každý ví, že $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$. (Nebo bych měl psát $\ln|x| + c$? Bylo by správné, kdybych psal b namísto c?) Avšak ne každý už ví, jak derivovat funkci $\ln|x|$. Podobně: každý ví, že $(1+3x^3)e^{x^3}$ je derivace funkce xe^{x^3}, ale ne každý už umí dokázat, že $\int(1+3x^3)e^{x^3}\,dx = xe^{x^3}$.

Naši studenti někdy dávají směšné otázky jako: „Jak můžete integrovat, když neužíváte znak $\int$?" Rád bych zdůraznil, že je to nejen možné, ale obvykle i jednodušší. Jestliže si zavedeme poměrně neškodnou licenci, že můžeme psát $(f(x))'$ namísto $f'(x)$, můžeme nahradit „záhadné" formule

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x dx = x\sin x + \cos x$$

vzorcem

$$x\cos x = (x\sin x)' - 1\cdot\sin x = (x\sin x + \cos x)' .$$

Tedy nepotřebujeme integraci per partes, potřebujeme pouze větu o derivaci součinu s několika pokyny o jejím užití v konkrétních případech. Podobně nepotřebujeme větu o substituci, pouze potřebujeme pravidlo pro derivování složené funkce, a některé dovednosti ve vyjádření funkce ve formě $f'(g(x))\cdot g'(x)$. (Máme

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+(x/2)^2}\left(\frac{x}{2}\right)' 2 = (\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2})'$$

pro $x \in (-\infty, \infty)$; podobně

$$\frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{\ln x}(\ln x)' = (\ln\ln x)'$$

pro $x > 1$ atd.). Měli bychom si také uvědomovat, jak obtížné je vysvětlit význam vzorce jako

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$

nebo

$$\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin u \, du$$

($u = 2x$) bez použití toho, co si přejeme dokázat.

Mechanický postup může vytvářet různé iluze. Jednou z nich je, že „každou funkci lze integrovat“. Zvláště substituce mohou být považovány v této souvislosti za „všelék“. Tedy se může přihodit, že student (pravděpodobně podvědomě) věří, že „můžeme vypočítat každý integrál“, ale není schopen integrovat $(1+x^2)^{-2}$.

Situace je komplikována skutečností, že máme také funkce tvaru $\int_a^x f$, kde x je proměnná a $\int_a^x$ je „určitý integrál“ (např. Riemannův integrál). Pak máme neurčitý integrál a neurčitý Riemannův integrál. Pravděpodobně by nebylo příliš nebezpečné pro studenty technických věd poplést tato dvě označení. Ale byl jsem šokován zkušeností v tomto směru s dobrou skupinou postgraduálních studentů. Setkal jsem se s velkým množstvím pověr. Ukázal jsem, že derivace funkce F definované vztahem $F(x) = x^2 \cos x^{-2}$ ($x \neq 0$), $F(0) = 0$ není lebesgueovsky integrovatelná v $[0,1]$. (Je jednoduché zjistit, že F je diferencovatelná v $(-\infty, \infty)$.) Studenti věděli, že každá funkce spojitá v $\langle 0,1 \rangle$ je zde lebesgueovsky integrovatelná, překvapivě však většina z nich nebyla schopna z této skutečnosti vyvodit, že F' nemůže být spojitá v $[0,1]$. Pak jsem zjistil, že pouze málo z nich je schopno formulovat „základní větu matematické analýzy“. Tedy jsem jim dal tento domácí úkol:

(H) Nechť F je funkce taková, že F' je omezená v $[0,1]$. Nechť U (resp. L) je horní (resp. dolní) Riemannův integrál funkce F' v $\langle 0,1 \rangle$. Ukažte, že $L \leqq F(1) - F(0) \leqq U$.

Samozřejmě nikdo neměl s úkolem žádné potíže. (Máme $F(1) - F(0) = \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n F'(c_j)(x_j - x_{j-1}) \leqq U$ pro libovolné x_j: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$; význam c_j je samozřejmý.) Ale posléze mnoho studentů mělo problémy s následující větou: Nechť F je taková funkce, že F' existuje (všude) v $[0,1]$ a nechť F' je riemannovsky integrovatelná přes $[0,1]$, nechť M je její Riemannův integrál. Pak $M = F(1) - F(0)$.

Každý z těchto studentů věděl, že funkce, která je spojitá v $[0,1]$, je riemannovsky integrovatelná; nikdo se nezdál být překvapen, že v dříve uvedeném domácím úkolu (H) jsem mluvil o L a U (které ukazují, že F nemusí být riemannovsky integrabilní, dokonce i když je ohraničená), ale vzdor tomu všemu někteří studenti stále opakovali, že každá derivace je spojitá. Toto byla pro mě psychologická záhada. Také jsem slyšel od studentů, že každá derivace (jestliže existuje na kompaktním intervalu) je zde ohraničená a že derivace je spojitá, jestliže je ohraničená. Jeden z nejlepších studentů dokonce prohlašoval, že neurčitý Riemannnův integrál je vždy diferencovatelný (a aplikoval toto na funkci, která byla riemannovsky integrovatelná, ale nespojitá).

Na elementární úrovni bych neužíval slovo „neurčitý integrál" vůbec, mluvil bych pouze o primitivních funkcích. Měli bychom si také klást sami sobě otázku, zda je nutné mluvit o Riemannově integrálu. Je jasné, že si s tím nevystačíme (někdy potřebujeme $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$). Je také jasné, že potřebujeme vědět, že součet $\sum_{j=1}^{n} f'(c_j)(x_j - x_{j-1})$ je blízký k $f(x_n) - f(x_0)$, jestliže $x_0 \leqq c_1 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq c_n \leqq x_n$ a dělení je jemné a f' je spojitá v $[x_0, x_n]$; ale pro toto nepotřebujeme Riemannův integrál. Existuje mnoho „lepších" (neříkám obecnějších) integrálů. Navrhuji následující definici: (konečnou) funkci f nazýváme integrovatelnou v $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když existuje konečná množina S a funkce F spojitá v $[a, b]$ taková, že $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b) - S$. Pak definujeme $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. (Je jednoduché si uvědomit, že rozdíl $F(b) - F(a)$ nezávisí na volbě funkce F s těmito vlastnostmi. Mimochodem, f nemusí být definována v S.) S analogickými předpoklady můžeme definovat $\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$. Takto se můžeme zbavit nevlastních integrálů.

Konečně bych rád zdůraznil, že v kursech analýzy pro vysokoškoláky bychom jim neměli zatajovat nedostatky Lebesgueova integrálu. Tyto nedostatky jsou nejlépe patrné, když pracujeme na reálné přímce. Jak jsme se zmínili, F' nemusí být lebesgueovsky integrovatelná v $[0, 1]$, dokonce i když F je diferencovatelná v $(-\infty, \infty)$; $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ neexistuje jako Lebesguesův integrál; funkce f spojitá v $(0, 1\rangle$ taková, že $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 f = 0$ nemusí být lebesgueovsky integrovatelná v $(0,1)$ atd. Na druhou stranu bychom měli zdůraznit, že když F je spojitá na $[0,1]$, diferencovatelná na $(0,1)$ a jestliže Lebesgueův integrál $\int F'$ existuje, pak je roven $F(1)-F(0)$.

Taylorova věta

Zde bychom se opět měli ptát, kde ji potřebujeme. Podívejte se na *Sample Final Exam*, Math 215, 5b): Použitím Lagrangeova tvaru zbytku v Taylorově rozvoji funkce $\frac{1}{x}$ okolo bodu 10, udejte odhad chyby, když užijete $\frac{1}{10}-\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}$, jako aproximaci čísla $\frac{1}{11}$. Toto zajisté není dobrý příklad její užitečnosti.

Zajisté nemusím mluvit o teoretické důležitosti Taylorovy věty. Mimo jiné může být užitečná pro numerické odhady, např. výrazu $f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$. Avšak, pro obecné n je obvykle jednodušší odhadnout $f(x)-\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$ na základě vyšetřování $\sum_{k=n+1}^{\infty} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$ než užitím Taylorovy věty.

Vzorce jako $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ nebo $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ mohou být dokázány velmi jednoduše, když použijeme větu o derivování mocninné řady a základy lineárních diferenciálních rovnic. Např. nechť $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $(x\in(-\infty,\infty))$. Derivováním člen po členu dostaneme $f'=g$, $g'=-f$, tedy $f''+f=0$. Jelikož $c\cdot\cos+d\cdot\sin$ je obecné řešení rovnice $y''+y=0$, existují konstanty c a d takové, že $f=c\cdot\cos+d\cdot\sin$. Zřejmě je $0=f(0)=c$, $1=g(0)=f'(0)=d\cdot\cos 0=d$, tedy $f=\sin$, $g=f'=\cos$. Položíme-li $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ $(|x|<1)$, zjistíme, že h je řešením rovnice $(1+x)y'=\alpha y$ atd. Tedy pro tyto účely o zbytku hovořit nemusíme.

Mimochodem: je nebezpečné vytvářet iluzi, že Taylorova řada vždy reprezentuje funkci v nějakém okolí odpovídajícího bodu. Podle mých zkušeností jsou vysokoškoláci často překvapeni, že nulová funkce a funkce f, definovaná vztahem $f(x)=\exp(-x^{-2})$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$, mají stejnou Maclaurinovu řadu.

Známkování a domácí úkoly

Zde se setkáváme s problémy i v těch nejjednodušších případech. Může se např. přihodit, že student se pokouší zodpovědět následující otázky:
1. Je řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ konvergentní?
2. Je $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+2)^2}$ konvergentní?

Představte si, že píše:

Řada v 1. je konvergentní podle integrálního kritéria (máme $\left(-\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ pro každé $x > 1$ a tato funkce klesá v $(1, \infty)$ a $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right) = 0$). Řada v 2. konverguje, poněvadž $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+2)^2} = 0$.

Je jasné, že pominul to podstatné a za řešení si nezaslouží kladné hodnocení.

Navíc bývá zvykem klasifikovat stejně „nesprávné řešení“ a „žádné řešení“. Pro stavitele mostů je ovšem mnohem významnější, kolik jeho mostů spadlo, než kolik ne. Tedy, když dáme 0 bodů za žádné řešení, měli bychom dávat záporné body za nesprávné řešení.

Je také otázkou, jak známkovat domácí úkoly. Myslím si, že je neúčinné vracet studentům jejich domácí úkoly se známkou 2 bez dalšího komentáře. Každý domácí úkol by měl být navrácen s otázkami (a snad i radami) a měli bychom vyžadovat opravy chyb.

Nejdůležitější věc je, samozřejmě, výběr zadávaných problémů. Většina studentů nerozumí úloze „Najdi obecné řešení rovnice $y'' - y' - 6y = 0$“. (To nemá příliš mnoho co dělat s otázkou, zda umějí či neumějí napsat správný vzorec). Měli bychom také zadávat úkoly jako toto: Vysvětlete, co míníme, když řekneme, že výraz $ce^{3x} + de^{-2x}$ je obecným řešením rovnice $y'' - y' - 6y = 0$ v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Závěr

Nemůžeme obviňovat studenty, že si přejí pouze přežít. Budou se učit v první řadě to, co je vyžadováno v domácích úkolech a u zkoušky. Bylo by plýtváním energie zdůrazňovat, že by si měli pamatovat věty, ne pouze vzorce, když zadáváme jen úlohy, v nichž jsou potřeba pouze vzorce. Měli bychom zadávat jasně formulované matematické úlohy (jednoduchá úloha je také úloha). Něco jako: řešte diferenciální rovnici

$$(\operatorname{tg} x + e^x)dx + \left(\frac{1}{y \ln y} + \frac{y}{y^2+1}\right) dy = 0$$

není matematický problém, dokonce i když mnozí studenti by byli připraveni ji „řešit“.

Jeden student mi řekl: „Definice mi nepomáhají řešit úlohy.“ Měl pravdu, samozřejmě v jistém smyslu. Ale měli bychom z takových prohlášení vyvodit závěr, že úlohy, které zadáváme, jsou vybrány špatně.

Měli bychom cvičit od začátku studenty, aby rozuměli výrokům obsahujícím slova „pro všechna ...“ nebo „pro některé ...“ (= „existuje ... takové, že“). Musíme začít s něčím jednoduchým, bylo by beznadějné vnucovat definici spojitosti studentovi, který není schopen porozumět pojmu ohraničené funkce. Ale myslím si, že každý student by měl být schopen pochopit rozdíl mezi výrokem „Pro každého ženatého muže existuje žena, která je jeho manželkou“ a „Existuje žena, která je manželkou všech ženatých mužů“. Další častá chyba je, že naši studenti si často představují, že výrok jako „pro každé A ...“ definuje jisté A, a tedy říká něco analogického jako „Každý student má své studijní číslo. On má modré oči.“

My, učitelé, si někdy stěžujeme, že středoškoláci jsou „nezřetelní“. Toto by nás nemělo překvapovat, protože my sami po nich nežádáme, aby výrazní byli. Zlepšili bychom stav, kdybychom zavedli ústní zkoušení. Jestliže neposloucháme odpovědi našich studentů, neuvědomujeme si plný rozsah tohoto hororu. (Písemné zkoušení přispívá našemu sebeklamání, že jsme studenty něco naučili).

Říkal jsem na začátku, že nevím, jak zmíněné problémy prakticky řešit. Ale rád bych dal alespoň jeden návrh. Zkoušíme naučit studenty příliš mnoha poznatkům. Není v lidských silách učitele látku „řádně“ vysvětlit (a samozřejmě, není v silách studentů jí porozumět). Nemíním tím, že naši studenti by měli rozumět např. definici limity, ale myslím, že by měli mít dobrou intuitivní představu o pojmech jako je limita, derivace, součet řady atd. (Měli by vědět, že cosi jako „součet řady je součet všech jejích členů“ nic neříká.) Setkal jsem se se studentem, který věděl, že $x^2y'' + xy' + y = 0$ je Eulerova rovnice, ale neměl vůbec představu o geometrickém významu derivace. Dokázal derivovat $x \sin x$, ale nikoli už konstantní funkci.

V prvních dvou letech budeme – pravděpodobně vždy – muset nahrazovat definice jen náznaky, vyslovovat věty bez důkazů nebo nahrazovat důkaz ilustrací. Ale měli bychom být svým způsobem důslední. Žádný z nás netoleruje chyby jako $\frac{1+3b}{6} = \frac{1+b}{2}$, ale zdá se, že mnozí z nás jsou lhostejní, když si studenti pletou $A \Rightarrow B$ s $B \Rightarrow A$ (Podívejte se na část o rovnicích.) Myslím si, že druhá chyba je mnohem nebezpečnější. Někdo by mohl říci, že příklady ukazující, že vzorce bez vět nefungují, jsou vytvořené uměle. Toto, samozřejmě, je věcí názoru. Já bych naopak řekl, že uměle vytvořené jsou příklady ukazující, že vzorce fungují i bez vět. Ale myslím si, že jeden z hlavních pedagogických problémů je nalézt rozumný poměr mezi „kladnými“ a „zápornými“ příklady. Je pravdou, že někdy získáme správný výsledek i když jsou naše úvahy nesprávné. Ale nedoporučoval bych naše studenty v tomto směru vychovávat.