Jaroslav Seibert

# Netradiční pohled na pythagorejské trojice čísel

*Učitel matematiky*, Vol. 4 (1996), No. 3, 155–160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151441

# NETRADIČNÍ POHLED NA PYTHAGOREJSKÉ TROJICE ČÍSEL

Jaroslav Seibert

Pythagorova věta o délkách stran pravoúhlého trojúhelníka je zřejmě nejznámějším matematickým poznatkem. Již ve staroegyptských památkách z doby XII. dynastie (přibližně 4 000 let př. n. l.) je mezi jinými číselnými vztahy zaznamenána také rovnost $6^2+8^2=10^2$. Řešení pythagorejské rovnice $x^2+y^2=z^2$ přirozenými čísly podává Eukleides v desáté knize Základů. Taková řešení je zvykem označovat jako pythagorejské trojice čísel, pythagorejská čísla nebo pythagorejské trojice. Některé netradiční pohledy na tento známý problém si v tomto příspěvku připomeneme.

## Jak určovat pythagorejské trojice

I žák základní školy ví, že mezi pythagorejské trojice patří např. (3,4,5), (5, 12,13) nebo (8,15,17). Pythagorejských trojic je však nekonečně mnoho a známe také způsob, jak je určit. K jejich výpočtu lze použít vztahů $x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $z=p^2+q^2$, kde $p,q$ jsou libovolná nesoudělná přirozená čísla. Že jde skutečně o délky stran pravoúhlého trojúhelníku se snadno můžeme přesvědčit přímým dosazením do rovnice $x^2+y^2=z^2$. Aby uvedená trojice byla tzv. *primitivní*, tj. aby čísla $x,y,z$ byla po dvou nesoudělná, musí se čísla $p,q$ lišit paritou, tedy jedno bude sudé a druhé liché. Kdyby totiž byla čísla $p,q$ obě sudá, pak i čísla $x,y,z$ budou sudá a tedy soudělná. Ke stejnému závěru však dospějeme, i když čísla $p,q$ budou obě lichá. Předpokládejme ještě, že by i při opačné paritě čísel $p,q$ byla čísla $x=p^2-q^2$, $z=p^2+q^2$ současně dělitelná nějakým lichým prvočíslem $m$. Pak by však i součet $z+x=2p^2$ a rozdíl $z-x=2q^2$ musely být dělitelné číslem $m$, a tedy i čísla $p,q$, což je ve sporu s jejich nesoudělností. Obdobně lze uvažovat i při dokazování nesoudělnosti čísel $x,y$ resp. $y,z$.

Jsou-li $k,p,q$ libovolná přirozená čísla, pak je pythagorejská také každá trojice čísel $x = k(p^2 - q^2)$, $y = 2kpq$, $z = k(p^2 + q^2)$, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením do rovnice $x^2 + y^2 = z^2$.

Vraťme se však k případu, kdy $k = 1$. Méně známým způsobem jak ukázat, že z uvedených vztahů dostaneme skutečně pythagorejské trojice a současně dát číslům $p, q$ konkrétní význam, je užití goniometrických funkcí. Představme si pravoúhlý trojúhelník $ABC$, v němž odvěsny a přepona mají postupně délky $p, q, \sqrt{p^2 + q^2}$.
Z definice goniometrických funkcí pro ostré úhly $\alpha, \beta$ plyne

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{p^2}{p^2+q^2},$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{q^2}{p^2+q^2}.$$

Po odečtení obou vztahů dostaneme

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta) = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}.$$

Současně však je $\cos\alpha\cos\beta = \frac{p \cdot q}{p^2 + q^2}$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{p \cdot q}{p^2 + q^2}$.
Potom $\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$.
Protože pro každé $\alpha, \beta$ platí $\sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1$, dostáváme postupně

$$\left(\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}\right)^2 + \left(\frac{2pq}{p^2 + q^2}\right)^2 = 1, (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

Zamysleme se ještě nad otázkou, zda pro každé přirozené číslo $n > 2$ existuje pythagorejská trojice, v níž $n$ určuje délku jedné z odvěsen. Pokud je $n$ sudé číslo, pak zřejmě stačí volit $p = \frac{n}{2}$, $q = 1$. Dosazením do příslušných vztahů dostaneme $x = \frac{n^2}{4} - 1$, $y = n$, $z = \frac{n^2}{4} + 1$, přitom $z = x + 2$. Bude-li nyní $n$ liché číslo, můžeme například psát $n = 2q + 1$. Protože $y = 2pq$ je vždy sudé, musí být $x = p^2 - q^2 = n = 2q+1$. Odsud postupně $p^2 - q^2 = 2q+1$, $p^2 = (q+1)^2$, $p = q+1$. Pak $x = 2q+1 = n$, $y = 2q^2 + 2q$, $z = 2q^2 + 2q + 1$, přitom $z = y + 1$. V tabulce jsou uvedeny pythagorejské trojice pro nejmenší hodnoty $n$.

| $n$ | 3 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 3 | 5 | 8 | 7 | 9 | 24 | 11 | 13 | 48 | 15 |
| $y$ | 4 | 12 | 6 | 24 | 40 | 10 | 60 | 84 | 14 | 112 |
| $z$ | 5 | 13 | 10 | 25 | 41 | 26 | 61 | 85 | 50 | 113 |

## Pythagorejské trojice a geometrická posloupnost

Nechť je dána geometrická posloupnost $a, aq, aq^2, \ldots$, v níž první člen $a$ i kvocient $q$ jsou přirozená čísla. Uvažujme tři její po sobě jdoucí členy $a_n = a \cdot q^{n-1}$, $a_{n+1} = a \cdot q^n$, $a_{n+2} = a \cdot q^{n+1}$ a sestavme z nich čísla $x = 2a_{n+1} + a_n = aq^{n+1}(2q+1)$, $y = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} = aq^{n-1}(2q^2 + 2q)$, $z = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = aq^{n-1}(2q^2 + 2q + 1)$.

Podle dříve odvozených vztahů je zřejmé, že $(x, y, z)$ je pythagorejská trojice. Zjistili jsme tedy, že z členů každé geometrické posloupnosti můžeme generovat nekonečně mnoho pythagorejských trojic. Pro pevné hodnoty $a, q$, tzn. pro konkrétní geometrickou posloupnost, jsou navíc všechny pravoúhlé trojúhelníky odpovídající jednotlivým pythagorejským trojicím navzájem podobné. V tabulce najdeme pythagorejské trojice vytvořené pomocí prvních tří členů několika geometrických posloupností pro $a = 1$.

| $q$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| $y$ | 4 | 12 | 24 | 40 | 60 | 84 | 112 | 111 |
| $z$ | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 | 85 | 113 | 145 |

## Pythagorejské trojice a Fibonacciho posloupnost

Fibonacciho posloupnost je zřejmě nejznámější posloupností přirozených čísel. Připomeňme si, že její členy, tzv. Fibonacciho čísla, získáme z rekurentního předpisu $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ při volbě $f_1 = f_2 = 1$. Postupně tedy dostáváme čísla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Jednoduché vlastnosti Fibonacciho posloupnosti ji přímo předurčují k uplatnění v rozmanitých situacích. V článku [7] jsme ukázali jednu možnost, jak z Fibonacciho čísel určovat pythagorejské trojice. Podobných postupů lze objevit více, dalšímu se nyní budeme podrobněji věnovat.

Uvažujme nejprve prvních pět Fibonacciho čísel a vypočítejme $f_1 \cdot f_5 = 5$, $f_2 f_4 = 3$, $2f_3 = 4$. Tato čísla tvoří pythagorejskou trojici. Vezměme jiných pět po sobě jdoucích Fibonacciho čísel. Začneme-li druhým členem posloupnosti, dostaneme obdobným způsobem trojici (8,10,6), vyjdeme-li od třetího členu, obdržíme trojici (26,24,10), od čtvrtého členu trojici (63,65,16) atd. Ve všech případech jde o trojice pythagorejské. Zkusme odvodit, zda jde o obecně platnou zákonitost. Kromě rekurentního předpisu přitom užijeme vztah $f_{n+1}^2 = f_n \cdot f_{n+2} + (-1)^n$, jehož platnost pro libovolné přirozené číslo $n$ jsme v citovaném článku dokázali matematickou indukcí.

Snadnými úpravami postupně dostáváme

$$f_n f_{n+4} + f_{n+1} f_{n+3} = (f_{n+2} - f_{n+1}) \cdot (f_{n+2} + f_{n+3}) +$$
$$+ f_{n+1} f_{n+3} = f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+2} + f_{n+2} f_{n+3} - f_{n+1} f_{n+3} +$$
$$+ f_{n+1} f_{n+3} = f_{n+2}^2 + f_{n+2} \cdot (f_{n+3} - f_{n+1}) = 2f_{n+2}^2,$$
$$f_n + f_{n+4} - f_{n+1} f_{n+3} = (f_{n+2} - f_{n+1}) \cdot (f_{n+2} + f_{n+3}) -$$
$$- f_{n+1} f_{n+3} = f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+2} - f_{n+2} f_{n+3} - 2f_{n+1} f_{n+3} =$$
$$= f_{n+2}^2 + f_{n+2}(f_{n+3} - f_{n+1}) - 2f_{n+2}^2 + 2(-1)^n = 2(-1)^n.$$

Vynásobením předchozích vztahů získáme pro každé přirozené číslo $n$

$$(f_n f_{n+4})^2 - (f_{n+1} f_{n+3})^2 = (f_n f_{n+4} + f_{n+1} f_{n+3})$$
$$(f_n f_{n+4} - f_{n+1} f_{n+3}) = 2f_{n+2}^2 \cdot 2(-1)^n = (-1)^n \cdot (2f_{n+2})^2.$$

Je-li $n$ liché, platí $(f_{n+1} f_{n+3})^2 = (f_n f_{n+4})^2 + (2f_{n+2})^2$,
pro $n$ sudé $(f_n \cdot f_{n+4})^2 = (f_{n+1} f_{n+3})^2 + (2f_{n+1})^2$.

Popsaným způsobem můžeme tedy z Fibonacciho posloupnosti vytvořit nekonečně mnoho pythagorejských trojic.

**Rekurentní předpisy pro pythagorejské trojice**

Zajímavým problémem je hledání rekurentních předpisů, pomocí nichž bychom mohli z jedné pythagorejské trojice vygenerovat postupně nekonečně mnoho dalších trojic. Zřejmě nejjednodušší je případ, kdy rekurentní předpisy vyjadřují čísla počítané pythagorejské trojice $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ jako lineární kombinace čísel předchozí trojice $(x_n, y_n, z_n)$.

Příslušné rovnice mají tvar

$$x_{n+1} = a_1x_n + a_2y_n + a_3z_n,$$
$$y_{n+1} = b_1x_n + b_2y_n + b_3z_n,$$
$$z_{n+1} = c_1x_n + c_2y_n + c_3z_n,$$

kde všechny koeficienty jsou celá čísla. V jednom příspěvku v časopise Mathematics Teacher [4] byly podrobněji zkoumány následující předpisy:

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n + 2z_n,$$
$$y_{n+1} = x_n + 2y_n + 2z_n,$$
$$z_{n+1} = 2x_n + 2y_n + 3z_n.$$

Všimněme si alespoň jedné zajímavosti. Po odečtení prvních dvou rovnic dostáváme $y_{n+1} - x_{n+1} = y_n - x_n$, tzn. rozdíl čísel, které určují délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku je ve všech generovaných trojicích stále stejný. Zvolíme-li tedy např. $(x_1, y_1, z_1) = (3, 4, 5)$, bude i v každé generované trojici rozdíl $x_n - y_n = 1$. Konkrétně $(x_2, y_2, z_2) = (20, 21, 29)$, $(x_3, y_3, z_3) = (119, 120, 169)$, $(x_4, y_4, z_4) = (696, 697, 985)$ atd. Pro výchozí trojici $(x_1, y_1, z_1) = (5, 12, 13)$ dostáváme $(x_2, y_2, z_2) = (48, 55, 73)$, $(x_3, y_3, z_3) = (297, 304, 425)$ atd.

Podívejme se nyní na celý problém obecněji. Z rovnosti $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = z_{n+1}^2$ snadno dostaneme soustavu šesti rovnic pro devět neznámých koeficientů v uvedených lineárních kombinacích:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$$
$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 = 0$$
$$a_1a_3 + b_1b_3 - c_1c_3 = 0$$
$$a_2a_3 + b_2b_3 - c_2c_3 = 0.$$

Z nekonečně mnoha řešení této soustavy nás zajímají pouze celočíselná řešení, kterým navíc odpovídají trojice kladných čísel $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$. Při jejich hledání nám samozřejmě musí pomoci počítač. Tak nalezneme např. rekurentní předpisy

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4x_n + y_n + 4z_n \\ y_{n+1} &= 7x_n + 4y_n + 8z_n \\ z_{n+1} &= 8x_n + 4y_n + 9z_n. \end{aligned}$$

Při volbě $(x_1, y_1, z_1) = (3, 4, 5)$ dostaneme postupně trojice (36,77,85), (561,1240,1361) atd.

Vyhovují dokonce i rekurentní předpisy, v nichž připouštíme, že některé koeficienty mohou být i záporná čísla, jako např.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n + y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= -x_n + 2y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= -2x_n + 2y_n + 3z_n, \end{aligned}$$

které při volbě $(x_1, y_1, z_1) = (3, 4, 5)$ vedou na trojice (8,15,17), (33,56,65), (120,209,241) atd.

Kromě několika jednodušších případů jsou však koeficienty v rekurentních předpisech takové, že již pro malá $n$ nabývají počítaná pythagorejská čísla velkých hodnot.

## LITERATURA

[1] Balada, F., *Z dějin matematiky*, SPN, Praha 1959.

[2] Bertucci, J.E., *From Fibonacci numbers to Pythagorean triples*, Mathematics Teacher, 81, č. 5, 1991, s. 356.

[3] Carbeau, W.E., *Pythygorean triples from geometric sequences*, Mathematics Teacher, 86, č. 9, 1993, s. 783.

[4] Carbeau, W.E., Bolkhovsky, A., *Pythagorean triples recursively*, Mathematics Teacher, 88, č. 2, 1995, s. 176.

[5] Maiorano, P.J., *Triples by way of trigonometry*, Mathematics Teacher, 88, č. 3, 1995, s. 254-256.

[6] Redmond, D., *Pythagorean triples*, Mathematics Teacher, 87, č. 1, 1994, s. 60.

[7] Seibert, J., *Dvě setkání s Fibonacciho posloupností*, Učitel matematiky, č. 12, 1994, s. 8-12..