Šárka Gergelitsová; Tomáš Holan

# Problém s potrubím

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 98 (2023), No. 2, 6–12

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151710`

5.

$$\frac{7+9+11}{13+15+17+19+21+23}=\frac{3\cdot(7+11)/2}{6\cdot(13+23)/2}=\frac{3\cdot 9}{6\cdot 18}=\frac{1}{4}$$

**Poďakovanie**

Ďakujem anonymnému recenzentovi za pozorné prečítanie rukopisu a konštruktívne pripomienky, ktoré prispeli ku zvýšeniu kvality článku. Tento príspevok vznikol s podporou grantu KEGA 001UMB-4/2023.

L i t e r a t ú r a

[1] Dlab, V.: Pravoúhlý trojúhelník v pravoúhlém trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 97 (2022), č. 4, s. 24–31.

[2] `https://math1089.in/fractions-are-beautiful/16/`.

# Problém s potrubím

*Šárka Gergelitsová, Tomáš Holan, MFF UK, Praha*

V tomto textu bychom chtěli představit jeden problém a ukázat různé možnosti jeho řešení.

Představte si, že v domě nebo na zahradě máme otvor, ze kterého bude vytékat voda, a někde jinde druhý otvor, do kterého bychom chtěli vodu přivést. Oba otvory mají svoji polohu a svůj směr (ten si můžeme představovat jako směr, kterým poteče voda) a k vedení vody máme neomezenou zásobu kolen – trubek zahnutých uprostřed o 90 stupňů.

Předpokládejme, že délka každého ramene zahnuté trubky je 1, že trubky povedou vždy ve směru osy $x$ nebo osy $y$ nebo osy $z$ a že voda vytéká z otvoru (profilu) na souřadnicích (0,0,0) ve směru osy $y$.

*Otázka*: Do jakých souřadnic a z jakých všech směrů dokážeme vodu potrubím složeným z kolen dopravit?

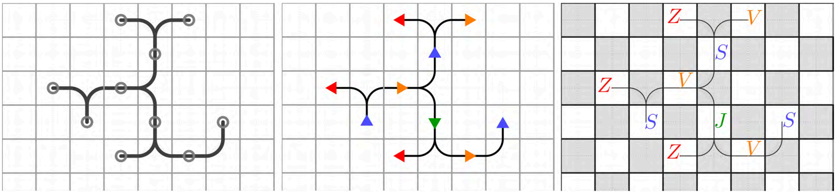
Tento text bude o hledání odpovědi: pokud se nechcete připravit o zábavu, tak ho teď odložte a zkuste odpověď najít sami!

## První cesta – tužka a papír

### Zjednodušení na rovinu

Zkusme nejdříve vyřešit jednodušší úlohu a zjistit, jaká by byla odpověď, kdyby se celé potrubí mohlo nacházet jen v rovině – třeba kdyby muselo ležet na zemi.

Abychom získali nějakou představu, nakreslíme si obrázek; vlastně tři obrázky, využijeme je postupně všechny:




Obr. 1: Znázornění potrubí a směrů toku vody

Každé připojené koleno nás posune o jednu pozici vodorovně a o jednu pozici svisle, můžeme se tedy dostat jen do takových pozic, které se od startovní pozice ve vodorovném a svislém směru liší buďto obě o lichý, nebo obě o sudý počet kroků.

Když si ke koncům kolen přikreslíme šipky znázorňující tok vody či písmena označující směry (jako na mapě) nebo když si plochu „šachovnicově obarvíme“, zdá se, že platí:

**Postřeh 1.** Dostaneme se pouze do „bílých polí šachovnice“.

*Důkaz.* Pokud vyjdeme z bodu (0,0), pak nás první koleno dovede do bodu s oběma souřadnicemi lichými a další koleno do bodu s oběma souřadnicemi sudými, parita se v každém kroku střídá.

**Postřeh 2.** Do pozic v sudých řádcích (počítáno od výchozí pozice) se můžeme dostat jenom svisle, do pozic v lichých řádcích jenom vodorovně. Totéž platí pro sloupce.

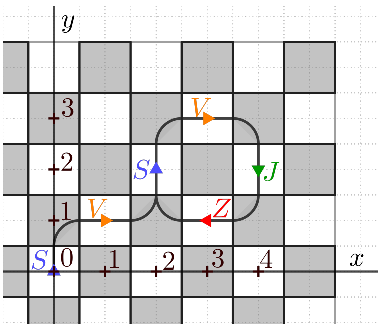
*Důkaz.* Stejně jako parita souřadnic se střídají směry: po směru svislém (rovnoběžně s osou $y$) musí následovat směr vodorovný (rovnoběžně s osou $x$). Vyjdeme-li svislým směrem, pak poté, co urazíme cestu sudé délky (projdeme sudý počet kolen), budeme mířit směrem S nebo J. Na konci cest liché délky budeme mířit směrem V nebo Z.

**Postřeh 3.** Do každé dostupné pozice se můžeme dostat pouze v jednom ze čtyř možných směrů.

**Postřeh 4.** V každém řádku nebo sloupci se střídají vždy dva navzájem opačné směry.

*Důkaz.* Už víme, že vyjdeme-li z bodu (0,0) ve směru osy $y$, pak body se sudými souřadnicemi procházíme ve směrech S nebo J, body s lichými souřadnicemi ve směrech V nebo Z. Tím jsme ale zatím nevyloučili, že některým bodem, kterým jsme prošli směrem S, bychom při jiné volbě cesty mohli projít směrem J. Podobně pro směry V a Z. To dokážeme dále tím, že jednoznačně určíme směr pohybu v uzlu s danými souřadnicemi.

Zapišme si pomocí směrů jednu možnou cestu, která vyjde z počátku. Například pro cestu ze 6 kolen: SV, VS, SV, VJ, JZ, ZS cílovou pozici snadno určíme i bez obrázku 2: Ve svislém směru jdeme čtyřikrát o 1 jednotku severně a dvakrát na jih, celkově jsme se tedy posunuli o 2 jednotky severně. Podobně určíme posun v ose $x$: čtyři jednotky doprava (V) a dvě doleva (Z) nás celkově posunou o 2 jednotky doprava. Jsme v bodě o souřadnicích (2,2). Pro počty $p_{\mathrm{S}}$, $p_{\mathrm{J}}$, $p_{\mathrm{V}}$, $p_{\mathrm{Z}}$ znaků S, J, V, Z v zápisu cesty jsou souřadnice cíle $(p_{\mathrm{V}} - p_{\mathrm{Z}}, p_{\mathrm{S}} - p_{\mathrm{J}})$.




Obr. 2: Cesta ze šesti kolen SV–VS–SV–VJ–JZ–ZS

A teď se zeptejme obráceně: jak vede cesta, která vychází z počátku směrem na sever a prochází bodem (2,2)?

Souřadnice bodu jsou sudé, víme tedy, že každá cesta, která v něm končí, sestává ze sudého počtu kolen, a tedy končí buď znakem S, nebo znakem J.

Který z nich to je, poznáme podle součtu souřadnic cílového bodu: Kolena se napojují rameny téhož směru, uvnitř cesty se proto posouváme o 2 (nebo $-2$) jednotky střídavě vodorovně a svisle. V cestě sudé délky je počet napojení kolen lichý.

Součet lichého počtu hodnot 2 nebo $-2$ můžeme vyjádřit jako $4k + 2$. K tomuto součtu posunutí přičteme $+1$ pro posunutí prvním ramenem cesty směrem S. Nakonec přičteme $+1$ pro poslední rameno cesty ve směru S, nebo $-1$ pro poslední rameno cesty ve směru J. Tudíž každá cesta sudé délky končící v bodě, pro nějž je součet jeho souřadnic násobkem 4, vstupuje do tohoto bodu směrem S. Je-li součet souřadnic cílového bodu lichý násobek 2, vstupuje do něho směrem J.

Každá cesta, vedoucí do bodu (2,2) jím tedy prochází směrem S: Má sudou délku a $2 + 2 = 4$. Takovou cestou je například také cesta SV, VS. Stejně odvodíme jednoznačnost směru v cílovém uzlu pro cesty liché délky. Ty končí body s lichými souřadnicemi, kterými procházíme směry V, nebo Z podle toho, je-li součet obou souřadnic násobek 4 (směr Z), nebo lichý násobek 2 (směr V).

*Odvození*: V cestě liché délky je sudý počet napojení ramen a součet posunů těmito rameny je tedy násobek 4. K tomuto součtu přičteme $+1$ za posun S na začátku cesty a $+1$, nebo $-1$ za poslední posun směrem V, nebo Z.

*Závěr*: V rovině os $x$, $y$ můžeme za uvedených předpokladů projít právě všechny body, jejichž souřadnice mají stejnou paritu, a to každý právě jedním směrem. Tento směr je jednoznačně určen paritou a součtem souřadnic (modulo 4) procházeného bodu.

### Zpátky do třetího rozměru

Co získáme, když budeme moci opustit rovinu?

Dosud jsme se pohybovali v rovině os $x$ a $y$, tedy v souřadnicích v rovině $z = 0$. Libovolným kolenem směřujícím kolmo z ní směrem vzhůru přejdeme do bodu se souřadnicí $z = 1$. Z něj ale další navazující koleno pokračuje do roviny $z = 2$.

**Postřeh 5.** Do všech bodů roviny $z = 1$, kam se dokážeme dostat, se dokážeme dostat pouze zdola (nebo při dalším pohybu shora), a pokud zde vedení neskončí, můžeme na ně navázat pouze tak, že budeme pokračovat do roviny $z = 2$ (nebo $z = 0$). V této rovině však můžeme pokračovat kterýmkoliv směrem. Pokud máme dodržet vzájemnou kolmost (či rovnoběžnost) mezi rameny potrubí, bude to kterýkoliv směr rovnoběžný s osami $x$, $y$. Můžeme tedy pokračovat jak ve směru (či proti směru), kterým vedl poslední krok v rovině $z = 0$, a otočit tak směr pohybu oproti směru ve výchozí rovině, tak ve směru kolmém a směr zachovat.

**Postřeh 6.** Přechod do jiné úrovně nám dovolí po návratu do základní roviny změnit směr průchodu profilem na směr opačný. Pokud bychom například v základní rovině procházeli profil směrem S (třeba kolenem VS), v prostoru se do stejného profilu dostaneme také čtveřicí kolen V↑, ↑S, S↓, ↓J. Proto ve třírozměrném prostoru dokážeme do každého bodu, kam dokážeme přijít nějakým směrem, přijít i směrem opačným.

**Postřeh 7.** Body, do nichž se dokážeme dostat ve vyšší úrovni (o násobky 2 vyšší $z$-souřadnice, než ze které jsme vyšli), jsou právě nad body, do kterých se dokážeme dostat v úrovni, ze které jsme vyšli. Naopak body, kterými procházíme při cestě vzhůru, jsou právě body nad ohybem kolene ve vodorovné rovině, tedy body na souřadnicích $(x, y)$, do kterých se v původní úrovni dostat nemůžeme (body nad „černými poli šachovnice“).

**Postřeh 8.** Přechod do jiné roviny a zpět nám neumožní dostat se do žádného bodu základní roviny, do něhož se neumíme dostat pohybem v této rovině.

Odpověď na původní otázku je tedy následující:

Za uvedených podmínek *(vycházíme z bodu (0,0,0) a pohybujeme se pomocí „kolen“, jejichž ústí svírají pravý úhel a každé rameno má délku* 1 *a je rovnoběžné se souřadnicovou osou)* je možné se dostat pouze do bodů, u kterých platí

$$(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) \bmod 2 = 0$$

(součet jejich souřadnic je sudé číslo).

Do některých bodů je možné se dostat *pouze ve směru osy $x$* (z obou směrů), do dalších *pouze ve směru osy $y$* (z obou směrů) a do ostatních *pouze ve směru osy $z$* (z obou směrů).

### Druhá cesta – prohledávání a program

Pokud se nám nechce takhle složitě přemýšlet a chceme získat nějaký názor na to, jak a kam může potrubí vodu dovést, můžeme začít prohledávat všechny možnosti, jak kolena napojit. A něco takového dokáže počítač rychleji než člověk – tak si na to můžeme napsat program!

Zkusíme prohledat všechny polohy a směry, do nichž se dokážeme dostat v nějakém omezeném prostoru, a potom je vypsat setříděné podle polohy. Snadno to půjde třeba v jazyku Python (pozor, pro jednoduchost nekontrolujeme, jestli si kolena vzájemně nepřekážejí, a hledání je omezeno na určitou vzdálenost od počátku, protože jinak by nikdy neskončilo):

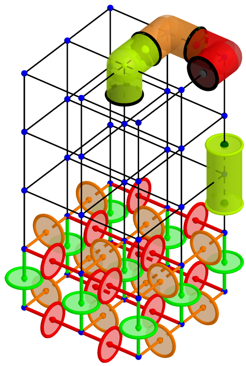
```
def posun( a, b ):
    return ( a[0]+b[0], a[1]+b[1], a[2]+b[2] )

MAX = 5
def omezeni( vektor ):
    for i in range(3):
        if vektor[i]<0 or vektor[i]>MAX:
            return False
    return True

def kolmySmer( smer1, smer2 ):
    return smer1[0]*smer2[0] + smer1[1]*smer2[1] + smer1[2]*smer2[2] == 0

vsechnySmery = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,-1),(0,-1,0),(-1,0,0)]
prozkoumat = [ ( (0,0,0),(0,1,0) ) ]  # (pozice,smer)
nalezeno = { prozkoumat[0] }
while prozkoumat != []:
    (pozice,smer) = prozkoumat.pop(0)
    for novySmer in vsechnySmery:
        if kolmySmer( smer, novySmer ): # nesmime rovne ani se otocit zpet
            novaPozice = posun( posun(pozice,smer), novySmer )
            novaPoziceASmer = (novaPozice,novySmer)
            if omezeni(novaPozice) and not novaPoziceASmer in nalezeno:
                prozkoumat.append( novaPoziceASmer)
                nalezeno.add( novaPoziceASmer )

print( *sorted(nalezeno),sep="\n" )
```

Kvůli tomu do bodů na okrajích nenajdeme cestu z poloh mimo toto omezení, ale když se podíváme na seznam pozic nalezených kolem středu povoleného rozsahu, vždy ve tvaru (poloha, směr), vypadá to (i když to není žádný důkaz!), že podporuje závěr, k němuž jsme došli první cestou (otiskujeme pouze část výpisu):

```
((2, 2, 0), (0, -1, 0))
((2, 2, 0), (0, 1, 0))
((2, 2, 2), (0, -1, 0))
((2, 2, 2), (0, 1, 0))
((2, 2, 4), (0, -1, 0))
((2, 2, 4), (0, 1, 0))
((2, 3, 1), (0, 0, -1))
((2, 3, 1), (0, 0, 1))
((2, 3, 3), (0, 0, -1))
((2, 3, 3), (0, 0, 1))
((2, 3, 5), (0, 0, 1))
((2, 4, 0), (0, -1, 0))
((2, 4, 0), (0, 1, 0))
```

## Třetí cesta – najít správný pohled na věc

K vyřešení problému často stačí podívat se na něj „z jiné strany“. Kruhovou výpusť a směr, kterým proudí voda, můžeme znázornit jako kružnici a přímku vedenou jejím středem kolmo na její rovinu. Rameno kolena pak jako úsečku délky 1 na této přímce a druhé rameno jako úsečku k ní kolmou. Celé potrubí si pak lze představit jako cestu po hranách krychlové sítě s hranou délky 2, kde uzlové body (tedy procházené profily potrubí) jsou reprezentovány kružnicemi kolmo „navlečenými“ vždy uprostřed na hranách krychlí, kde každá hrana má délku 2.



Obr. 3: Potrubí v krychlové síti

Pro snazší představu o poloze bodů posuňme soustavu oproti poloze z výše uvedené úvahy o 1 ve směru libovolné souřadnicové osy. Potom budou vrcholy krychlové sítě body s vesměs sudými souřadnicemi a průtokové profily budou mít vždy jednu souřadnici svého středu lichou, a to v ose, na niž je rovina profilu kolmá.

Pokud bychom požadovali, aby se potrubí nekřížilo a kolena si nepřekážela, pak v prostoru, kde nejsou překážky, dokážeme požadovanými směry spojit libovolné dva z výše uvedených profilů s jedinou výjimkou: dva profily na bezprostředně navazujících hranách téhož směru při zadaných směrech od výchozího k cílovému profilu bychom dokázali spojit jedině válcovou plochou výšky 2. Dvě kolena se tam nevejdou.

## Závěr

Ukázali jsme tři možnosti, jak se dá k danému problému přistupovat, i to, že se někdy podaří najít takový pohled na věc, při němž je řešení snadno viditelné.